

COLLECTION FORMATION DES ENSEIGNANTS ET FORMATION CONTINUE

JEAN FRESNEL

# Anneaux



ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

HERMANN  ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

# Table des matières

Introduction

Préliminaires

1

## F . Anneaux

|   |    |
|---|----|
| 1. Anneaux, idéaux, localisation, anneaux principaux  | 13 |
| 1.1. Anneau, corps, homomorphisme, idéal  | 13 |
| 1.2. Quotient d'un anneau, idéaux premiers, maximaux, nilpotents, diviseurs de zéro                           | 15 |
| 1.3. Produit d'anneaux  | 17 |
| 1.4. Localisation, anneau local   | 18 |
| 1.5. Racine d'un idéal, nilpotents  | 21 |
| 1.6. Anneau principal   | 22 |
| 1.6.1. Anneau principal, élément premier, la caractéristique d'un corps                                       | 22 |
| 1.6.2. Plus grand commun diviseur dans un anneau principal  | 24 |
| 1.6.3. Plus grand commun multiple   | 25 |
| 1.6.4. Factorisation en premiers  | 26 |
| 1.6.5. Les anneaux $\mathbb{Z}$ et $K[X]$ ont une division euclidienne, donc sont principaux                  | 28 |
| 1.6.6. Algorithme d'Euclide pour le pgcd et la relation de Bézout   | 30 |
| 1.6.7. Le théorème des restes chinois et la structure de $\left(\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}\right)^\times$ | 31 |
| 1.6.8. Anneau des fractions d'un anneau principal   | 35 |
| 1.7. La décomposition des fractions rationnelles en éléments simples  | 35 |
| 1.8. Anneau euclidien   | 37 |
| 1.9. Exercices  | 45 |
| 2. Modules, algèbres, anneau de polynômes   | 81 |
| 2.1. Modules, sous-modules, homomorphismes  | 81 |
| 2.2. Quotient d'un module par un sous-module  | 83 |
| 2.3. Module libre, rang, produit et somme directe de modules  | 84 |
| 2.3.0. Somme et somme directe de sous-modules   | 84 |

## IV Table des matières

|   |     |
|---|-----|
| 2.3.1. Module libre, rang   | 85  |
| 2.3.2. Produit et somme de modules  | 88  |
| 2.4. Algèbres, algèbres de type fini, algèbres de polynômes                 | 88  |
| 2.4.1. Les définitions  | 88  |
| 2.4.2. L'algèbre des polynômes, degré, propriété universelle                | 90  |
| 2.4.3. La division euclidienne pour les anneaux de polynômes à une variable | 93  |
| 2.4.4. Algèbre de type fini   | 94  |
| 2.4.5. L'algèbre des séries formelles, ordre, propriété universelle         | 95  |
| 2.5. Racines d'un polynôme  | 99  |
| 2.6. Restriction de l'anneau des scalaires pour un module                   | 103 |
| 2.7. Produit tensoriel de modules   | 105 |
| 2.7.0. Introduction   | 105 |
| 2.7.1. Produit tensoriel de modules et sommes directes                      | 106 |
| 2.7.2. Produit tensoriel d'applications linéaires                           | 108 |
| 2.7.3. Restriction des scalaires et produit tensoriel                       | 109 |
| 2.7.4. Commutativité et associativité du produit tensoriel                  | 110 |
| 2.7.5. Le produit tensoriel est exact à droite                              | 111 |
| 2.7.6. Extension de l'anneau des scalaires                                  | 114 |
| 2.7.7. Produit tensoriel d'algèbres   | 118 |
| 2.8. Exercices  | 121 |
| <br>  |     |
| 3. Eléments algébriques, extensions algébriques, corps finis                | 149 |
| 3.1. Élément algébrique, extension algébrique                               | 149 |
| 3.2. Corps de rupture d'un polynôme   | 152 |
| 3.3. Existence d'une clôture algébrique                                     | 153 |
| 3.4. Corps finis  | 157 |
| 3.4.1. Le théorème de Wedderburn  | 157 |
| 3.4.2. Structure des corps finis  | 159 |
| 3.5. Extension normale  | 160 |
| 3.6. Polynôme séparable, élément séparable, extension séparable             | 162 |
| 3.7. Les extensions galoisiennes  | 167 |
| 3.8. Exercices  | 173 |

|  |     |
|--|-----|
| 4. Polynômes symétriques   | 193 |
| 4.1. Les polynômes symétriques   | 193 |
| 4.2. Fractions rationnelles symétriques  | 197 |
| 4.3. Sommes de puissances  | 198 |
| 4.4. Exercices   | 201 |
| 5. Modules de type fini sur un anneau principal  | 209 |
| 5.1. Sous-module d'un module libre   | 209 |
| 5.2. Module de torsion   | 215 |
| 5.3. Exercices   | 219 |
| 6. Modules et anneaux noëthériens  | 225 |
| 6.1. Modules noëthériens   | 225 |
| 6.2. Anneaux noëthériens   | 227 |
| 6.3. Le théorème de transfert  | 228 |
| 6.4. Idéaux premiers minimaux ; le “rang” d'une matrice à coefficients dans un anneau    | 229 |
| 6.5. Les idéaux maximaux de $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ , le théorème des zéros de Hilbert | 232 |
| 6.5.1. Les idéaux maximaux de $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$                                  | 232 |
| 6.5.2. Le théorème des zéros de Hilbert  | 235 |
| 6.5.3. Les idéaux des algèbres de type fini  | 236 |
| 6.6. Le théorème de transfert aux anneaux de séries formelles                            | 236 |
| 6.7. Exercices   | 239 |
| 7. Anneau factoriel  | 259 |
| 7.1. Éléments irréductibles  | 259 |
| 7.2. Anneau factoriel  | 259 |
| 7.3. Théorème de transfert aux anneaux de polynômes                                      | 262 |
| 7.4. Critère d'Eisenstein  | 264 |
| 7.5. Anneau de fraction d'un anneau factoriel  | 264 |
| 7.6. La clôture intégrale d'un anneau factoriel  | 266 |

## VI Table des matières

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| 7.7.   | Le résultant de deux polynômes  | 267 |
| 7.7.1. | Le résultant de deux polynômes  | 267 |
| 7.7.2. | Le résultant comme fonction symétrique des racines                                | 270 |
| 7.7.3. | Discriminant d'un polynôme  | 273 |
| 7.8.   | Factorialité de l'anneau des séries formelles ; le théorème de préparation        | 274 |
| 7.9.   | Exercices   | 279 |
| 8.     | Extensions entières d'anneaux   | 299 |
| 8.1.   | Éléments entiers  | 299 |
| 8.2.   | Prolongement des idéaux premiers  | 300 |
| 8.3.   | Exercices   | 303 |
| 9.     | Extensions transcendentes de corps  | 311 |
| 9.1.   | Famille algébriquement libre (liée)   | 311 |
| 9.2.   | Base de transcendance   | 313 |
| 9.3.   | Le corps des fractions rationnelles à une variable ; le théorème de <b>Lüroth</b> | 316 |
| 9.4.   | Exercices   | 319 |
|        | <b>Bibliographie</b>  | 349 |
|        | <b>Index des notations</b>  | 351 |
|        | <b>Index des noms</b>   | 353 |