



Géométrie algébrique
Jean Fresnel

Table des matières.

Chapitre 0. Algèbre commutative.

0.0. Introduction.	p1
0.1. Anneaux, idéaux, localisation.	5
0.1.1. Idéaux premiers, maximaux, nilpotents, diviseurs de zéro.	5
0.1.2. Localisation, anneau local.	7
0.1.3. Racine d'un idéal, nilpotents.	10
0.1.4. Anneau principal.	11
0.1.5. Exercices.	12
0.2. Modules, algèbres, anneaux de polynômes.	17
0.2.1. Modules, sous-modules, homomorphismes.	17
0.2.2. Quotient d'un module par un sous-module.	19
0.2.3. Module libre, rang, produit et somme directes de modules	19
0.2.3.1. Module libre, rang.	19
0.2.3.2. Produit et somme de modules.	21
0.2.4. Algèbres, algèbres de type fini.	23
0.2.5. Division euclidienne.	24
0.2.6. Polynômes symétriques.	26
0.2.6.1. Polynômes symétriques.	26
0.2.6.2. Fractions rationnelles symétriques.	31
0.2.6.3. Sommes de puissances.	31
0.2.7. Modules de type fini sur un anneau principal	33
0.2.7.1. Sous-module d'un module libre	33
0.2.7.2. Module de torsion	39
0.2.7.3. Les invariants de similitude d'un endomorphisme	42
0.2.8. Exercices	51

0.3. Modules et anneaux noethériens.	p. 55
0.3.1. Modules noethériens.	55
0.3.2. Anneaux noethériens.	57
0.3.3. Le théorème de transfert.	59
0.3.4. Ideaux premiers, le "rang" d'une matrice à coefficients dans un anneau.	62
0.3.5. Exercices.	65
0.4. Anneau factoriel.	73
0.4.1. Elements irréductibles.	73
0.4.2. Anneau factoriel.	74
0.4.3. Théorème de transfert.	77
0.4.4. Critère d'Eisenstein.	78
0.4.5. Anneau de fractions d'un anneau factoriel.	79
0.4.6. La clôture intégrale d'un anneau factoriel.	81
0.4.7. Le résultant de deux polynômes.	82
0.4.7.1. Le résultant de deux polynômes.	82
0.4.7.2. Le résultant comme fonction symétrique des racines.	85
0.4.7.3. Discriminant d'un polynôme.	87
0.4.8. Exercices.	89
0.5. Extensions entières d'anneaux.	95
0.5.1. Le théorème de Cayley-Hamilton pour les anneaux.	95
0.5.2. Elements entiers.	96
0.5.3. Prolongement des ideaux premiers	97
0.5.4. Exercices.	99

55	0.6. Extensions transcendantes de corps.	p. 103
55	0.6.1. Famille algébriquement libre (lié).	103
57	0.6.2. Base de transcendance	104
59	0.6.3. Le corps des fractions rationnelles à une variable, le théorème de Luroth	107
52	0.6.4. Exercices	111
55	0.7. Dimension des anneaux, hauteur des idéaux.	117
13	0.7.1. Hauteur des idéaux, dimension de Krull.	117
3	0.7.2. Extension entière et dimension.	118
4	0.7.3. Dimension des algèbres de type fini, lemme de normalisation	118
7	de Noether, théorème des zéros de Hilbert, théorème des idéaux	
8	principaux de Krull.	
9	0.7.4	125
1		
2		
2		
15		

Chapitre I. Faisceaux.

17	I.1 limite inductive	135
3	I.2 Faisceaux	139
5	I.3 Exercices	147
5		
6		
7		
3		

Chapitre II. Variétés algébriques.

II.1 Le spectre d'une algèbre de type fini	151
II.1.1 L'espace topologique $\text{Spm } A$	151
II.1.2 Le faisceau structural sur $\text{Spm } A$	152
II.2 Espaces annelés	156
II.3 Variétés algébriques	159
II.4 Variétés algébriques projectives	160
II.4.1 Algèbres homogènes de type fini	160
II.4.2 L'espace topologique $\text{Proj}(A)$	163
II.4.3 Le faisceau structural sur $\text{Proj}(A)$	165
II.5 Exercices	170

Chapitre III. Dimension des variétés algébriques.

III.1 Espaces topologiques irréductibles, noethériens.	191
III.2 Dimension des variétés algébriques.	194
III.3 Les hypersurfaces d'une variété algébrique.	199
III.4 Exercices	203

Chapitre IV. Quelques propriétés des variétés algébriques

IV.1	Sous-variétés ouvertes, recollement de variétés	215
IV.1.1	Sous-variétés ouvertes	215
IV.1.2	Recollement des variétés	217
IV.2	Morphismes	218
IV.2.1	Morphisme d'une variété algébrique dans une variété affine	218
IV.2.2	Construction de morphismes de variétés algébriques	222
IV.2.3	Quelques propriétés des morphismes	224
IV.2.4	Morphisme induit par un morphisme d'algèbre homogène	226
IV.3	Critères d'affinité des variétés algébriques	227
IV.4	Variétés algébriques, connexes, irréductibles, réduites, intègres	229
IV.4.1	Variétés algébriques réduites	230
IV.4.2	Variétés algébriques irréductibles	231
IV.4.3	Variétés algébriques intègres	232
IV.4.4	Variété algébrique réduite associée à une variété algébrique	232
IV.5	Sous-variétés algébriques fermées	233
IV.5.1	Structure de sous-variété fermée	233
IV.5.2	Sous-variétés fermées d'une variété projective	235
IV.6	Variétés algébriques réduites sur un corps algébriquement clos	236
IV.6.1	Fonctions régulières	236
IV.6.2	Morphismes de variétés algébriques réduites	237
IV.6.3	Sous-variété fermée d'une variété algébrique réduite	240
IV.7	Exercices	243

54	IV.9 Variétés algébriques régulières	253
	IV.9.1 Anneaux locaux réguliers	253
	IV.9.2 Anneaux locaux réguliers de dimension 1	257
71	IV.9.3 Variétés algébriques régulières	261
12	IV.9 le corps des fonctions d'une variété algébrique intègre	264
16	IV.10 Exercices	270
3	IV.11 Produit de variétés algébriques	277
0	IV.11.1 Produit tensoriel d'algèbres	277
0	IV.11.2 Produit de variétés algébriques	282
3	IV.11.3 Produit de variétés algébriques projectives	285
5	IV.12 Variétés algébriques, séparées, complètes	289
0	IV.13 Exercices	298

Chapitre V. Courbes algébriques

V.1	Valuations discrètes sur un corps de fonctions	307
V.2	Courbes algébriques séparées, complètes	309
V.3	La courbe algébrique C_K associée à un corps de fonctions K	311
V.4	La courbe algébrique C_K est projective	317
V.5	Diviseurs sur une courbe	321
V.5.1	Morphismes affines	321
V.5.2	Morphismes finis	322
V.5.3	Courbes algébriques	324
V.5.4	Diviseurs sur une courbe	325
V.6	Genre d'une courbe, théorème de Riemann-Roch, d'Hurwitz	331
V.6.1	Le théorème de Riemann-Roch	331
V.6.2	Le théorème d'Hurwitz	334
V.6.3	Le genre des courbes planes	338
V.7	Courbes elliptiques, hyperelliptiques	341
V.7.1	Courbes elliptiques	341
V.7.2	Courbes hyperelliptiques	347
V.8	Exercices	348
	Index des notations	378
	Index des définitions	379