

COLLECTION FORMATION DES ENSEIGNANTS ET FORMATION CONTINUE

JEAN FRESNEL

Groupes



ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

HERMANN  ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

Table des matières

Introduction

Préliminaires

1

E . Groupes

| | |
|--|----|
| 1. Groupe, sous-groupe, groupe quotient | 13 |
| 1.1. Définitions de groupe, sous-groupe, homomorphisme | 13 |
| 1.1.1. Définition d'un groupe | 15 |
| 1.1.2. Définition d'un sous-groupe | 15 |
| 1.1.3. Classe à droite, à gauche modulo un sous-groupe | 16 |
| 1.1.4. Homomorphisme de groupe | 17 |
| 1.2. Générateur, groupe cyclique ou monogène | 19 |
| 1.3. Produit direct de groupe, somme restreinte, somme directe | 21 |
| 1.4. Sous-groupe distingué, quotient de groupes | 22 |
| 1.5. Produit semi-direct de groupes | 24 |
| 2. Groupe opérant sur un ensemble, groupe symétrique | 25 |
| 2.1. Groupe opérant sur un ensemble | 25 |
| 2.2. Le groupe symétrique | 26 |
| 2.2.1. Cycles et transpositions | 27 |
| 2.2.2. L'homomorphisme signature, le groupe alterné | 30 |
| 2.2.3. Les groupes distingués de S_n et A_n | 31 |
| 3. Les théorèmes de Sylow | 34 |
| 4. Groupes nilpotents, résolubles | 37 |
| 4.1. Commutateurs | 37 |
| 4.2. Suite centrale descendante, groupes nilpotents | 37 |
| 4.3. Suite dérivée, groupe résoluble | 40 |

II Table des matières

| | |
|--|-----|
| 5. Quelques groupes classiques | 41 |
| 5.1. Le groupe diédral | 41 |
| 5.2. Les groupes d'ordre p^2 | 42 |
| 5.3. Le groupe quaternionien d'ordre 8 | 43 |
| 5.4. Les groupes non commutatifs d'ordre 8 | 43 |
| 6. Les sous-groupes de \mathbb{Z}^n , les groupes abéliens finis, les groupes abéliens de type fini ; le dual d'un groupe abélien fini | 44 |
| 6.1. Les groupes abéliens de type fini ; rang ; sous-groupe de torsion | 44 |
| 6.2. Les sous-groupes de \mathbb{Z}^n ; facteurs invariants | 48 |
| 6.3. Le dual d'un groupe abélien fini | 61 |
| 6.4. Groupe abélien libre (rang quelconque) | 66 |
| 7. Groupe libre ; produit libre de groupes | 71 |
| 7.1. Le monoïde libre sur X | 71 |
| 7.2. Définition du groupe libre engendré par X | 72 |
| 7.3. Le groupe dérivé du groupe libre | 76 |
| 7.4. Générateurs et relations | 77 |
| 7.5. Sous-groupe d'un groupe libre | 78 |
| 7.6. Produit libre de groupes | 78 |
| 8. Exercices | 83 |
| | |
| Bibliographie | 147 |
| | |
| Index des notations | 149 |
| | |
| Index des noms | 151 |