Annulateurs de Stickelberger des groupes de classes logarithmiques

Jean-François JAULENT

Résumé. Étant donnés un nombre premier impair ℓ et un corps de nombres abélien F contenant les racines ℓ-ièmes de l'unité, nous montrons que l'idéal de Stickelberger annule la composante imaginaire du ℓ-groupe des classes logarithmiques et que son reflet en annule la composante réelle. Nous en tirons en particulier un théorème d'annulation pour les ℓ-noyaux étales sauvages.

Abstract. For any odd prime number ℓ and any abelian number field F containing the ℓ-th roots of unity, we show that the Stickelberger ideal annihilates the imaginary component of the ℓ-group of logarithmic classes and that its reflection annihilates the real component. As a consequence we obtain annihilation results for the so-called wild *étale* ℓ-kernels of F.

Table des matières

Introduction 1

1 Bref rappel sur les classes et unités logarithmiques 3

2 Éléments de Stickelberger normalisés 4

3 Dualité du miroir dans la $\mathbb{Z}_\ell$-tour cyclotomique 5

4 Théorèmes d'annulation logarithmiques 6

5 Annulation des ℓ-noyaux étales sauvages 7

Bibliographie 8

Introduction

Sous sa forme générale, le classique théorème de Stickelberger (cf. e.g. [16]) affirme que pour tout corps abélien F de groupe de Galois G_F, l'idéal de l'algèbre $\mathbb{Z}[G_F]$ engendré par les éléments de Stickelberger tordus annule le groupe des classes d'idéaux de F. Lorsque F est imaginaire, il est bien connu que ces éléments le sont aussi, en ce sens qu'ils se factorisent par $1-\bar{\tau}$, où $\bar{\tau}$ désigne la conjugaison complexe. Il suit de là que le théorème d'annulation de Stickelberger n'apporte aucune information directe sur le groupe des classes du sous-corps réel F_+, puisque ce dernier est banalement tué par l'élément $1-\bar{\tau}$.

Pour aller plus loin, il est utile de fixer un nombre premier ℓ (que nous prendrons ici impair pour éviter les complications techniques liée au cas $\ell=2$) et de se concentrer sur les ℓ-parties des groupes considérés. Et, dans cette perspective, il est naturel de raisonner en présence des racines ℓ-ièmes de l'unité, i.e. de remplacer le corps abélien de départ, disons F_0, par le sur-corps $F = F_0[\zeta_\ell]$; auquel cas les (pro)-ℓ-invariants attachés à F_0 se déduisent de ceux attachés à F, par simple descente via l'idempotent $e_{F/F_0} = \frac{1}{[F:F_0]}\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(F/F_0)}\sigma$. Ce n'est donc pas restreindre la généralité que de travailler directement sur F.

Partons donc d'un corps abélien F contenant les racines ℓ-ièmes de l'unité ; notons $e_\pm = \frac{1}{2}(1\pm\bar\tau)$ les idempotents associés à la conjugaison complexe $\bar\tau \in G_F = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$; et convenons de dire qu'un $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$-module est réel lorsqu'il est fixé par e_+, imaginaire lorsqu'il l'est par e_-. Cela étant :

– D'un côté, le théorème de Stickelberger affirme que l'idéal imaginaire $\mathcal{S}_F$ de l'algèbre $\mathbb{Z}[G_F]$ annule la composante imaginaire du ℓ-groupe des classes d'idéaux $\mathcal{C}\ell_F$ de F ; autrement dit, que pour tout m assez grand, sa réduction modulo ℓ^m annule la composante imaginaire de $\mathcal{C}\ell_F$.

– D'un autre côté, Gras et Oriat (cf. [2, 12, 4]) ont montré que le reflet modulo ℓ^m de l'idéal $\mathcal{S}_F$ est un idéal réel de l'algèbre quotient $\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}[G_F]$ qui annule pour tout m assez grand la composante réelle du sous-groupe de torsion $\mathcal{T}_F^\infty$ du pro-ℓ-groupe des classes infinitésimales de F.

On voit par là que le ℓ-groupe de classes $\mathcal{C}\ell_F$ d'une part et ℓ-groupe $\mathcal{T}_F^\infty$ d'autre part apparaissent dans des positions symétriques, alors même que leurs définitions respectives ne le sont pas : par la théorie ℓ-adique du corps de classes, $\mathcal{C}\ell_F$ s'identifie au groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{nr}}/F)$ attaché à la ℓ-extension abélienne non-ramifiée maximale F^{nr} de F ; tandis que $\mathcal{T}_F^\infty$ s'identifie au sous-groupe de torsion du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F^{\ell\mathrm{r}}/F)$ attaché à la pro-ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale de F (cf. e.g. [3, 7]).

Le but de la présente note est de présenter une formulation parfaitement symétrique de ces théorèmes d'annulations, mais portant sur un troisième ℓ-groupe, essentiellement distinct des deux précédents, quoique présentant avec eux une certaine ressemblance : le ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ introduit dans [6], dont nous rappelons plus loin les principales propriétés.

Partant d'un corps de nombres abélien F contenant les racines ℓ-ièmes de l'unité, donc de conducteur f multiple de ℓ, nous reprenons la définition standard des éléments de Stickelberger tordus $\mathcal{s}_F^c$, telle que donnée par exemple dans [4] pour tout c impair étranger à f, puis, par montée et descente dans la $\mathbb{Z}_\ell$-tour cyclotomique nous définissons leurs reflets $\mathcal{s}_F^{c*}$ dans l'involution du miroir. Procédant ensuite par induction à partir du résultat classique pour la partie imaginaire, puis par dualité de Kummer pour la partie réelle, nous obtenons alors le Théorème 4, qu'il est facile (par un argument immédiat de densité) de reformuler comme suit :

Théorème Principal. *Soient ℓ un nombre premier impair et F un corps de nombres contenant les racines ℓ-ièmes de l'unité de groupe de Galois G_F.*

Définissons le symétrisé ℓ-adique $\hat{\mathcal{S}}\ell_F$ de l'idéal de Stickelberger comme étant l'idéal de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ engendré par les éléments de Stickelberger tordus $\mathcal{s}_F^c$ et leurs reflet $\mathcal{s}_F^{c*}$ pour $c \in \mathbb{Z}_\ell{}^\times$. Alors :

- *La composante imaginaire de l'idéal $\hat{\mathcal{S}}\ell_F$ est l'idéal de $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ engendré par les éléments de Stickelberger tordus et sa composante réelle l'idéal engendré par leurs reflets respectifs.*
- *Le symétrisé $\hat{\mathcal{S}}\ell_F$ annule le ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ des classes logarithmiques de F. En particulier sa composante réelle annule la composante réelle ; sa composante imaginaire celle imaginaire.*

Du fait des relations étroites entre ℓ-groupes de classes logarithmiques et ℓ-noyaux étales supérieurs dans la $\mathbb{Z}_\ell$-tour cyclotomique exposées dans [10], nous en déduisons alors un théorème d'annulation pour ces mêmes noyaux. Le Corollaire 8 infra donne ainsi :

Corollaire. *Pour chaque $i \in \mathbb{Z}$, définissons le $(-i)$-ième tordu à la Tate $\hat{\mathcal{S}}\ell_F^{(i)}$ du symétrisé ℓ-adique $\hat{\mathcal{S}}\ell_F$ de l'idéal de Stickelberger comme étant l'idéal de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ engendré par les tordus à la Tate des éléments de Stickelberger $\mathcal{s}_F^c$ et de leurs reflet $\mathcal{s}_F^{c*}$ pour $c \in \mathbb{Z}_\ell{}^\times$.*

L'idéal obtenu $\hat{\mathcal{S}}\ell_F^{(i)}$ annule le i-ième ℓ-noyau étale sauvage $WK_{2i}(F)$ attaché au corps F.

1 Bref rappel sur les classes et unités logarithmiques

Soient ℓ un nombre premier donné et F un corps de nombres. À chaque place finie $\mathfrak{p}$ de F, il est attaché dans [6] une application à valeurs dans $\mathbb{Z}_\ell$, définie sur le groupe multiplicatif $F_\mathfrak{p}^\times$ du complété de F en $\mathfrak{p}$ par la formule :

$$\tilde{\nu}_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}) = \nu_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}), \text{ pour } \mathfrak{p} \nmid \ell\,; \quad \text{et} \quad \tilde{\nu}_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}) = -\frac{1}{\deg\,\mathfrak{p}}\, \mathrm{Log}_\ell(N_{F_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_p}(x_\mathfrak{p})), \text{ pour } \mathfrak{p}|\ell\,;$$

où Log_ℓ désigne le logarithme d'Iwasawa et $\deg \mathfrak{p}$ est un facteur de normalisation, dont l'expression exacte est sans importance ici, destiné à assurer que l'image de $F_\mathfrak{p}^\times$ soit dense dans $\mathbb{Z}_\ell$. Cette application induit un morphisme surjectif du *compactifié ℓ-adique* du groupe multiplicatif $F_\mathfrak{p}^\times$

$$\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}} = \varprojlim F_\mathfrak{p}^\times / F_\mathfrak{p}^{\times \ell^n}$$

sur $\mathbb{Z}_\ell$ dont le noyau, dit *sous-groupe des unités logarithmiques* de $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$,

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{F_\mathfrak{p}} = \{x_\mathfrak{p} \in \mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}} \mid \tilde{\nu}_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}) = 0\}$$

s'identifie par la Théorie ℓ-adique locale du corps de classes (cf. [7]) au sous groupe normique de $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$ associé à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $F_\mathfrak{p}^c$ de $F_\mathfrak{p}$. C'est donc l'analogue du groupe

$$\mathcal{U}_{F_\mathfrak{p}} = \{x_\mathfrak{p} \in \mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}} \mid \nu_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}) = 0\}$$

des unités de de $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$, qui correspond, lui, à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension non-ramifiée de $F_\mathfrak{p}$.

Soit maintenant $\mathcal{J}_F$ le *ℓ-adifié du groupe des idèles de F*, i.e. le produit $\mathcal{J}_F = \prod_\mathfrak{p}^{\mathrm{res}} \mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$ des compactifés $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$ des groupes multiplicatifs des complétés $F_\mathfrak{p}$, restreint aux familles $(x_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ dont presque tous les éléments tombent dans le sous-groupe unité $\mathcal{U}_F = \prod_\mathfrak{p} \mathcal{U}_{F_\mathfrak{p}}$. La Théorie ℓ-adique globale du corps de classes établit un isomorphisme de groupes topologiques compacts entre le ℓ-groupe des classes d'idèles $\mathcal{C}_F$ défini comme quotient

$$\mathcal{C}_F = \mathcal{J}_F / \mathcal{R}_F$$

de $\mathcal{J}_F$ par son sous-groupe principal $\mathcal{R}_F = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} F^\times$ et le groupe de Galois $G_F = \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$ de la pro-ℓ-extension abélienne maximale de F. Dans la correspondance ainsi établie (cf. [6, 7]) :

(i) Le groupe de normes associé à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $F^c = F_\infty$ de F est le sous-groupe des idèles de degré nul : $\widetilde{\mathcal{J}}_F = \{\mathfrak{x} = (x_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \mathcal{J}_F \mid \deg(\mathfrak{x}) = \sum_\mathfrak{p} \widetilde{\nu}_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}) \deg\, \mathfrak{p} = 0\}$.

(ii) Le groupe de normes associé à la plus grande sous-extension F^{lc} de F^{ab} qui est localement cyclotomique (i.e. complètement décomposée sur F^c en chacune de ses places) est le produit $\widetilde{\mathcal{U}}_F \mathcal{R}_F$ du sous-groupe $\widetilde{\mathcal{U}}_F = \prod_\mathfrak{p} \widetilde{\mathcal{U}}_{F_\mathfrak{p}}$ des unités logarithmiques locales et de $\mathcal{R}_F$.

(iii) En particulier, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F^{lc}/F^c)$ s'identifie au quotient $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F = \widetilde{\mathcal{J}}_F / \widetilde{\mathcal{U}}_F \mathcal{R}_F$, lequel peut être regardé comme quotient du groupe $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_F = \widetilde{\mathcal{J}}_F / \widetilde{\mathcal{U}}_F$ des diviseurs logarithmiques de degré nul par son sous-groupe principal $\mathcal{P}\ell_F = \mathcal{R}_F \widetilde{\mathcal{U}}_F / \widetilde{\mathcal{U}}_F$, le numérateur $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_F$ s'identifiant au sous-groupe $\widetilde{\oplus}_\mathfrak{p}\, \mathbb{Z}_\ell\, \mathfrak{p}$ des diviseurs de degré nul de la somme formelle $\oplus_\mathfrak{p}\, \mathbb{Z}_\ell\, \mathfrak{p}$.

(iv) Et le noyau $\widetilde{\mathcal{E}}_F = \mathcal{R}_F \cap \widetilde{\mathcal{U}}_F$ du morphisme $\widetilde{\mathrm{div}}$: $x \mapsto \sum_\mathfrak{p} \widetilde{\nu}_\mathfrak{p}(x)\, \mathfrak{p}$ de $\mathcal{R}_F$ dans $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_F$ est le sous-groupe des normes cyclotomiques (locales comme globales) de $\mathcal{R}_F$.

Définition. *Nous disons que $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ est le ℓ-groupe des classes logarithmiques du corps F et que $\widetilde{\mathcal{E}}_F$ est le pro-ℓ-groupe des unités logarithmiques globales.*

Du point de vue de la théorie d'Iwasawa, le groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ s'interprète comme le quotient des genres ${}^\Gamma\mathcal{T}_F$, relativement au groupe procyclique $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$, du *module de Kuz'min-Tate*

$$\mathcal{T}_F = \varprojlim \mathcal{C}\ell'_{F_n}$$

limite projective des ℓ-groupes de ℓ-classes d'idéaux attachés aux étages finis K_n de la tour K_∞/K.

Enfin, comme expliqué dans [6, 9], la *conjecture de Gross-Kuz'min* (pour le corps F et le premier ℓ) revient à postuler la finitude du (pro)-ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ ou, de façon équivalente, que le $\mathbb{Z}_\ell$-rang du pro-ℓ-groupe des unités logarithmiques $\widetilde{\mathcal{E}}_k$ est le somme $r_F + c_F$ des nombres de places réelles et complexes de F. Elle est toujours vérifiée dès lors que F est abélien.

2 Éléments de Stickelberger normalisés

Soient F un corps abélien de conducteur $f_F = f$ et $G_F = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ son groupe de Galois.

L'élément de Stickelberger normalisé attaché à F est défini dans l'algèbre $\mathbb{Q}[G_F]$ par la formule :

$$\mathcal{S}_F = \sum_{0<a<f}^{\times} \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{a}{f}\right) \left(\tfrac{F}{a}\right)^{-1},$$

où la somme porte sur les entiers a étrangers à f et $\left(\frac{F}{a}\right)$ désigne le symbole d'Artin. En particulier $\mathcal{S}_F$ n'est autre que la restriction à F de l'élément $\mathcal{S}_f = \mathcal{S}_{\mathbb{Q}[\zeta_f]}$ attaché au corps cyclotomique $\mathbb{Q}[\zeta_f]$.

Le symbole d'Artin $\sigma_a = \left(\frac{\mathbb{Q}[\zeta_f]}{a}\right)$ est caractérisé par l'identité : $\zeta_f^{\sigma_a} = \zeta_f^a$. Et $\sigma_{-1} = \left(\frac{\mathbb{Q}[\zeta_f]}{-1}\right)$ est ainsi la conjugaison complexe, disons τ.

— Si donc F est réel, on a $\left(\frac{F}{-1}\right) = 1$, puis $\left(\frac{F}{f-a}\right) = \left(\frac{F}{-a}\right) = \left(\frac{F}{a}\right)$; et finalement $\mathcal{S}_F = 0$.

— Et, si F est imaginaire, le calcul donne $\mathcal{S}_F = (1-\tau)\,\mathcal{S}'_F$ avec $\mathcal{S}'_F = \sum_{0<a<f/2}^{\times} \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{f}\right).\left(\frac{F}{a}\right)^{-1}$.

Il en résulte que l'élément de Stickelberger $\mathcal{S}_F$ est *imaginaire*, en ce sens qu'il se factorise par l'idempotent $e_- = \frac{1}{2}(1-\tau)$ de l'algèbre $\mathbb{Q}[G_F]$, l'idempotent complémentaire $e_+ = \frac{1}{2}(1+\tau)$ correspondant, lui, à la composante *réelle* de l'algèbre de Galois.

Considérons maintenant un sous-corps K de F, autre que $\mathbb{Q}$, de conducteur f_K et de groupe de Galois G_K. Il est naturel de comparer $\mathcal{S}_K$ avec la restriction $N_{F/K}(\mathcal{S}_F) = \mathcal{S}_F|_K$ de $\mathcal{S}_F$ à K. Le résultat est le suivant (cf. e.g. [4], §4.2) :

$$N_{F/K}(\mathcal{S}_F) = \prod_{p|f_F \ p\nmid f_K} \left(1 - \left(\frac{K}{p}\right)^{-1}\right) \mathcal{S}_K \tag{1}$$

où le produit porte sur les premiers p qui divisent f_F mais non f_K ; autrement dit qui se ramifient dans $F/\mathbb{Q}$ mais non dans $K/\mathbb{Q}$. En particulier, on a toujours :

$$N_{F/K}(\mathcal{S}_F) = \mathcal{S}_K,$$

dès que f_F et f_K ont les mêmes facteurs premiers. En revanche, il vient :

$$N_{F/K}(\mathcal{S}_F) = 0,$$

dès qu'il existe un premier p ramifié dans $F/\mathbb{Q}$ qui est complètement décomposé dans $K/\mathbb{Q}$. C'est en particulier le cas lorsque K est le sous-corps de décomposition d'un premier p divisant f. Ainsi :

Proposition 1. *L'élément de Stickelberger $\mathcal{S}_F$ annule les $\mathbb{Q}[G_F]$-modules multiplicatifs engendrés par les idéaux premiers $\mathfrak{p}_F$ de F ramifiés dans $F/\mathbb{Q}$. En d'autres termes : $\mathfrak{p}_F^{\mathcal{S}_F} = 1$ pour $\mathfrak{p}_F|f$.*

Preuve. On a, en effet : $\mathfrak{p}_K = \mathfrak{p}_F^{e_p(F/K)}$; puis : $\mathfrak{p}_F^{e_p(F/K)\mathcal{S}_F} = \mathfrak{p}_K^{N_{F/K}(\mathcal{S}_F)} = 1$; d'où le résultat.

Maintenant, pour obtenir des éléments entiers il est judicieux de tordre les éléments de Stickelberger par des multiplicateurs convenables ; par exemple par les facteurs

$$\delta_F^c = 1 - c\left(\tfrac{F}{c}\right)^{-1},$$

où c désigne un entier impair et étranger à f. Les éléments de Stickelberger tordus ainsi obtenus

$$\mathcal{S}_F^c = \delta_F^c\, \mathcal{S}_F = \left(1 - c\left(\tfrac{F}{c}\right)^{-1}\right) \mathcal{S}_F$$

sont alors dans $\mathbb{Z}[G_F]$. Un calcul immédiat donne, en effet :

$$\mathcal{S}_F^c = \tfrac{1}{2}(c-1) \sum_{0<p<f}^{\times} \left(\tfrac{F}{a}\right)^{-1} - \tfrac{1}{f} \sum_{0<p<f}^{\times} \left(a\left(\tfrac{F}{a}\right)^{-1} - ac\left(\tfrac{F}{ac}\right)^{-1}\right);$$

avec à gauche un multiple de la norme $\nu_F = \sum_{\sigma\in G_F} \sigma$ et où la somme à droite est dans $f\mathbb{Z}[G_F]$.

Enfin, comme on a banalement $\delta_F^c|_K = 1 - c\left(\frac{K}{c}\right)^{-1} = \delta_K^c$, ces éléments de Stickelberger tordus satisfont les mêmes identités de restriction que les éléments normalisés plus haut :

$$N_{F/K}(\mathcal{S}_F^c) = \prod_{p|f_F \ p\nmid f_K} \left(1 - \left(\tfrac{K}{p}\right)^{-1}\right) \mathcal{S}_K^c,$$

où p parcourt les nombres premiers ramifiés dans $F/\mathbb{Q}$ mais non dans $K/\mathbb{Q}$.

3 Dualité du miroir dans la $\mathbb{Z}_\ell$-tour cyclotomique

Supposons maintenant fixé un nombre premier impair ℓ ; partons d'un corps abélien F contenant le groupe $\boldsymbol{\mu}_\ell$ des racines ℓ-ièmes de l'unité (ce qui implique en particulier que ℓ divise le conducteur f de F) ; introduisons la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $F_\infty = F\mathbb{Q}_\infty$ de F ; et notons enfin $\Delta = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q}_\infty \simeq \mathrm{Gal}(F/(F \cap \mathbb{Q}_\infty))$ le sous-groupe de $G_F = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q})$ qui fixe $\mathbb{Q}_\infty$.

Écrivons F_n le n-ième étage de la tour F_∞ (c'est un corps abélien imaginaire de conducteur $f_n = f\ell^n$) ; puis G_n le groupe de Galois de $F_n/\mathbb{Q}$ et $G_{F_\infty} = \varprojlim G_n$ celui de $F_\infty/\mathbb{Q}$. Par projectivité, le groupe quotient $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$, qui est isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell$, se relève dans G_{F_∞}, ce qui permet d'écrire G_{F_∞} comme produit direct du sous-groupe fini $\Delta = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q}_\infty)$ et du relèvement $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell} \simeq \mathbb{Z}_\ell$.

L'algèbre de groupe complète $\mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]]$ s'identifie alors à l'algèbre d'Iwasawa $\mathbb{Z}_\ell[\Delta][[\gamma - 1]]$ en l'indéterminée $\gamma - 1$ à coefficients dans l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$.

Proposition 2. *Lorsque ℓ ne divise pas $|\Delta|$, l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ est un anneau semi-local, produit fini d'extensions non-ramifiées $\mathbb{Z}_\varphi$ de $\mathbb{Z}_\ell$ indexées par les caractères ℓ-adiques irréductibles φ de Δ :*

$$\mathbb{Z}_\varphi = \mathbb{Z}_\ell[\Delta]e_\varphi, \text{ avec } e_\varphi = \tfrac{1}{[\Delta]} \textstyle\sum_{\sigma\in\Delta} \varphi(\sigma)\sigma^{-1},$$

Dans ce cas, l'algèbre complète $\mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]]$ admet la décomposition directe :

$$\mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]] = \textstyle\bigoplus_\varphi \Lambda_\varphi,$$

où $\Lambda_\varphi = \mathbb{Z}_\varphi[[\gamma - 1]]$ est l'algèbre d'Iwasawa attachée à l'extension non-ramifiée Z_φ de $\mathbb{Z}_\ell$.

Dans ce même contexte, le sous-corps F_0 de F^c fixé par Γ, linéairement disjoint de $\mathbb{Q}^c$ sur $\mathbb{Q}$ et de groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F_0/\mathbb{Q}) \simeq \Delta$, peut être pris dans F, qui est alors l'un des étages F_m de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $F_0^c = F^c$ de F_0. Et on a la relation entre conducteurs : $f = f_0\ell^m$.

Nous référons à cette situation particulière comme étant le cas semi-simple.

Preuve. La première partie de la Proposition est bien connue, la décomposition irréductible de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ s'obtenant par relèvement de celle de l'algèbre semi-simple $\mathbb{F}_\ell[\Delta]$, les facteurs simples (resp. locaux) de $\mathbb{F}_\ell[\Delta]$ (resp. de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$) correspondant aux caractères des représentations irréductibles de Δ sur $\mathbb{F}_\ell$ (resp. sur $\mathbb{Z}_\ell$). L'exposant e de Δ étant étranger à ℓ, ces facteurs locaux sont des sous-extensions de $\mathbb{Z}_\ell[\zeta_e]$ donc des extensions abéliennes non-ramifiées de $\mathbb{Z}_\ell$.

Enfin, pour voir que F provient par composition avec un étage fini $\mathbb{Q}_m$ de la $\mathbb{Z}_\ell$-tour $\mathbb{Q}^c$ de $\mathbb{Q}$, d'une extension abélienne F_0 de groupe Δ, écrivons $G_{F_\infty} = \Gamma \times \Delta$ et prenons un générateur $\gamma^{\ell^m}\delta$ du groupe procyclique $\mathrm{Gal}(F^c/F)$; notons $\ell^* \in \mathbb{N}$ un inverse de ℓ modulo $|\Delta|$; et remplaçons γ par $\gamma_0 = \gamma\delta^{\ell^{*m}}$. Le sous-corps F_0 fixé par $\Gamma_0 = \gamma_0^{\mathbb{Z}_\ell}$ convient, F étant, par hypothèse, fixé par $\Gamma_0^{\ell^m}$.

Revenons maintenant au cas général :

Définition 3. *Soit $\kappa : G_{F_\infty} \to \mathbb{Z}_\ell^\times$ le caractère ℓ-adique donné par l'action de $G_{F_\infty} = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q})$ sur le groupe $\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty}$ des racines de l'unité d'ordre ℓ-primaire : $\zeta^\sigma = \zeta^{\kappa(\sigma)} \quad \forall\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty}$.*

L'involution du miroir est définie sur l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]] = \mathbb{Z}_\ell[\Delta][[\gamma - 1]]$ par l'identité :

$$\Phi = \textstyle\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(\gamma - 1)^k \mapsto \Phi^* = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k^*(\kappa(\gamma)\gamma^{-1} - 1)^k,$$

où le reflet a^* d'un élément $a = \sum_{\sigma\in\Delta} \alpha_\sigma\sigma \in \mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ est l'élément : $a^* = \sum_{\sigma\in\Delta} \alpha_\sigma\kappa(\sigma)\sigma^{-1}$.

L'involution du miroir trouve son origine dans la dualité entre la description kummérienne des pro-ℓ-extensions abéliennes d'un corps surcirculaire F_∞ et leur description galoisienne.

Le miroir envoie un élément ρ de G_{F_∞} sur l'élément $\rho^* = \kappa(\rho)\rho^{-1}$ (et inversement) ; d'où, par linéarité la formule annoncée sur $\mathbb{Z}_\ell[G_{F_\infty}]$ et, finalement, sur $\mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]] = \mathbb{Z}_\ell[\Delta][[\gamma - 1]]$, la congruence $\kappa(\gamma) \equiv 1$ [mod ℓ] assurant la convergence de la série.

Nota. La conjugaison complexe τ opérant par passage à l'inverse sur les éléments de $\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty}$, on a immédiatement $\kappa(\tau) = -1$; donc $e_\pm^* = \frac{1}{2}(1 \pm \tau)^* = \frac{1}{2}(1 \mp \tau) = e_\mp$: le miroir échange composantes réelles et imaginaires. Plus précisément, dans le cas semi-simple, il envoie l'idempotent e_φ sur l'idempotent $e_{\chi\bar\varphi}$, où χ est la restriction de κ à Δ et $\bar\varphi$ le contragrédient de $\varphi : \sigma \mapsto \varphi(\sigma^{-1})$.

4 Théorèmes d'annulation logarithmiques

Supposons toujours ℓ premier impair et F abélien contenant $\boldsymbol{\mu}_\ell$ de conducteur, disons, f_F.

Rappelons qu'il est attaché à F un ℓ-groupe de classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ (cf [6]), lequel se décompose ici comme somme directe de ses composantes réelle $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^+$ et imaginaire $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^-$ par action des deux idempotents $e_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \tau)$ associés à la conjugaison complexe τ ; que $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ s'interprète comme groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F^{lc}/F_\infty)$ attaché à la pro-ℓ-extension abélienne localement cyclotomique maximale F^{lc} de F relativement à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique F_∞ ; et que c'est aussi le quotient des genres ${}^{\Gamma_F}\mathcal{C}'_{F_\infty} = \mathcal{C}'_{F_\infty}/\mathcal{C}'_{F_\infty}{}^{(\gamma_F - 1)}$ du groupe de Galois $\mathcal{C}'_{F_\infty} = \mathrm{Gal}(F_\infty^{cd}/F_\infty)$ de la pro-ℓ-extension abélienne complètement décomposée (en toutes les places) maximale de F_∞ relativement au groupe procyclique $\Gamma_F = \gamma_F^{\mathbb{Z}_\ell} = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$.

Cela étant, l'analogue logarithmique du résultat de Stickelberger se présente comme suit :

Théorème 4. *Soient ℓ un premier impair, F un corps abélien contenant les racines ℓ-ièmes de l'unité, $G_F = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ et $\Gamma_F = \gamma_F^{\mathbb{Z}_\ell} = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$. Soit enfin c un entier impair arbitraire, étranger au conducteur f_F de F. Alors :*

- *(i) Les éléments de Stickelberger tordus $\mathcal{S}_F^c = \mathcal{S}_{F_\infty}^c \mod (\gamma_F - 1)$ de $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ annulent la composante imaginaire $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^- = \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^{e_-}$ du ℓ-groupe des classes logarithmiques de F.*
- *(ii) Et leurs reflets $\mathcal{S}_F^{c*} = \mathcal{S}_{F_\infty}^{c*} \mod (\gamma_F - 1)$ en annulent la composante réelle $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^+ = \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^{e_+}$.*

Remarque. L'involution du miroir est définie dans l'algèbre complète $\mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]]$. Ainsi $\mathcal{S}_F^{c*}$ désigne ici l'image dans $\mathbb{Z}_\ell[G_F] = \mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]]/(\gamma_F - 1)$ du reflet $\mathcal{S}_{F_\infty}^{c*}$ de l'élément $\mathcal{S}_{F_\infty}^c$. Ce n'est pas *stricto sensu* le reflet de l'image $\mathcal{S}_F^c$ de $\mathcal{S}_{F_\infty}^c$: pour obtenir une involution dans (un quotient de) $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$, il convient de raisonner modulo l'ordre ℓ^m de $|\mu_F|$, i.e. dans $(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})[G_F]$.

Preuve. Le théorème classique de Stickelberger (cf. e.g. [16], §15.1), appliqué aux divers étages F_n de la $\mathbb{Z}_\ell$-tour cyclotomique F_∞/F affirme que les éléments de Stickelberger tordus $\mathcal{S}_{F_n}^c$ annulent respectivement les ℓ-groupes de classes $\mathcal{C}\ell_{F_n}$. Et comme les conducteurs f_{F_n} des F_n ont les mêmes facteurs premiers que f_F, ces éléments vérifient les conditions de cohérence $N_{F_m/F_n}(\mathcal{S}_{F_m}^c) = \mathcal{S}_{F_n}^c$ pour $m \geq n$, comme indiqué dans la section 2. Ainsi :

(i) L'élément $\mathcal{S}_{F_\infty}^c = \varprojlim \mathcal{S}_{F_n}^c$ de l'algèbre complète $\mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]]$ annule le groupe $\mathcal{C}_{F_\infty} = \varprojlim \mathcal{C}\ell_{F_n}$, donc, en particulier, son quotient $\mathcal{T}_{F_\infty} = \varprojlim \mathcal{C}\ell'_{F_n}$ qui s'obtient comme limite projective des sous-groupes de ℓ-classes attachés aux F_n. Il suit de là que la classe de $\mathcal{S}_{F_\infty}^c$ modulo $(\gamma_F - 1)$ annule le quotient ${}^{\Gamma_F}\mathcal{T}_{F_\infty} = \mathcal{T}_{F_\infty}/\mathcal{T}_{F_\infty}{}^{(\gamma_F - 1)}$; autrement dit que $\mathcal{S}_F^c$ annule $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ donc $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^-$, comme annoncé.

(ii) La composante réelle $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^+$ du ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ s'identifie au ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{F^+}$ du sous-corps réel F^+ de F. Introduisons la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique F_∞^+ de F^+ ; puis notons M_∞^+ la pro-ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée de F_∞^+ et M_∞ celle de F_∞. Le radical $\mathrm{Rad}(M_\infty^+/F_\infty^+)$ s'identifie à la composante imaginaire du radical $\mathrm{Rad}(M_\infty/F_\infty)$, lequel est donné par :

$$\mathfrak{M}_{F_\infty} = \{\ell^{-k} \otimes x_\infty \in (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} F_\infty^\times \mid (x_\infty) \in I_{F_\infty}^{\ell^k}\},$$

où I_{F_∞} désigne le groupe des idéaux de F_∞ (cf. e.g. [5]). Écrivant donc $(x_\infty) = \mathfrak{a}_\infty^{\ell^k}$ et appliquant l'annulateur de Stickelberger $\mathcal{S}_\infty^c$, nous obtenons : $(x_\infty)^{\mathcal{S}_\infty^c} = \mathfrak{a}^{\mathcal{S}_\infty^c \ell^k} = (y_\infty)^{\ell^k}$, pour un y_∞ de F_∞. Par restriction aux composantes imaginaires, cela donne : $x_\infty^{\mathcal{S}_\infty^c} = \zeta y_\infty^{\ell^k}$, pour une racine de l'unité ζ, i.e. $(\ell^{-k} \otimes x_\infty)^{\mathcal{S}_\infty^c} = 1$ dans $\mathfrak{M}_{F_\infty}$. L'élément $\mathcal{S}_\infty^c$ annulant ainsi $\mathrm{Rad}(M_\infty^+/F_\infty^+)$, son reflet $\mathcal{S}_{F_\infty}^{c*}$ annule le groupe de Galois $\mathcal{T}_{F_\infty^+}^{\ell\mathrm{r}} = \mathrm{Gal}(M_\infty^+/F_\infty^+)$; et la classe de $\mathcal{S}_{F_\infty}^{c*}$ modulo $(\gamma_F - 1)$ annule bien le quotient des genres ${}^{\Gamma_F}\mathcal{T}_{F_\infty^+}^{\ell\mathrm{r}} = \mathcal{T}_{F_\infty^+}^{\ell\mathrm{r}}/\mathcal{T}_{F_\infty^+}^{\ell\mathrm{r}}{}^{(\gamma_F - 1)}$, lequel est, tout simplement, le groupe de Galois $\mathcal{T}_{F^+}^{\ell\mathrm{r}} = \mathrm{Gal}(M^+/F_\infty^+)$ attaché à la pro-ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale M^+ de F^+.

En résumé $\mathcal{S}_F^{c*}$ annule le groupe de torsion $\mathcal{T}_{F^+}^{\ell\mathrm{r}}$ et, par conséquent, son quotient $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{F^+}$, la pro-$\ell$-extension abélienne localement cyclotomique de F^+ étant évidemment ℓ-ramifiée.

Nota. Au passage, nous retrouvons ainsi, sous une forme un peu différente, le résultat d'annulation de $\mathcal{T}_{F^+}$ obtenu par Oriat et précisé par Gras (cf. [12, 4]).

5 Annulation des ℓ-noyaux étales sauvages

Conservons les notations précédente : ℓ désigne toujours un premier impair, F un corps abélien contenant μ_ℓ ; puis $F_\infty = \bigcup F_n$ sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique et G_{F_∞} le groupe profini $\mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q})$.

Pour chaque entier impair c étranger au conducteur f de F, les éléments de Stickelberger tordus $s^c_{F_n}$ attachés aux étages finis F_n de la tour F_∞ forment une suite cohérente qui définit un élément $s^c_{F_\infty}$ de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]]$, contenu par construction dans la composante imaginaire $\mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]]^-$.

Définition 5. *La somme $\hat{s}^c_{F_\infty} = s^c_{F_\infty} + s^{c*}_{F_\infty}$ de $s^c_{F_\infty}$ et de son reflet est le symétrisé de $s^c_{F_\infty}$. De ce fait $s^c_{F_\infty} = \frac{1}{2}(1-\tau)\hat{s}^c_{F_\infty}$ est la partie imaginaire de $\hat{s}^c_{F_\infty}$ et $s^{c*}_{F_\infty} = \frac{1}{2}(1+\tau)\hat{s}^c_{F_\infty}$ sa partie réelle.*

La réduction $\hat{s}^c_{F_n}$ de $\hat{s}^c_{F_\infty}$ $\mathrm{mod}\ \gamma_{F_n} - 1$ est , par convention, le symétrisé de $s^c_{F_n}$.

Cela étant, le Théorème principal de cette section se présente comme suit :

Théorème 6. *Étant donnés un premier impair ℓ et un corps abélien F contenant μ_ℓ, le symétrisé $\hat{s}^c_{F_\infty}$ annule le module de Kuz'min-Tate, limite projective des ℓ-groupes de classes logarithmiques :*

$$\mathcal{T}_{F_\infty} = \varprojlim \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{F_n} = \varprojlim \mathcal{C}\ell'_{F_n}.$$

Preuve. Écrivons $\mathcal{T}_{F_\infty}$ comme somme directe de ses composantes réelle $\mathcal{T}^+_{F_\infty}$ et imaginaire $\mathcal{T}^-_{F_\infty}$. D'un côté, comme expliqué dans la démonstration de Théorème 4, l'élément imaginaire $s^c_{F_\infty}$ annule $\mathcal{T}^-_{F_\infty}$ et l'élément réel $s^{c*}_{F_\infty}$ l'annule banalement. Symétriquement, de l'autre côté, l'élément réel $s^{c*}_{F_\infty}$ annule $\mathcal{T}^+_{F_\infty}$ tandis que l'élément imaginaire $s^c_{F_\infty}$ l'annule banalement. D'où le résultat annoncé.

Corollaire 7. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la réduction $\hat{s}^c_{F_n}$ de $\hat{s}^c_{F_\infty}$ $\mathrm{mod}\ \gamma_{F_n} - 1$ annule le ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{F_n}$ des classes logarithmique attaché au n-ième étage F_n de la tour cyclotomique F_∞/F.*

Preuve. Le groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{F_n}$ n'est autre, en effet, que le quotient des genres ${}^{\Gamma_{F_n}}\mathcal{T}_{F_\infty} = \mathcal{T}_{F_\infty}/\mathcal{T}_{F_\infty}^{(\gamma_{F_n}-1)}$ de $\mathcal{T}_{F_\infty}$ relatif au groupe procyclique $\Gamma_{F_n} = \mathrm{Gal}(F_\infty/F_n) = \gamma_{F_n}^{\mathbb{Z}_\ell}$.

Un résultat analogue vaut pour les noyaux étales sauvages. Fixons quelques notations : notons $\mathbb{T}_\ell = \varprojlim \mu_{\ell^n}$ le module de Tate construit sur les racines ℓ-primaires de l'unité, $\overline{\mathbb{T}}_\ell = \varprojlim \mu^*_{\ell^n}$ le module contagrédient, i.e. le dual de Pontrjagin de la réunion μ_{ℓ^∞} des groupes μ_{ℓ^n}.

Il est bien connu (cf. e.g. [10]) que les ℓ-noyaux étales sauvages attachés aux F_n sont donnés, comme quotients des genres tordus, par les isomorphismes de modules galoisiens :

$$WK_{2i}(F_n) \simeq {}^{\Gamma_{F_n}}(\,\mathbb{T}_\ell^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{T}_{F_\infty}) = (\,\mathbb{T}_\ell^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{T}_{F_\infty})/(\,\mathbb{T}_\ell^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{T}_{F_\infty})^{(\gamma_{F_n}-1)},$$

où $\mathbb{T}_\ell^{\otimes i}$ est la $|i|$-ième puissance tensorielle de $\mathbb{T}_\ell$ pour $i \geq 0$ et de $\overline{\mathbb{T}}_\ell$ pour $i \leq 0$.

Introduisons les tordus *à la Tate* des symétrisés $\hat{s}^c_{F_\infty}$. Pour chaque élément $\Phi = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(\gamma-1)^k$ de l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]] = \mathbb{Z}_\ell[\Delta][[\gamma-1]]$ (avec $a = \sum_{\sigma\in\Delta}\alpha_\sigma\sigma \in \mathbb{Z}_\ell[\Delta]$, $\Delta = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q}_\infty)$ et $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell}$ relevant $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$), définissons le i-ième tordu *à la Tate* de Φ en posant :

$$\Phi^{(i)} = \textstyle\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k^{(i)}(\kappa(\gamma^i)\gamma-1)^k, \text{ avec } a^{(i)} = \sum_{\sigma\in\Delta}\alpha_\sigma\kappa(\sigma^i)\sigma.$$

Avec ces conventions, il vient :

Corollaire 8. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{Z}$, la réduction $\hat{s}^{c\,(-i)}_{F_n}$ $\mathrm{mod}\ (\gamma_{F_n}-1)$ du $(-i)$-ième tordu à la Tate $\hat{s}^{c\,(-i)}_{F_\infty}$ du symétrisé $\hat{s}^c_{F_\infty}$ annule le i-ième ℓ-noyau étale sauvage $WK_{2i}(F_n)$ attaché au n-ième étage F_n de la tour cyclotomique F_∞/F.*

Remarque. Le Théorème principal ci-dessus et ses corollaires supposent que le corps abélien étudié contienne les racines ℓ-ièmes de l'unité. Il est néanmoins facile de se libérer de cette hypothèse : si F est un corps abélien arbitraire, il est toujours possible d'appliquer le Théorème au sur-corps $F' = F[\zeta_\ell]$, qui en satisfait les hypothèses puisque encore abélien, puis de redescendre les résultats sur F au moyen de l'idempotent normique $e = \frac{1}{[F':F]}N_{F'/F}$ regardé dans l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[\mathrm{Gal}(F'/F)]$.

Il convient toutefois de prendre garde au décalage des caractères du groupe (cyclique d'ordre étranger à ℓ) $\mathrm{Gal}(F'/F)$ généré par le miroir ou la torsion *à la Tate* (cf. e.g. [10]).

Références

[1] K. Belabas, J.-F. Jaulent, *The logarithmic class group package in PARI/GP*, Pub. Math. Besançon (2016).

[2] G. Gras, *Annulation du groupe des ℓ-classes généralisées d'une extension abélienne réelle de degré premier*, Ann. Institut Fourier **29** (1979), 15–32.

[3] G. Gras, *Class Field Theory : from theory to practice*, Springer Monographs in Mathematics (2005).

[4] G. Gras, *Annihilation of $tor_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{G}^{\mathrm{ab}}_{K,S})$ for real abelian extensions $K/\mathbb{Q}$*, Com. Adv. Math. Sci.**1** (2018), 5–34.

[5] J.-F. Jaulent, *La Théorie de Kummer et le K_2 des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **2** (1990), 377–411.

[6] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 301–325.

[7] J.-F. Jaulent, *Théorie ℓ-adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.

[8] J.-F. Jaulent, *Approche logarithmique des noyaux étales des corps de nombres*, J. Number Th. **120** (2006), 72–91.

[9] J.-F. Jaulent, *Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min*, Annales Math. Québec **41** (2017), 119–140.

[10] J.-F. Jaulent, A. Michel, *Approche logarithmique des noyaux étales des corps de nombres*, J. Number Th. **120** (2006), 72–91.

[11] T. Nguyen Quang Do, V. Nicolas, *Nombres de Weil, sommes de Gauss et annulateurs galoisiens*, Amer. J. Math. **133** (2011), 1533–1571.

[12] B. Oriat, *Annulation de groupes de classes réelles*, Nagoya Math. J. **81** (1981), 45–56.

[13] W. Sinnott, *On the Stickelberger ideal and the circular units of an abelian field*, Invent. Math. **62** (1981), 181–234.

[14] P. Snaith, *Relative K0, annihilators, Fitting ideals and the Stickelberger phenomena*, Proc. London Math. Soc.**90** (1992), 545–590.

[15] T. Tsuji, *The Stickelberger Elements and the Cyclotomic Units in the Cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-Extensions*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **8** (2001), 211–222.

[16] L.C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, Graduate Texts in Math. **83** (1997).

Institut de Mathématiques de Bordeaux
Université de Bordeaux & CNRS
351 cours de la libération
F-33405 Talence Cedex
courriel : Jean-Francois.Jaulent@math.u-bordeaux.fr
https://www.math.u-bordeaux.fr/~jjaulent/