Classes logarithmiques signées des corps de nombres*

Jean-François JAULENT

Version corrigée

Résumé. Nous définissons le 2-groupe des classes logarithmiques signées d'un corps de nombres par analogie avec le groupe des classes d'idéaux au sens restreint et nous établissons les résultats de base de l'arithmétique des classes logarithmiques signées.

Abstract. We introduce the signed logarithmic 2-class group of a number field as a cyclotomic analogue of the restricted ideal class group and we establish the fundamental results of the arithmetic of signed logaritmic classes.

Introduction

Le ℓ-groupe des classes logarithmiques d'un corps de nombres a été introduit dans [J1] en liaison avec les noyaux des ℓ-symboles sauvages de la K-théorie. On peut dire schématiquement que son interprétation via la théorie ℓ-adique du corps de classes (cf. [J2]) revient, par rapport à celle classique du ℓ-groupe des classes d'idéaux, à substituer la notion d'extension (localement) cyclotomique à celle d'extension (localement) non ramifiée : pour chaque place finie $\mathfrak{p}$ du corps de nombre K considéré, le complété $K_\mathfrak{p}$ de K en $\mathfrak{p}$ admet entre autres deux $\mathbb{Z}_\ell$-extensions remarquables, la non ramifiée $K_\mathfrak{p}^{nr}$ et la cyclotomique $K_\mathfrak{p}^c$, qui se trouvent coïncider lorsque $\mathfrak{p}$ ne divise pas ℓ, mais diffèrent substantiellement dans le cas contraire ; et le passage du cas classique au cas logarithmique revient à échanger leurs rôles respectifs. En d'autres termes, la définition des groupes de classes au sens logarithmique consiste à remplacer la valuation habituelle $v_\mathfrak{p}$ définie sur le compactifié $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ de $K_\mathfrak{p}^\times$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_\ell$, qui induit le plongement naturel de $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} K^\times$ dans le ℓ-groupe des idéaux $\mathcal{I}_K = \bigoplus \mathfrak{p}^{\mathbb{Z}_\ell}$, par son analogue logarithmique $\widetilde{v}_\mathfrak{p}$ défini à partir du logarithme de la valeur absolue ℓ-adique attachée à la place finie $\mathfrak{p}$.

Lorsque ℓ vaut 2, il est possible d'affiner cette définition pour prendre en compte la contribution des places réelles : on tombe alors sur la notion de classes logarithmiques au sens restreint introduite dans [S2] par analogie avec la notion habituelle de classes d'idéaux au sens restreint. Tout bien considéré, il apparaît cependant que cette dernière notion n'est pas totalement aboutie :

*J. Théor. Nombres Bordeaux **12** (2000), 455–474 & **14** (2002), 1–5.

s'il est vrai que c'est le concept d'extension localement cyclotomique qui est au coeur de la théorie, il faut considérer que la notion de "signe" ne concerne pas seulement alors les places réelles . Pour $\ell = 2$, en effet, la pro-ℓ-extension cyclotomique $K_{\mathfrak{p}}[\zeta_{2^\infty}]$ d'un corps local $K_{\mathfrak{p}}$ n'est pas toujours une $\mathbb{Z}_\ell$-extension : cela est clair pour les places réelles, pour lesquelles $K_{\mathfrak{p}}[\zeta_{2^\infty}] = \mathbb{C}$ est de degré 2 sur $K_{\mathfrak{p}} = \mathbb{R}$; mais cela se produit aussi pour les places 2-adiques, où il peut arriver que la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique $K_{\mathfrak{p}}^c$ de $K_{\mathfrak{p}}$ ne contienne pas les racines quatrièmes de l'unité, auquel cas $K_{\mathfrak{p}}^c[i]$ est encore de degré 2 sur $K_{\mathfrak{p}}^c$, ce qui se traduit par l'existence d'une fonction "signe" aux places 2-adiques. D'où l'intérêt , à l'image de ce qui a été fait dans [AJ] pour les corps de fonctions, de généraliser proprement le concept de classes logarithmiques signées en cohérence avec les correspondances données par la théorie 2-adique du corps de classes.

1. Fonction signe attachée à une place non complexe

Le nombre premier $\ell = 2$ étant désormais fixé, nous utilisons dans ce qui suit le formalisme de la théorie ℓ-adique du corps de classes tel qu'exposé dans $[J_2]$.

Rappelons qu'en chaque place non complexe $\mathfrak{p}$ d'un corps de nombres K est défini sur le compactifié 2-adique $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \varprojlim K_{\mathfrak{p}}^\times / K_{\mathfrak{p}}^{\times 2^n}$ du groupe multiplicatif $K_{\mathfrak{p}}^\times$ du complété de K en $\mathfrak{p}$ une valeur absolue 2-adique, à valeurs dans $\mathbb{Z}_2^\times = 1 + 2\mathbb{Z}_2$, donnée par la formule :

$$
|\, x \,|_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} \mathrm{sg}_{\mathfrak{p}}(x) & \text{si } \mathfrak{p} \text{ est réelle,} \\ N\mathfrak{p}^{-v_{\mathfrak{p}}(x)} & \text{pour } \mathfrak{p} \nmid 2\infty, \\ N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_2}(x) N\mathfrak{p}^{-v_{\mathfrak{p}}(x)} & \text{enfin, pour } \mathfrak{p} \mid 2. \end{cases}
$$

Dans celle-ci, $\mathrm{sg}_{\mathfrak{p}}(x)$ est la fonction signe attachée au plongement réel correspondant à la place $\mathfrak{p}$; $N\mathfrak{p}$ est la norme absolue de l'idéal $\mathfrak{p}$; et $v_{\mathfrak{p}}$ est la valuation $\mathfrak{p}$-adique attachée à $\mathfrak{p}$.

La famille $(|\ |_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ des valeurs absolues 2-adiques lorsque $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des places non complexes de K peut ainsi être regardée comme un morphisme sur le 2-groupe des idèles $\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p}}^{res} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_2^\times$; et il est bien connu (cf. $[J_3]$, prop. 1.8.) que les idèles principaux, i.e. les éléments du tensorisé 2-adique $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$ regardé comme sous-groupe de $\mathcal{J}_K$, vérifient la formule du produit :

$$
\forall\, x \in \mathcal{R}_K \quad \prod_{\mathfrak{p}} |\, x \,|_{\mathfrak{p}} = 1.
$$

Maintenant, la décomposition canonique $\mathbb{Z}_2^\times \simeq \{\pm 1\} \times (1 + 4\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ permet d'écrire tout élément x de $\mathbb{Z}_2^\times$ comme produit de son signe $\varepsilon(x) \in \{\pm 1\}$ et de sa composante "positive" $\varepsilon(x)x \in 1 + 4\mathbb{Z}_2$. Cette observation naïve conduit à étendre comme suit la notion de signe aux places non réelles :

Définition 1. *Nous appelons fonction signe attachée à une place non complexe $\mathfrak{p}$ de K l'application à valeurs dans $\{\pm 1\}$ définie sur le compactifié 2-adique*

$\mathcal{R}_\mathfrak{p} = \varprojlim K_\mathfrak{p}^\times / K_\mathfrak{p}^{\times 2^n}$ *du groupe* $K_\mathfrak{p}^\times$ *par la formule :*

$$\mathrm{sg}_\mathfrak{p}(x) = \varepsilon(|\, x\,|_\mathfrak{p}),$$

où ε *est la fonction signe canonique sur* $\mathbb{Z}_2^\times$*.*

Il est commode de dire qu'une place est *signée* lorsque la fonction signe attachée est non trivale. Les places réelles sont évidemment signées. Plus généralement :

Proposition 2. *Soit* PlS *l'ensemble des places signées du corps* K*. On a :*

$$\mathfrak{p} \in PlS \iff i \notin K_\mathfrak{p}.$$

Preuve. Il s'agit de vérifier que la fonction signe $\mathrm{sg}_\mathfrak{p}$ est triviale si et seulement si le complété $K_\mathfrak{p}$ contient les racines 4-ièmes de l'unité ; ce qui est bien évident pour les places à l'infini. Pour les places finies, distinguons :

Si $\mathfrak{p}$ est impaire (i.e. $\mathfrak{p} \nmid 2$), il vient directement :

$$\mathfrak{p} \notin PlS \;\Leftrightarrow\; N\mathfrak{p} \equiv 1 \; [mod\, 4] \;\Leftrightarrow\; i \in K_\mathfrak{p}.$$

Si $\mathfrak{p}$ est paire (i.e. $\mathfrak{p} \mid 2$), introduisons la 2-sous-extension maximale $K'_\mathfrak{p}$ de $K_\mathfrak{p}$ abélienne sur $\mathbb{Q}_2$, et observons que le groupe de normes (dans le compactifié profini $\mathcal{R}_2$ de $\mathbb{Q}_2^\times$) associé à l'extension abélienne $\mathbb{Q}_2[i]/\mathbb{Q}_2$ par la théorie ℓ-adique locale du corps de classes est $(1+4\mathbb{Z}_2)\, 2^{\mathbb{Z}_2}$. Nous obtenons donc :

$$i \in K_\mathfrak{p} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{Q}_2(i) \subset K'_\mathfrak{p} \Leftrightarrow \; (1+4\mathbb{Z}_2)\, 2^{\mathbb{Z}_2} \supset N_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_2}(\mathcal{R}_\mathfrak{p}) \Leftrightarrow \; \mathrm{sg}_\mathfrak{p}(\mathcal{R}_\mathfrak{p}) = \{+1\},$$

comme annoncé.

Corollaire 3. *Nous disons que le corps* K *est signé lorsqu'il existe au moins une place* $\mathfrak{p}$ *de* K *qui est signée ; ce qui a lieu si et seulement si on a* $i \notin K$*.*

Preuve. Le théorème de Čebotarev montre qu'un corps signé admet une infinité de places signées : ce sont celles qui ne se décomposent pas dans l'extension quadratique $K[i]/K$.

Nous supposerons implicitement dans tout ce qui suit que K est signé. En fait, nous allons même faire apparaître une condition plus forte, celle de corps logarithmiquement signé, en dehors de laquelle la définition des classes signées est de peu d'intérêt. Nous avons besoin pour cela d'introduire la notion d'élément totalement positif (au sens logarithmique).

Définition 4. *Nous appelons sous-groupe des éléments positifs de* $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ *et nous notons* $\mathcal{R}_\mathfrak{p}^+$*, le noyau dans* $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ *de la fonction signe* $\mathrm{sg}_\mathfrak{p}$*. Le 2-groupe* $\mathcal{R}_\mathfrak{p}^+$ *est donc d'indice 2 dans* $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ *si* $\mathfrak{p}$ *est signée ; il coïncide avec* $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ *sinon.*

Le sous-groupe $\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}^+ = \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p} \cap \mathcal{R}_\mathfrak{p}^+$ *(où* $\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p} = \{x_\mathfrak{p} \in \mathcal{R}_\mathfrak{p} |\; |x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} = \pm 1\}$*) est le groupe des unités logarithmiques positives dans* $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ *; c'est aussi le noyau dans* $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ *de la valeur absolue* $\mathfrak{p}$*-adique* $|\;|_\mathfrak{p}$*.*

Enfin, le produit $\widetilde{\mathcal{U}}_K^+ = \prod_\mathfrak{p} \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}^+$ *est ainsi le sous-groupe de* $\widetilde{\mathcal{U}}_K = \prod_\mathfrak{p} \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$ *formé des unités logarithmiques (locales) positives.*

Remarque. Aux places finies impaires, nous avons $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^{+} = \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$; aux places réelles, $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \{\pm 1\}$ et $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^{+} = \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^{+} = 1$; aux places paires mais non signées, $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^{+} = \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ et $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^{+} = \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$; enfin, aux places signées paires, il faut distinguer :

(i) pour $i \in K_{\mathfrak{p}}^{c}$, le groupe $\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{p}}^{c}[i]/K_{\mathfrak{p}}) \simeq \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}/\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^{+}$ est procyclique, isomorphe à $\mathbb{Z}_2$, ce qui permet d'écrire :

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^{+}\ \pi^{\mathbb{Z}_2} \text{ et } \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^{+} = \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^{+}\ \pi^{2\mathbb{Z}_2}, \quad \text{avec} \quad \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}/\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^{+} \simeq \mathbb{F}_2 \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}/\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^{+} \simeq 1 \ ;$$

(ii) pour $i \notin K_{\mathfrak{p}}^{c}$, le groupe $\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{p}}^{c}[i]/K_{\mathfrak{p}}) \simeq \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}/\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^{+}$ est bicyclique, isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{F}_2$, de sorte que l'on a : $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} = <\epsilon_{\mathfrak{p}}> \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^{+}$, pour une unité logarithmique $\epsilon_{\mathfrak{p}} \notin \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^{+}$ dont le carré est dans $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^{+}$, puis :

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}\ \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_2} \text{ et } \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^{+} = \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^{+}\ \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_2}, \quad \text{avec} \quad \pi_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^{+} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}/\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^{+} \simeq \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}/\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^{+} \simeq \mathbb{F}_2 \ .$$

Notons que lorsque $[K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_2]$ est impair, il vient $\mathrm{sg}_{\mathfrak{p}}(-1) = |-1|_{\mathfrak{p}} = -1$, ce qui permet de choisir $\epsilon_{\mathfrak{p}} = -1$ et donne $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \{\pm 1\}\ \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^{+}\ \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_2}$ avec $\pi_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^{+}$. Ce choix est, bien entendu, impossible lorsque $[K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_2]$ est pair.

Définition & Proposition 5. *Nous appelons logarithmiquement signées celles des places du corps K qui vérifient $i \notin K_{\mathfrak{p}}^{c}$. L'ensemble PLS_K des places de K qui sont logarithmiquement signées est donc formé :*

(i) des places réelles d'une part,

(ii) et de celles des places 2-adiques pour lesquelles le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{p}}^{c}[i]/K_{\mathfrak{p}})$ *n'est pas procyclique, d'autre part.*

Preuve. Pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K, notons $K_{\mathfrak{p}}^{c}$ l'extension locale associée à la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique de K. Il s'agit de caractériser les conditions locales $i \in K_{\mathfrak{p}}^{c}$. Or :

(i) pour $\mathfrak{p}$ finie impaire, la condition $i \in K_{\mathfrak{p}}^{c}$ est automatiquement satisfaite ;

(ii) pour $\mathfrak{p}$ infinie, nous avons $K_{\mathfrak{p}}^{c} = K_{\mathfrak{p}}$ et la condition précédente s'écrit tout simplement $K_{\mathfrak{p}} = \mathbb{C}$;

(iii) pour $\mathfrak{p}$ finie et paire, enfin, il peut arriver que le groupe $|\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} \simeq \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{p}}^{c}[i]/K_{\mathfrak{p}})$ ne soit pas procyclique (i.e. que $|\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}}$ contienne -1) ; ce cas se produit si et seulement si on a $i \notin K_{\mathfrak{p}}^{c}$.

Définition 6. *Par groupe des signatures logarithmiques d'un corps de nombres K, nous entendons le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel défini par :*

$$Sg\ell_K = \widetilde{\mathcal{U}}_K/\widetilde{\mathcal{U}}_K^{+} = \oplus_{\mathfrak{p}}\ \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}/\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^{+} = \oplus_{\mathfrak{p} \in PLS_K}\ \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}/\ \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^{+}$$

qui a pour dimension le nombre s_K de places de PLS_K.

Lorsque s_K n'est pas nul, nous disons que le corps K est logarithmiquement signé ; ce qui a lieu si et seulement si l'extension $K^c[i]/K^c$ attachée à la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique K^c de K n'est pas localement triviale partout , en d'autres termes si et seulement si l'élément i n'appartient pas à la 2-extension abélienne localement cyclotomique maximale K^{lc} de K.

Il est alors commode de poser $\widetilde{\mathcal{U}}_K^* = \{(u_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \widetilde{\mathcal{U}}_K \mid \prod_\mathfrak{p} \mid u_\mathfrak{p} \mid_\mathfrak{p} = +1\}$ *et*

$$\widetilde{Sg\ell}_K = \widetilde{\mathcal{U}}_K^* / \widetilde{\mathcal{U}}_K^+ = \widetilde{\oplus}_\mathfrak{p} \; \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p} / \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}^+ = \widetilde{\oplus}_{\mathfrak{p} \in PLS_K} \; \mathcal{R}_\mathfrak{p} / \; \mathcal{R}_\mathfrak{p}^+$$

en indiquant par un tilde la restriction induite par la formule du produit.

Exemple. Les corps quadratiques logarithmiquement signés sont les corps quadratiques réels **et** les corps quadratiques imaginaires $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ avec $d \neq 1, 2$ $[mod\ 8]$.

2. Construction du 2-groupe des classes logarithmiques signées

Rappelons que la *valuation logarithmique* $\widetilde{v}_\mathfrak{p}$ attachée à une place finie $\mathfrak{p}$ est définie sur le compactifié 2-adique $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ de $K_\mathfrak{p}^\times$ par la formule :

$$\widetilde{v}_\mathfrak{p}(x) = - \mid x \mid_\mathfrak{p} / \deg \mathfrak{p},$$

où $\deg \mathfrak{p}$ est choisi de telle sorte que $\widetilde{v}_\mathfrak{p}(\mathcal{R}_\mathfrak{p})$ soit égale à $\mathbb{Z}_2$ (cf. [J1], Déf 1.1). Le noyau $\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$ de $\widetilde{v}_\mathfrak{p}$ est, par définition, le sous-groupe des *unités logarithmiques* de $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$; il coïncide avec le sous groupe de torsion $\mathcal{U}_\mathfrak{p} = \mu_\mathfrak{p}$ de $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ pour $\mathfrak{p} \nmid 2\infty$, mais en diffère généralement sinon.

Introduisons maintenant le 2-adifié $\mathcal{J}_K = \prod_\mathfrak{p}^{res} \mathcal{R}_\mathfrak{p}$ du groupe des idèles de K ; écrivons $\widetilde{\mathcal{J}}_K$ le sous-groupe des idèles de degré nul (i.e. l'image réciproque de $\{\pm 1\}$ par l'application $\prod_\mathfrak{p} \mid \;\mid_\mathfrak{p}$) ; et notons $\widetilde{\mathcal{U}}_K = \prod_\mathfrak{p} \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$ le sous- groupe des *unités logarithmiques locales.* Le quotient

$$\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K = \widetilde{\mathcal{J}}_K / \widetilde{\mathcal{U}}_K = \oplus_\mathfrak{p} \; \mathbb{Z}_2 \; \mathfrak{p}$$

est le 2-groupe des *diviseurs logarithmiques* (de degré nul) du corps K ; on peut le regarder comme l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_\mathfrak{p} \nu_\mathfrak{p} \; \mathfrak{p}$ de places finies de K à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$ qui satisfont la condition de degré $\sum_\mathfrak{p} \nu_\mathfrak{p} \deg \mathfrak{p} = 0$. L'image $\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K$ dans $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K$ du 2-groupe des idèles principaux $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_2 \otimes_\mathbb{Z} K^\times$ (considéré comme un sous-groupe de $\widetilde{\mathcal{J}}_K$) est alors, par définition, le 2-groupe des *diviseurs logarithmiques principaux.* La condition de degré mise à part, le quotient

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K / \widetilde{\mathcal{P}\ell}_K$$

peut être tenu comme l'analogue logarithmique du 2-groupe des classes d'idéaux du corps K. C'est le 2-groupe des *classes logarithmiques* du corps considéré. Il est d'ailleurs fini sous les conjectures ℓ-adiques standard (cf. [J1]) et s'interprète par la théorie 2-adique du corps de classes comme groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{lc}/K^c)$ attaché à la 2-extension abélienne localement cyclotomique maximale K^{lc} de K relativement à la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique K^c.

Pour construire le 2-groupe des classes logarithmiques au sens restreint, il est tentant de procéder par analogie avec le cas classique en remplaçant simplement le sous-groupe principal $\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K$ au dénominateur de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ par le sous-groupe $\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K^+$ engendré par les seuls éléments totalement positifs (au sens logarithmique). Malheureusement la formule du produit pour les valeurs absolues introduit ici une complication supplémentaire dont il est indispensable de tenir compte scrupuleusement pour respecter la cohérence avec les isomorphismes du corps de classes global. Précisons ce que nous entendons par là :

Définition 7. Dans un corps logarithmiquement signé K, nous disons qu'un idèle de degré nul $(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \widetilde{\mathcal{J}}_K$ est :

(i) globalement positif, lorsqu'il satisfait la formule du produit pour les fonctions signes $\mathrm{sg}_{\mathfrak{p}}$. Le groupe des idèles globalement positifs est ainsi :

$$\widetilde{\mathcal{J}}_K^* = \{(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \widetilde{\mathcal{J}}_K \mid \prod_{\mathfrak{p}} \mathrm{sg}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) \;= +1\} = \{(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{J}_K \mid \prod_{\mathfrak{p}} |\, x_{\mathfrak{p}}\, |_{\mathfrak{p}} \;= 1\}.$$

Son sous-groupe unité (au sens logarithmique) est de même :

$$\widetilde{\mathcal{U}}_K^* = \widetilde{\mathcal{U}}_K \cap \widetilde{\mathcal{J}}_K^* = \{(u_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \widetilde{\mathcal{U}}_K \mid \prod_{\mathfrak{p}} \mathrm{sg}_{\mathfrak{p}}(u_{\mathfrak{p}}) \;= +1\}.$$

(ii) logarithmiquement positif, lorsqu'il est d'image triviale dans le groupe des signatures $Sg\ell_K$. Le groupe des idèles logarithmiquement positifs est ainsi :

$$\widetilde{\mathcal{J}}_K^+ = \{(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \widetilde{\mathcal{J}}_K \mid \mathrm{sg}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = +1 \;\; \forall \mathfrak{p} \in PLS_K\}.$$

Son sous-groupe unité (au sens logarithmique) est de même :

$$\widetilde{\mathcal{U}}_K^+ = \widetilde{\mathcal{U}}_K \cap \widetilde{\mathcal{J}}_K^+ = \{(u_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \widetilde{\mathcal{U}}_K \mid \mathrm{sg}_{\mathfrak{p}}(u_{\mathfrak{p}}) = +1 \;\; \forall \mathfrak{p} \in PLS_K\}.$$

(iii) totalement positif, lorsqu'il l'est globalement et logarithmiquement. Le sous-groupe des idèles totalement positifs est ainsi :

$$\widetilde{\mathcal{J}}_K^{*+} = \widetilde{\mathcal{J}}_K^* \cap \widetilde{\mathcal{J}}_K^+ = \{(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \widetilde{\mathcal{J}}_K^* \mid \mathrm{sg}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = +1 \;\; \forall \mathfrak{p} \in PLS_K\}.$$

En particulier, le groupe des éléments globaux totalement positifs est le noyau $\mathcal{R}_K^+ = \mathcal{R}_K \cap \widetilde{\mathcal{J}}_K^+$ *dans* $\mathcal{R}_K$ *du morphisme signature* sgl_K *à valeurs dans* $Sg\ell_K$*.*

Remarques.

(i) On prendra garde que les idèles totalement positifs sont pris dans $\widetilde{\mathcal{J}}_K^*$, et qu'ils vérifient donc la condition de positivité globale $\prod_{\mathfrak{p}} \mathrm{sg}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = +1$. Les idèles principaux sont, eux, globalement positifs en vertu de la formule du produit pour les valeurs absolues.

(ii) On a bien $\widetilde{\mathcal{U}}_K^+ \subset \widetilde{\mathcal{U}}_K^*$ et $\mathcal{R}_K \subset \widetilde{\mathcal{J}}_K^*$ mais non $\widetilde{\mathcal{J}}_K^+ \subset \widetilde{\mathcal{J}}_K^*$, le quotient $\widetilde{\mathcal{J}}_K^+/\widetilde{\mathcal{J}}_K^{*+} \simeq \widetilde{\mathcal{J}}_K/\widetilde{\mathcal{J}}_K^* \simeq \mathrm{Gal}(K^c[i]/K^c)$ étant d'ordre 1 ou 2.

(iii) Dans la correspondance du corps de classes, $\widetilde{\mathcal{J}}_K$ est le groupe de normes attaché à la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique globale K^c ; tandis que son sous-groupe $\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K$ correspond à la 2-extension abélienne localement cyclotomique maximale K^{lc}. De façon semblable, $\widetilde{\mathcal{J}}_K^*$ correspond à la 2-extension cyclotomique $K^c[i]$ et le sous-groupe $\widetilde{\mathcal{U}}_K^*\mathcal{R}_K = \widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K \cap \widetilde{\mathcal{J}}_K^*$ à l'extension composée $K^{lc}[i]$.

Lemme 8. *On a l'identité* $\widetilde{\mathcal{J}}_K^* = \widetilde{\mathcal{J}}_K^{*+}\mathcal{R}_K$*, d'où l'isomorphisme entre quotients :*

$$\widetilde{\mathcal{J}}_K^*/\widetilde{\mathcal{U}}_K^+\mathcal{R}_K \;\simeq\; \widetilde{\mathcal{J}}_K^{*+}/\widetilde{\mathcal{U}}_K^+\mathcal{R}_K^+.$$

Preuve. L'égalité annoncée est une conséquence facile du théorème d'approximation simultanée ; l'isomorphisme en résulte immédiatement puisqu'on a :

$$\widetilde{\mathcal{J}}_K^{*+} \cap \widetilde{\mathcal{U}}_K^+\mathcal{R}_K = \mathcal{R}_K^+.$$

Définition & Proposition 9. *Soit K un corps de nombres quelconque.*

(i) Nous appelons 2-groupe des classes logarithmiques signées le quotient

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K \;=\; \widetilde{\mathcal{J}}_K^*/\widetilde{\mathcal{U}}_K^+\mathcal{R}_K \;\simeq\; \widetilde{\mathcal{J}}_K^{*+}/\widetilde{\mathcal{U}}_K^+\mathcal{R}_K^+.$$

(ii) En termes de diviseurs, le groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K$ s'identifie d'une part au quotient

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K \;\simeq\; \widetilde{\mathcal{D}\ell s}_K/\widetilde{\mathcal{P}\ell s}_K$$

du 2-groupe des diviseurs logarithmiques signés de degré nul $\widetilde{\mathcal{D}\ell s}_K = \widetilde{\mathcal{J}}_K^*/\widetilde{\mathcal{U}}_K^+$ par son sous-groupe principal $\widetilde{\mathcal{P}\ell s}_K = \mathcal{R}_K\widetilde{\mathcal{U}}_K^+/\widetilde{\mathcal{U}}_K^+$; et d'autre part au quotient

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K \;\simeq\; \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^*/\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K^+$$

du 2-groupe des diviseurs logarithmiques globalement positifs $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^* = \widetilde{\mathcal{J}}_K^{*+}/\widetilde{\mathcal{U}}_K^+$ de degré nul par son sous-groupe principal totalement positif $\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K^+ = \mathcal{R}_K^+\widetilde{\mathcal{U}}_K^+/\widetilde{\mathcal{U}}_K^+$.

(iii) Et la théorie 2-adique du corps de classes interprète le groupe de classes logarithmiques signées comme groupe de Galois relatif

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K \simeq \mathrm{Gal}(K^{lcs}/K^{cs})$$

de la plus grande pro-2-extension abélienne K^{lcs} du corps K qui est complètement décomposée sur $K^{cs} = K^c[i]$ en chacune de ses places.

Preuve. Les isomorphismes énoncés résultent directement du Lemme 8. Cela étant, comme expliqué plus haut, le groupe $\widetilde{\mathcal{J}}_K^*$ fixe K^{cs} ; et le sous-groupe $\widetilde{\mathcal{U}}_K^+\mathcal{R}_K$ fixe K^{lcs}. D'où les interprétations annoncées.

Remarques. Nous n'avons pas fait ci-dessus d'hypothèse de signature sur K :

(i) Pour $i \in K^c$, on a banalement $\widetilde{\mathcal{J}}_K^* = \widetilde{\mathcal{J}}_K$ et $\widetilde{\mathcal{U}}_K^+ = \widetilde{\mathcal{U}}_K$, d'où l'identité :

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K = \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K\ ;$$

et la notion de signe n'apporte rien par rapport à la construction de [J1].

(ii) Pour $i \in K^{lc} \setminus K^c$, en revanche, on a $(\widetilde{\mathcal{J}}_K : \widetilde{\mathcal{J}}_K^*) = 2$ et $\widetilde{\mathcal{U}}_K^+ = \widetilde{\mathcal{U}}_K$, de sorte que $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K$ est alors d'indice 2 dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$, lequel est donc non trivial ici.

(iii) Pour $i \notin K^{lc}$, enfin (c'est à dire pour K logarithmiquement signé), on a $(\widetilde{\mathcal{J}}_K : \widetilde{\mathcal{J}}_K^*) = 2$ mais $\widetilde{\mathcal{U}}_K^* \neq \widetilde{\mathcal{U}}_K$ donc $\widetilde{\mathcal{J}}_K = \widetilde{\mathcal{J}}_K^*\widetilde{\mathcal{U}}_K$, d'où la suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{S}g\ell}_K \longrightarrow \widetilde{\mathcal{D}\ell s}_K \longrightarrow \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K \longrightarrow 1.$$

Plus précisément dans ce cas :

Corollaire 10. *Dans un corps logarithmiquement signé, diviseurs logarithmiques signés et diviseurs au sens ordinaire sont liés par la suite exacte courte :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{S}g\ell}_K & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{D}\ell s}_K & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \| & & \| & & \\
1 & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{U}}_K^*/\widetilde{\mathcal{U}}_K^+ & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{J}}_K^*/\widetilde{\mathcal{U}}_K^+ & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{J}}_K/\widetilde{\mathcal{U}}_K & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

En particulier, le noyau $\widetilde{Sg\ell}_K$ de la formule du produit dans le 2-groupe des signatures $Sg\ell_K$ s'identifie au sous-groupe de torsion de $\widetilde{\mathcal{D}\ell s}_K$; et $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K$ au quotient $\widetilde{\mathcal{D}\ell s}_K/\widetilde{Sg\ell}_K$, de sorte qu'on a (non canoniquement) :

$$\widetilde{\mathcal{D}\ell s}_K \simeq \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K \oplus \widetilde{Sg\ell}_K.$$

Remarque. Même lorsque les places 2-adiques ne sont pas signées, le 2-groupe des classes signées $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K$ ne coïncide donc pas en général avec le 2-groupe des classes logarithmiques au sens restreint $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{res}$ défini dans [S2], du fait de la condition de positivité globale introduite dans la définition 9.

Comme dans le cas classique, le groupe des classes signées est un invariant arithmétique plus fin que son homologue au sens ordinaire. Plus précisément, si $\widetilde{\mathcal{E}}_K = \mathcal{R}_K \cap \widetilde{\mathcal{U}}_K$ désigne le groupe des unités logarithmiques (globales) du corps K et $\widetilde{\mathcal{E}}_K^+ = \mathcal{R}_K \cap \widetilde{\mathcal{U}}_K^+$ son sous-groupe totalement positif (au sens logarithmique), on a une suite exacte canonique :

$$1 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}}_K/\widetilde{\mathcal{E}}_K^+ \longrightarrow \widetilde{Sg\ell}_K \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \longrightarrow 1.$$

En particulier, il suit :

Proposition 11. *Sous la conjecture de Gross généralisée, le 2-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K$ attaché à un corps logarithmiquement signé K est un 2-groupe fini, d'ordre :*

$$|\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K| \;=\; |\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K| \;\; (\widetilde{Sg\ell}_K : sgl_K(\widetilde{\mathcal{E}}_K)\ ).$$

Et, pour tout corps logarithmiquement signé K, on a donc l'équivalence :

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K = 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = 1 \qquad \textit{et} \\ \\ K \textit{ contient des unités logarithmiques de toutes} \\ \qquad \textit{signatures à la formule du produit près.} \end{cases}$$

3. Formule des 2-classes logarithmiques signées ambiges

Comme pour les 2-classes logarithmiques au sens ordinaire, le problème de la propagation de la trivialité du 2-groupe des classes logarithmiques signées se pose naturellement dans le cadre des 2-extensions (i.e. des extensions galoisiennes L/K de degré une puissance de 2), où l'on peut espérer relier l'ordre du sous-groupe des points fixes dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L$ pour l'action de $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ à celui de $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K$ par une formule explicite ne faisant intervenir que des invariants arithmétiques simples de l'extension considérée, à l'image du classique résultat de Chevalley sur les classes ambiges d'idéaux.

L'expérience montrant toutefois qu'une telle formule est rarement exploitable en dehors du cas cyclique, du fait de l'occurence de facteurs cohomologiques difficilement calculables en toute généralité, et la formule du produit venant apporter des complications supplémentaires par rapport au cas des idéaux, nous n'hésitons pas dans cette section à faire quelques hypothèses simplificatrices, quitte à renvoyer l'étude générale à la section suivante consacrée aux classes logarithmiques centrales, dont la définition est plus directement reliée aux outils habituels de la théorie du corps de classes.

Considérons donc une 2-extension galoisienne de corps de nombres logarithmiquement signés L/K, et notons $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ son groupe de Galois. Sous l'hypothèse de primitivité $H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}\ell}{}^*_L) = 0$ (que nous discuterons plus loin), partant de la suite exacte courte qui définit le 2-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L = \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L / \widetilde{\mathcal{P}\ell}{}^+_L$, prenant les points fixes par G, et comparant la suite exacte obtenue avec celle définissant $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K$, nous obtenons le diagramme commutatif (où les flèches verticales sont induites par les morphismes canoniques d'extension) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{P}\ell}{}^+_K & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{D}\ell}{}^*_K & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{pl}{}^+_{L/K}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{dl}{}^*_{L/K}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{cls}_{L/K}} & & & & \\
0 & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{P}\ell}{}^{+\,G}_L & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{D}\ell}{}^{*\,G}_L & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{C}\ell s}{}^G_L & \longrightarrow & H^1(G, \widetilde{\mathcal{P}\ell}{}^+_L) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Formant alors le diagramme du serpent, nous obtenons immédiatement l'identité entre ordres de groupes finis (avec $|\,\mathrm{Ker}\, \widetilde{pl}{}^+_{L/K}| = |\,\mathrm{Ker}\, \widetilde{dl}_{L/K}| = 1$) :

$$\frac{|\,\mathrm{Coker}\, \widetilde{dl}{}^*_{L/K}|}{|\,\mathrm{Ker}\, \widetilde{dl}{}^*_{L/K}|} = \frac{|\,\mathrm{Coker}\, \widetilde{pl}{}^+_{L/K}|}{|\,\mathrm{Ker}\, \widetilde{pl}{}^+_{L/K}|} \; \frac{|\,\mathrm{Coker}\, \widetilde{cls}_{L/K}|}{|\,\mathrm{Ker}\, \widetilde{cls}_{L/K}|} \; \frac{1}{|H^1(G, \widetilde{\mathcal{P}\ell}{}^+_L)|}.$$

D'où la formule (où les deux membres sont simultanément finis ou infinis) :

$$|\widetilde{\mathcal{C}\ell s}{}^G_L| \; = \; |\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K| \; \frac{(\widetilde{\mathcal{D}\ell}{}^{*\,G}_L : \widetilde{\mathcal{D}\ell}{}^*_K)}{(\widetilde{\mathcal{P}\ell}{}^{+\,G}_L : \widetilde{\mathcal{P}\ell}{}^+_K)} \; |H^1(G, \widetilde{\mathcal{P}\ell}{}^+_L)|.$$

Cela étant, il vient successivement :

Lemme 12. *Sous la condition de primitivité forte $H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}\ell}{}^*_L) = 0$, l'indice $(\widetilde{\mathcal{D}\ell}{}^{*\,G}_L : \widetilde{\mathcal{D}\ell}{}^*_K)$ est donné à partir des indices de ramification logarithmiques $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K)$ par la formule :*

$$(\widetilde{\mathcal{D}\ell}{}^{*\,G}_L : \widetilde{\mathcal{D}\ell}{}^*_K) = \big(\prod_{\mathfrak{p}} \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K)\big)/[L^{cs} : K^{cs}].$$

Preuve. C'est le résultat établi dans [J1] (cf. Prop. 4.4), sous la condition $H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L) = 0$, qui exprime en termes cohomologiques la primitivité de la ramification logarithmique.

Lemme 13. *Lorsque l'extension galoisienne L/K est cyclique, les relations entre la cohomologie des diviseurs logarithmiques principaux totalement positifs et celle des unités logarithmiques totalement positives fournissent l'identité :*

$$\frac{|H^1(G,\widetilde{\mathcal{P}\ell}_L^+)|}{(\widetilde{\mathcal{P}\ell}_L^{+\,G}:\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K^+)} = \frac{((\widetilde{\mathcal{E}}_K^+\cap N_{L/K}(\mathcal{R}_L^+)):N_{L/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_L^+))\ (\widetilde{\mathcal{E}}_L^{+\,G}:\widetilde{\mathcal{E}}_K^+)}{|H^1(G,\widetilde{\mathcal{E}}_L^+)|}\ \frac{|H^1(G,\mathcal{R}_L^+)|}{(\mathcal{R}_L^{+\,G}:\mathcal{R}_K^+)}$$

Preuve. Partons de la suite exacte courte qui définit le groupe $\widetilde{\mathcal{P}\ell}_L^+$; formons la suite de cohomologie associée, et comparons la à la même suite écrite pour $\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K^+$. Le diagramme obtenu commence ainsi :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{E}}_K^+ & \longrightarrow & \mathcal{R}_K^+ & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{P}\ell}_K^+ & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{E}}_L^{+\,G} & \longrightarrow & \mathcal{R}_L^{+\,G} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{P}\ell}_L^{+\,G} & \longrightarrow & H^1(G,\widetilde{\mathcal{E}}_L^+) & \longrightarrow & ...
\end{array}$$

Et le lemme du serpent nous donne la suite exacte longue :

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}}_L^{+\,G}/\widetilde{\mathcal{E}}_K^+ \longrightarrow \mathcal{R}_L^{+\,G}/\mathcal{R}_K^+ \longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}\ell}_L^{+\,G}/\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K^+ \longrightarrow H^1(G,\widetilde{\mathcal{E}}_L^+) \longrightarrow ...$$

$$... \longrightarrow H^1(G,\mathcal{R}_L^+) \longrightarrow H^1(G,\widetilde{\mathcal{P}\ell}_L^+) \longrightarrow H^2(G,\widetilde{\mathcal{E}}_L^+) \longrightarrow H^2(G,\mathcal{R}_L^+) \longrightarrow ...$$

Maintenant, si G est cyclique, il vient :

$$H^2(G,\widetilde{\mathcal{E}}_L^+) \simeq \widetilde{\mathcal{E}}_L^{+\,G}/N_{L/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_L^+) \quad \text{et} \quad H^2(G,\mathcal{R}_L^+) \simeq \mathcal{R}_L^{+\,G}/N_{L/K}(\mathcal{R}_L^+).$$

ce qui permet de remplacer la seconde partie de la suite exacte précédente par :

$$... \longrightarrow H^1(G,\mathcal{R}_L^+) \longrightarrow H^1(G,\widetilde{\mathcal{P}\ell}_L^+) \longrightarrow (\widetilde{\mathcal{E}}_L^{+\,G}\cap N_{L/K}(\mathcal{R}_L^+))/N_{L/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_L^+) \longrightarrow 1$$

Et le résultat annoncé suit, compte tenu de l'égalité entre groupes de normes : $\widetilde{\mathcal{E}}_K^+\cap N_{L/K}(\mathcal{R}_L^+) = \widetilde{\mathcal{E}}_L^{+\,G}\cap N_{L/K}(\mathcal{R}_L^+)$.

Lemme 14. *Toujours lorsque l'extension L/K est cyclique, le quotient de Herbrand attaché au 2-groupe des unités logarithmiques globales totalement positives est donné, sous la conjecture de Gross généralisée, par la formule ;*

$$q(G,\widetilde{\mathcal{E}}_L^+) = |H^2(G,\widetilde{\mathcal{E}}_L^+)|/|H^1(G,\widetilde{\mathcal{E}}_L^+)| = \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K^\infty} d_\mathfrak{p}(L/K),$$

où $d_\mathfrak{p}(L/K)=|D_\mathfrak{p}|$ désigne le degré local en $\mathfrak{p}$ de l'extension L/K et $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble Pl_K^∞ des places à l'infini du corps K.

Preuve. Le groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_L^+$ étant d'indice fini dans $\widetilde{\mathcal{E}}_L$, il a le même quotient de Herbrand. Le lemme résulte donc directement du calcul de $q(G,\widetilde{\mathcal{E}}_L)$ effectué dans [J1] (cf. cor. 3.7).

Lemme 15. *On a l'égalité :*

$$\frac{|H^1(G,\mathcal{R}_L^+)|}{(\mathcal{R}_L^{+\,G}:\mathcal{R}_K^+)} \;=\; \frac{|Sg\ell_L^G|}{|Sg\ell_K|} \;=\; 2^{-|PLD^2_{L/K}|},$$

où $PLD^2_{L/K}$ désigne l'ensemble des places 2-adiques de K qui se dessignent dans l'extension L/K.

Preuve. Partons du diagramme commutatif (où nous avons remplacé par 0 le groupe de cohomologie $H^1(G,\mathcal{R}_L)$ en vertu du théorème 90 de Hilbert) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{R}_K^+ & \longrightarrow & \mathcal{R}_K & \longrightarrow & Sg\ell_K & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \| & & \downarrow{\scriptstyle sgl_{L/K}} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{R}_L^{+\,G} & \longrightarrow & \mathcal{R}_L^G & \longrightarrow & Sg\ell_L^G & \longrightarrow & H^1(G,\mathcal{R}_L^+) \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Nous obtenons immédiatement les isomorphismes :

$$\mathcal{R}_L^{+\,G}/\mathcal{R}_K^+ \simeq \operatorname{Ker} sgl_{L/K} \quad \text{et} \quad H^1(G,\mathcal{R}_L^+) \simeq \operatorname{Coker} sgl_{L/K},$$

d'où l'identité attendue :

$$\frac{|H^1(G,\mathcal{R}_L^+)|}{(\mathcal{R}_L^{+\,G}:\mathcal{R}_K^+)} \;=\; \frac{|Coker sgl_{L/K}|}{|\operatorname{Ker} sgl_{L/K}|} = \frac{|Sg\ell_L^G|}{|Sg\ell_K|}$$

Convention. Convenons de dire qu'une place logarithmiquement signée du corps K se *dessigne* dans l'extension L/K lorsqu'aucune des places au-dessus n'est signée dans L. Ecrivons alors l'ensemble PLS_K des places logarithmiquement signées du corps K comme la réunion disjointe

$$PLS_K \;=\; PLD_{L/K} \cup \; PLS_{L/K}$$

du sous-ensemble formé des places $\mathfrak{p}$ qui se déssignent dans L/K et du sous-ensemble formé de celles qui restent logarithmiquement signées dans L (de sorte que $PLS_K^\infty \;=\; PLD^\infty_{L/K} \cup \; PLS^\infty_{L/K}$ est la partition naturelle de l'ensemble des places réelles de K entre celles qui se complexifient dans L/K et celles qui se décomposent complètement).

Cela étant, il vient :

Lemme 16. *Avec les notations précédentes, on a :*

$$Sg\ell_L \;\simeq\; \bigoplus_{\mathfrak{p}\in PLS_{L/K}} \mathbb{F}_2[G/D_\mathfrak{p}]\ ; \quad \text{et} \quad \frac{|Sg\ell_K|}{|Sg\ell_L^G|} \;=\; 2^{|PLD^2_{L/K}|},$$

où $D_\mathfrak{p}$ est un sous-groupe de décomposition de la place $\mathfrak{p}$ dans l'extension L/K.

Preuve. La définition du groupe des signatures logarithmiques nous donne :

$$Sg\ell_L = \bigoplus_{\mathfrak{p}_L\in PLS_L} \mathbb{F}_2\ \bar{\mathfrak{p}}_L = \bigoplus_{\mathfrak{p}_K\in PLS_{L/K}} \Big(\bigoplus_{\mathfrak{p}_L|\mathfrak{p}_K} \mathbb{F}_2\ \bar{\mathfrak{p}}_L\Big) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}\in PLS_{L/K}} \mathbb{F}_2[G/D_\mathfrak{p}]\ ;$$

d'où la première formule. Il suit :

$$Sg\ell_L^G \;\simeq\; \bigoplus_{\mathfrak{p}\in PLS_{L/K}} \mathbb{F}_2(\Sigma_{\sigma\in G/D_\mathfrak{p}}\ \bar{\mathfrak{P}}_L^\sigma)\ ; \quad \text{puis} \quad |Sg\ell_L^G| \;=\; 2^{|PLS_{L/K}|},$$

L'identité $|Sg\ell_K| \;=\; 2^{|PLS_K|}$ donne alors le résultat annoncé.

En fin de compte, nous pouvons énoncer comme suit le théorème fondamental de cette section :

Théorème 17. *Dans une 2-extension cyclique L/K de corps de nombres logarithmiquement signés, le nombre de 2-classes logarithmiques signées invariantes par $G = Gal(L/K)$ est donné, sous la condition de primitivité $H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^*) = 0$, par la formule :*

$$|\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L^G| = \frac{|\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K|}{2^{|PLD^2_{L/K}|}} \; \frac{\prod_\mathfrak{p} \widetilde{e}_\mathfrak{p}(L/K)}{[L^{cs} : K^{cs}]\ (\widetilde{\mathcal{E}}_K^+ : \widetilde{\mathcal{E}}_K^+ \cap N_{L/K}(\mathcal{R}_L^+))}$$

où $PLD^2_{L/K}$ est l'ensemble des places 2-adiques du corps K qui sont logarithmiquement signées dans K mais non dans L , et $\widetilde{e}_\mathfrak{p}(L/K)$ est l'indice de ramification logarithmique de la place $\mathfrak{p}$ dans l'extension L/K.

Remarque. L'hypothèse $H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^*) = 0$ est appelée ci-dessus condition de primitivité *forte*, car elle s'écrit encore $(\mathcal{D}\ell_L^{I_G} : \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{*\,I_G}) = 1$, de sorte qu'elle contient bien la condition de primitivité *faible* $(\mathcal{D}\ell_L^{I_G} : \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{I_G}) = 1$ introduite dans [J1].

4. Formule des 2-classes logarithmiques signées centrales

Pour aborder maintenant le cas des 2-extensions (galoisiennes) en toute généralité, nous allons nous intéresser non plus au plus grand sous-groupe invariant $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L^G$ du groupe des classes logarithmiques signées, mais plutôt à son plus grand quotient ${}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L$ qui est invariant pour l'action du groupe de Galois G de l'extension L/K considérée. Contrairement au sous-groupe ambige $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L^G$, le quotient ${}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L$ admet , en effet, une interprétation galoisienne particulièrement simple, ce qui le rend plus accessible aux techniques classiques de la théorie du corps de classes.

Bien entendu, si G est cyclique (et $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L$ fini), on a banalement :

$$|{}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L| \;=\; |\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L^G|,$$

ce qui redonne la formule du théorème 17, mais en général ces deux quantités ne coïncident pas.

Il est commode d'introduire d'abord le genre logarithmique signé :

Définition 18. *Le 2-corps des genres logarithmiques signés relatif à une 2-extension L/K de corps de nombres logarithmiquement signés est la plus grande pro-2-extension $L^{lcs} \cap\ LK^{ab}$ de L qui est complètement décomposée sur $L^{cs} = L^c[i] = LK^{cs}$ et provient (par composition avec L) d'une pro-2-extension abélienne de K.*

Le groupe de Galois $\widetilde{\mathcal{G}\ell s}_{L/K} = Gal(L^{lcs} \cap LK^{ab}/L^{cs})$ est, par définition, le 2-groupe des genres logarithmiques signés de l'extension L/K.

Comme expliqué plus haut, la détermination du genre logarithmique signé d'une 2-extension L/K relève des méthodes du corps de classes 2-adique. Considérons, en effet, le schéma de corps :

$$\begin{tikzcd}
L^{cs} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & LK^{lcs} \arrow[r, dash] \arrow[dd, dash] & L^{lcs} \cap LK^{ab} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & L^{lcs} \\
L^{cs} \cap K^{ab} \arrow[rr, dash] \arrow[d, dash] & & L^{lcs} \cap K^{ab} & \\
L^{cs} \cap K^{lcs} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & K^{lcs} & & \\
K^{cs} & & &
\end{tikzcd}$$

Notons pour simplifier N la norme arithmétique $N_{L/K}$ attachée à l'extension L/K. Comme expliqué dans la section 2, la 2-extension cyclotomique $L^{cs} = LK^{cs}$ de L est associée au 2-groupe d'idèles $\widetilde{\mathcal{J}}^*_L$, et la pro-2-extension abélienne L^{lcs} au sous-groupe $\widetilde{\mathcal{U}}^+_L\ \mathcal{R}_L$. D'après la théorie du corps de classes, leurs sous-extensions maximales $L^{cs} \cap\ LK^{ab}$ et $L^{lcs} \cap\ LK^{ab}$ qui proviennent (par composition avec L) d'une 2-extension abélienne de K sont donc respectivement associées aux saturés pour la norme ${}^{-1}N(N(\widetilde{\mathcal{J}}^*_L)\mathcal{R}_K)$ et ${}^{-1}N(N(\widetilde{\mathcal{U}}^+_L)\mathcal{R}_K)$ des groupes précédents. En particulier, il vient ainsi :

$$\widetilde{\mathcal{G}\ell s}_{L/K} \simeq \mathrm{Gal}((L^{lcs} \cap K^{ab})/(L^{cs} \cap K^{ab})) \simeq {}^{-1}N(N(\widetilde{\mathcal{J}}^*_L)\mathcal{R}_K)/{}^{-1}N(N(\widetilde{\mathcal{U}}^+_L)\mathcal{R}_K),$$

et, par suite :

$$|\widetilde{\mathcal{G}\ell s}_{L/K}| = (N(\widetilde{\mathcal{J}}^*_L)\mathcal{R}_K : N(\widetilde{\mathcal{U}}^+_L)\mathcal{R}_K) = \frac{(\widetilde{\mathcal{J}}^*_K : \widetilde{\mathcal{U}}^+_K\mathcal{R}_K)(\widetilde{\mathcal{U}}^+_K\mathcal{R}_K : N(\widetilde{\mathcal{U}}^+_L)\mathcal{R}_K)}{(\widetilde{\mathcal{J}}^*_K : N(\widetilde{\mathcal{J}}^*_L)\mathcal{R}_K)}\ .$$

Dans la formule obtenue le facteur $(\widetilde{\mathcal{J}}^*_K : \widetilde{\mathcal{U}}^+_K\mathcal{R}_K)$ n'est autre que $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K$; le dénominateur $(\widetilde{\mathcal{J}}^*_K : N(\widetilde{\mathcal{J}}^*_L)\mathcal{R}_K)$ est égal à $[L^{cs} \cap\ K^{ab} : K^{cs}]$; et le dernier facteur s'écrit encore :

$$(\widetilde{\mathcal{U}}^+_K\mathcal{R}_K : N(\widetilde{\mathcal{U}}^+_L)\mathcal{R}_K) = \frac{(\widetilde{\mathcal{U}}^+_K : N(\widetilde{\mathcal{U}}^+_L))}{(\mathcal{R}_K \cap\ \widetilde{\mathcal{U}}^+_K : \mathcal{R}_K \cap N(\widetilde{\mathcal{U}}^+_L))} = \frac{\prod_{\mathfrak{p}}(\widetilde{\mathcal{U}}^+_{\mathfrak{p}} : N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\widetilde{\mathcal{U}}^+_{\mathfrak{P}}))}{(\widetilde{\mathcal{E}}^+_K : \widetilde{\mathcal{E}}^+_K \cap N_{L/K}(\widetilde{\mathcal{U}}^+_L))}$$

puisque l'intersection de $\mathcal{R}_K$ avec $N_{L/K}(\widetilde{\mathcal{U}}_L^+)$ est évidemment contenue dans le sous-groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_K^+$ des unités logarithmiques positives globales du corps K.

Lemme 19. *Pour chaque place $\mathfrak{p}$ du corps K, l'indice normique $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab+}(L/K) = (\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^+ : N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{P}}^+))$ est donné par la formule suivante (où $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K)$ désigne l'indice de ramification abélianisé de la place $\mathfrak{p}$ dans l'extension L/K) :*

(i) $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab+}(L/K) = \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K) = 1$, *lorsque $\mathfrak{p}$ est réelle ;*

(ii) $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab+}(L/K) = \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K)$, *lorsque $\mathfrak{p}$ est finie impaire ;*

(iii) $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab+}(L/K) = \begin{cases} \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K), & \text{pour } \mathfrak{p} \text{ paire non contenue dans } PLD_{L/K}, \\ \frac{1}{2}\,\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K), & \text{pour } \mathfrak{p} \text{ paire contenue dans } PLD_{L/K}. \end{cases}$

Preuve. Pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K et $\mathfrak{P}$ arbitraire de L au-dessus de $\mathfrak{p}$, désignons par $L_{\mathfrak{p}}^{ab}$ la sous-extension maximale de $L_{\mathfrak{P}}$ qui est abélienne sur $K_{\mathfrak{p}}$.

Si $\mathfrak{p}$ et réelle, nous avons trivialement $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^+ = 1$, d'où $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab+}(L/K) = 1$; si $\mathfrak{p}$ est finie mais impaire nous avons $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^+ = \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ et $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{P}}^+ = \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{P}}$, d'où directement : $(\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^+ : N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{P}}^+)) = (\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} : N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{P}})) = (\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} : N_{L_{\mathfrak{p}}^{ab}/K_{\mathfrak{p}}}(\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^{ab})) = \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K)$ par définition de l'indice de ramification logarithmique (cf. [J1]) ; enfin, si $\mathfrak{p}$ est paire, nous pouvons écrire (en abrégeant $N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}$ par N) :

$$\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab+}(L/K) = (\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^+ : N(\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{P}}^+)) = \frac{(\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} : N(\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{P}}))(N(\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{P}}) : N(\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{P}}^+))}{(\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} : \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^+)} \quad ;$$

Maintenant, l'indice $(\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} : \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^+)$ au dénominateur est égal à 1 ou 2 ; et le deuxième cas n'a lieu que si la place $\mathfrak{p}$ est logarithmiquement signée dans K. Dans cette hypothèse, l'indice $(N(\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{P}}) : N(\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{P}}^+))$ au numérateur n'est lui même égal à 2 que si les places $\mathfrak{P}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ sont encore logarithmiquement signées dans L. En fin de compte le quotient $(\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} : \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^+)/(N(\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{P}}) : N(\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{P}}^+))$ vaut donc 2 si $\mathfrak{p}$ est dans $PLD_{L/K}$ et 1 dans tous les autres cas. Quant à l'indice $(\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} : N(\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{P}}))$, c'est tout simplement $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K)$, comme plus haut.

Nous pouvons donc énoncer :

Théorème 20. *Dans une 2-extension L/K de corps de nombres, le genre logarithmique signé est donné par la formule :*

$$|\widetilde{\mathcal{G}\ell s}_{L/K}| = \frac{|\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K|}{[L^{cs} \cap K^{ab} : K^{cs}]} \; \frac{\prod_{\mathfrak{p}} \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K)}{2^{|PLD^2_{L/K}|}(\widetilde{\mathcal{E}}_K^+ : \widetilde{\mathcal{E}}_K^+ \cap N_{L/K}(\widetilde{\mathcal{U}}_L^+))}$$

Dans celle-ci $\widetilde{\mathcal{E}}_K^+$ désigne le 2-groupe des unités logarithmiques positives de K et , pour chaque place $\mathfrak{p}$ du corps de base, $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K)$ est l'indice de ramification logarithmique de la sous-extension abélienne maximale $L_{\mathfrak{p}}^{ab}/K_{\mathfrak{p}}$ associée à l'extension locale $L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$.

Remarques.

(i) Contrairement à la formule des classes ambiges qui ne vaut que dans le cas cyclique, la formule des genres ne requiert aucune hypothèse sur la nature de l'extension L/K. Elle ne suppose pas non plus que K vérifie la conjecture de Gross (pour le premier 2 : lorsque celle-ci est en défaut dans K, la formule obtenue montre que $\widetilde{\mathcal{G}\ell s}_{L/K}$ est infini, et le corps L ne la vérifie pas non plus.

(ii) Pour K fixé (en particulier dès que $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K$ et $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ sont donnés), la formule obtenue ne fait intervenir que les propriétés galoisiennes ou locales de l'extension considérée, et non ses propriétés globales.

Corollaire 21. *Dans une 2-extension abélienne L/K de corps de nombres logaritmiquement signés, le genre logarithmique signé est donné par la formule :*

$$|\widetilde{\mathcal{G}\ell s}_{L/K}| = \frac{|\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K|}{[L^c : K^c]} \; \frac{\prod_{\mathfrak{p}} \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K)}{2^{|PLD^2_{L/K}|} \; (\widetilde{\mathcal{E}}_K^+ : \widetilde{\mathcal{E}}_K^+ \cap N_{L/K}(\widetilde{\mathcal{U}}_L^+))}$$

Preuve. Seule reste à vérifier l'égalité $[L^{cs} : K^{cs}] = [L^c : K^c]$, qui résulte du fait qu'on a $i \notin L^c$, puisque le corps L est réputé logarithmiquement signé.

Le corollaire 21 ci-dessus nous donne ainsi une condition nécessaire de trivialité du 2-groupe des classes logarithmiques signées dans une 2-extension abélienne de corps de nombres, qui généralise exactement celle obtenue dans le cas cyclique à l'aide de la formule des classes ambiges. Pour obtenir en retour un critère suffisant, il convient cependant de remplacer le quotient des genres par un invariant plus fin, le 2-groupe des classes logarithmiques signées centrales, que nous allons maintenant introduire :

Définition & Théorème 22. *Nous appelons 2-groupe des classes logarithmiques signées centrales attaché à une 2-extension (galoisienne) L/K de corps de nombres le plus grand quotient ${}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L = \widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L/\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L^{I_G} = \widetilde{\mathcal{J}}_L^*/\widetilde{\mathcal{J}}_L^{*I_G}\widetilde{\mathcal{U}}_L^+\mathcal{R}_L$ du groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L$ sur lequel le groupe de Galois $G = Gal(L/K)$ opère trivialement.*

(i) La condition ${}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L = 0$ caractérise les 2-extensions L de K qui ont un 2-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L$ trivial. En d'autres termes, on a : $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L = 0 \;\Leftrightarrow\; {}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L = 0$.

(ii) Le nombre de classes logarithmiques centrales est donné, avec les notations du théorème précédent par la formule :

$$|{}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L| = \frac{|\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K|}{[L^{cs} \cap K^{ab} : K^{cs}]} \; \frac{\prod_{\mathfrak{p}} \widetilde{e}^{ab}_{\mathfrak{p}}(L/K) \;\; \kappa_{L/K}}{2^{|PLD^2_{L/K}|}(\widetilde{\mathcal{E}}_K^+ : N(\mathcal{R}_L) \cap N(\widetilde{\mathcal{U}}_L^+))} \; c_{L/K},$$

où $\mathcal{N}^{loc}_{L/K}$ est le sous-groupe de $\mathcal{R}_K$ formé des éléments qui sont normes locales, $\kappa_{L/K} = (\mathcal{N}^{loc}_{L/K} : N_{L/K}\mathcal{R}_L)$ désigne le nombre de noeuds de l'extension L/K et l'indice $c_{L/K} = (\mathcal{J}_L^{I_G}\widetilde{\mathcal{U}}_L^+\mathcal{R}_L : \widetilde{\mathcal{J}}_L^{*I_G}\widetilde{\mathcal{U}}_L^+\mathcal{R}_L)$ est induit par la formule du produit pour les valeurs absolues.

Remarque. Comme expliqué dans [J1] et [AJ], le nombre de noeuds $\kappa_{L/K}$ est un invariant purement galoisien de l'extension L/K. Par exemple, si G est abélien, il est égal à l'indice dans le carré extérieur $G \wedge G$ de G du sous-groupe engendré par les $D_{\mathfrak{p}} \wedge D_{\mathfrak{p}}$ lorsque $D_{\mathfrak{p}}$ décrit les groupes de décomposition des places de K. En particulier, il vaut 1 dans le cas cyclique.

Preuve du théorème. L'assertion (i) est purement algébrique : si G est un 2-groupe fini, l'idéal d'augmentation I_G de l'algèbre 2-adique $\mathbb{Z}_2[G]$ est topologiquement nilpotent, de sorte que pour tout $\mathbb{Z}_2[G]$-module noethérien M, on a, en notations additives : $M = 0 \Leftrightarrow M = I_G\, M$, en vertu du lemme de Nakayama. Et tout le problème est donc d'évaluer le nombre de classes centrales.

Ecrivons le pour cela comme produit de trois entiers sous la forme :

$$|{}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L| = (\widetilde{\mathcal{J}}_L^* : \widetilde{\mathcal{J}}_L^{*I_G}\widetilde{\mathcal{U}}_L^+\mathcal{R}_L) = abc \text{ avec } \begin{cases} a = (\widetilde{\mathcal{J}}_L^* : {}^{-1}N(N(\widetilde{\mathcal{U}}_L^+)\mathcal{R}_K)) \\ b = ({}^{-1}N(N(\widetilde{\mathcal{U}}_L^+)\mathcal{R}_K) : \mathcal{J}_L^{I_G}\widetilde{\mathcal{U}}_L^+\mathcal{R}_L) \\ c = (\mathcal{J}_L^{I_G}\widetilde{\mathcal{U}}_L^+\mathcal{R}_L : \widetilde{\mathcal{J}}_L^{*I_G}\widetilde{\mathcal{U}}_L^+\mathcal{R}_L)\ ; \end{cases}$$

et examinons successivement chacun des trois facteurs :

(a) Le premier facteur a n'est autre que le nombre de genres signés $|\widetilde{\mathcal{G}\ell s}_{L/K}|$ puisque l'égalité $L^{cs} = LK^{cs}$ entraîne ${}^{-1}N(N(\widetilde{\mathcal{J}}_L^*)\mathcal{R}_K) = {}^{-1}N(\widetilde{\mathcal{J}}_K^*) = \widetilde{\mathcal{J}}_L^*$.

(b) Transporté par la norme globale $N = N_{L/K}$, le second b s'écrit encore :

$$(N(\widetilde{\mathcal{U}}_L^+)(\mathcal{R}_K \cap N(\mathcal{J}_L)) : N(\widetilde{\mathcal{U}}_L^+)N(\mathcal{R}_L)) = \frac{(\mathcal{R}_K \cap N(\mathcal{J}_L) : N(\mathcal{R}_L))}{((\mathcal{R}_K \cap N(\widetilde{\mathcal{U}}_L^+)N(\mathcal{R}_L)) : N(\mathcal{R}_L))};\text{or :}$$

Lemme 23. *Soit $\mathcal{N}_{L/K} = \mathcal{R}_K \cap N_{L/K}(\mathcal{J}_L)$. Alors, dans le quotient précédent,*
(i) le numérateur $(\mathcal{R}_K \cap N(\mathcal{J}_L) : N(\mathcal{R}_L)) = (\mathcal{N}_{L/K} : N(\mathcal{R}_L))$ est le nombre de noeuds de l'extension L/K,
(ii) et le dénominateur vaut $(\widetilde{\mathcal{E}}_K^+ \cap N(\widetilde{\mathcal{U}}_L^+) : N(\mathcal{R}_L) \cap N(\widetilde{\mathcal{U}}_L^+))$.

Preuve. On a : $(\mathcal{R}_K \cap N(\widetilde{\mathcal{U}}_L^+)N(\mathcal{R}_L))/N(\mathcal{R}_L) \simeq \mathcal{R}_K \cap N(\widetilde{\mathcal{U}}_L^+)/N(\mathcal{R}_L) \cap N(\widetilde{\mathcal{U}}_L^+)$.

(c) Enfin, il est intéressant de remarquer que le dernier facteur c s'écrit :

$$c = c_{L/K} = (\mathcal{J}_L^{I_G}\widetilde{\mathcal{U}}_L^+\mathcal{R}_K : \widetilde{\mathcal{J}}_L^{I_G}\widetilde{\mathcal{U}}_L^+\mathcal{R}_K)(\widetilde{\mathcal{J}}_L^{I_G}\widetilde{\mathcal{U}}_L^+\mathcal{R}_K : \widetilde{\mathcal{J}}_L^{*I_G}\widetilde{\mathcal{U}}_L^+\mathcal{R}_K),$$

les deux indices étant induits par la formule du produit, le premier pour les valuations logarithmiques, le second pour les signatures.

Corollaire 24. *Sous les hypothèses du théorème, le 2-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L$ des classes logarithmiques signées du corps L est trivial si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées :*
(i) $a = 1$, i.e. $|\widetilde{\mathcal{G}\ell s}_{L/K}| = 1$;
(ii) $b = 1$, i.e. $(\widetilde{\mathcal{E}}_K^+ \cap N(\widetilde{\mathcal{U}}_L^+) : N(\mathcal{R}_L) \cap N(\widetilde{\mathcal{U}}_L^+)) = \kappa_{L/K}$;
(iii) $c = 1$, i.e. $\mathcal{J}_L^{I_G}\widetilde{\mathcal{U}}_L^+\mathcal{R}_L = \widetilde{\mathcal{J}}_L^{I_G}\widetilde{\mathcal{U}}_L^+\mathcal{R}_L = \widetilde{\mathcal{J}}_L^{*I_G}\widetilde{\mathcal{U}}_L^+\mathcal{R}_L$.

Remarque. En dehors du cas cyclique, où s'applique le principe de Hasse, le calcul de l'indice normique $(\widetilde{\mathcal{E}}_K : N_{L/K}\mathcal{R}_L \cap N_{L/K}\mathcal{U}_L^+)$ ne relève pas des seules méthodes locales mais fait intervenir de façon effective l'arithmétique globale de l'extension considérée.

Index des principales Notations

Notations attachées à un corps local $K_{\mathfrak{p}}$:

$\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \varprojlim\ K_{\mathfrak{p}}^{\times}/K_{\mathfrak{p}}^{\times 2^n}$: le compactifié 2-adique du groupe multiplicatif $K_{\mathfrak{p}}^{\times}$;
$\mu_{\mathfrak{p}} = \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^{\times\, tor}$: le 2-groupe des racines de l'unité dans $K_{\mathfrak{p}}$;
$v_{\mathfrak{p}}(\ )$: la valuation (au sens ordinaire) sur $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_2$;
$\mathcal{U}_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Ker}\ v_{\mathfrak{p}}$ le sous-groupe unité de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$;
$\widetilde{v}_{\mathfrak{p}}(\ )$: la valuation logarithmique sur $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_2$;
$\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Ker}\ \widetilde{v}_{\mathfrak{p}}$: le sous-groupe des unités logarithmiques dans $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$;
$|\ \ |_{\mathfrak{p}}$: la valeur absolue 2-adique sur $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_2^{\times}$;
$\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^{+} = Ker\ |\ \ |_{\mathfrak{p}}$: le sous-groupe des unités logarithmiques positives de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$;
$\mathrm{sg}_{\mathfrak{p}}(\ ) = \varepsilon(|\ |_{\mathfrak{p}})$: la fonction signe sur $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ à valeurs dans ± 1 ;
$\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^{+} = Ker\ \mathrm{sg}_{\mathfrak{p}}$: le sous-groupe des éléments positifs de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$.

Notations attachées à un corps de nombres K :

$\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p}}^{res} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$: le 2-adifié du groupe des idèles de K ;
$\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} K^{\times}$: le sous-groupe des idèles principaux ;
$\widetilde{\mathcal{U}}_K = \prod_{\mathfrak{p}} \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$: le groupe des unités logarithmiques locales ;
$\widetilde{\mathcal{E}}_K = \mathcal{R}_K \cap \widetilde{\mathcal{U}}_K$: le groupe des unités logarithmiques globales ;
$\mathcal{D}\ell_K \simeq \mathcal{J}_K/\widetilde{\mathcal{U}}_K$: le groupe des diviseurs logarithmiques (au sens ordinaire) ;
$\widetilde{\mathcal{J}}_K$ le sous-module des éléments de degré nul dans $\mathcal{J}_K$;
$\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K \simeq \widetilde{\mathcal{J}}_K/\widetilde{\mathcal{U}}_K$: le groupe des diviseurs logarithmiques de degré nul ;
$\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K \simeq \mathcal{R}_K/\widetilde{\mathcal{E}}_K$: le sous-groupe des diviseurs logarithmiques principaux ;
$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K/\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K$: le groupe des classes logarithmiques (au sens ordinaire) ;
$\widetilde{\mathcal{J}}_K^{*}$: le noyau dans $\mathcal{J}_K$ de la formule du produit pour les valeurs absolues ;
$\widetilde{\mathcal{U}}_K^{*} = \widetilde{\mathcal{U}}_K \cap \widetilde{\mathcal{J}}_K^{*}$: le sous-groupe unité de $\widetilde{\mathcal{J}}_K^{*}$;
$\widetilde{\mathcal{J}}_K^{+}$: le sous-groupe logarithmiquement positif de $\widetilde{\mathcal{J}}_K^{*}$;
$\mathcal{R}_K^{+} = \mathcal{R}_K \cap \widetilde{\mathcal{J}}_K^{+}$: le sous-groupe logarithmiquement positif de $\mathcal{R}_K$;
$\widetilde{\mathcal{U}}_K^{+} = \widetilde{\mathcal{U}}_K \cap \widetilde{\mathcal{J}}_K^{+}$: le sous-groupe unité de $\widetilde{\mathcal{J}}_K^{+}$;
$\widetilde{\mathcal{E}}_K^{+} = \widetilde{\mathcal{E}}_K \cap \widetilde{\mathcal{J}}_K^{+}$: le sous-groupe logarithmiquement positif de $\widetilde{\mathcal{E}}_K$;
$\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K^{+} \simeq \mathcal{R}_K^{+}/\widetilde{\mathcal{E}}_K^{+}$: le sous-groupe principal totalement positif de $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K$;
$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{+} = \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K/\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K^{+}$: le groupe des classes logarithmiques positives ;
$\widetilde{\mathcal{D}\ell s}_K \simeq \widetilde{\mathcal{J}}_K^{*}/\widetilde{\mathcal{U}}_K^{+}$: le groupe des diviseurs logarithmiques signés ;
$\widetilde{\mathcal{P}\ell s}_K \simeq \mathcal{R}_K/\widetilde{\mathcal{E}}_K^{+}$: le sous-groupe principal de $\widetilde{\mathcal{D}\ell s}_K$;
$\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K = \widetilde{\mathcal{D}\ell s}_K/\widetilde{\mathcal{P}\ell s}_K$: le groupe des classes logarithmiques signées ;

$\widetilde{Sg\ell}_K \simeq \widetilde{\mathcal{J}}_K^* / \widetilde{\mathcal{J}}_K^+$: le groupe des signatures logarithmiques du corps K ;

Notations attachées à une 2-extension L/K de corps de nombres :

$PLS_{L/K}$: l'ensemble des places logarithmiquement signées dans L/K ;
$PLD_{L/K}$: l'ensemble des places logarithmiquement dessignées dans L/K ;
$\kappa_{L/K} = (\mathcal{N}_{L/K}^{loc} : N_{L/K}\mathcal{R}_L)$: le nombre de noeuds de l'extension L/K.

Bibliographie

[AJ] B. Anglès et J.-F. Jaulent, *Théorie des genres des corps globaux*, Manuscripta Math. **101** (2000), 513-532.

[FG] L.J. Federer, B.H. Gross, *Regulators and Iwasawa modules.* Inv. Math. **62** (1981), 443–457.

[J1] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 301-325.

[J2] J.-F. Jaulent, *Théorie ℓ-adique du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355-397.

[JS] J.-F. Jaulent et O. Sauzet, *Extensions quadratiques 2-birationnelles de corps de nombres totalement réels* , Pub. Matemàtiques **44** (2000), 343-353.

[S1] F. Soriano, *Classes logarithmiques ambiges des corps quadratiques*, Acta Arith. **78** (1997), 201-219.

[S2] F. Soriano, *Classes logarithmiques au sens restreint*, Manuscripta Math. **93** (1997), 409-420.

[S3] F. Soriano, *Classes logarithmiques généralisées ambiges*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **68** (1998) , 329-338.

Jean-François Jaulent
Institut de Mathématiques
Université Bordeaux I
351, cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex
email : jaulent@math.u-bordeaux.fr