L'état actuel du problème de la capitulation*

Jean-François JAULENT

Résumé. Le texte qui suit est une présentation synthétique de l'état des connaissances sur le problème de la capitulation pour les groupes de classes des corps de nombres, peu avant la démonstration par Suzuki [39] de la conjecture principale sur cette question.

Abstract. The text which follows is a synthetic presentation of the state of the knowledge about the capitulation for the class-groups of numbers fields, shortly before the demonstration by Suzuki [39] of the main conjecture on this question.

Table des matières

Introduction

On dit depuis Hilbert qu'un idéal de l'anneau des entiers d'un corps de nombres k capitule dans une extension finie K de k, lorsqu'il devient principal par extension des scalaires à l'anneau des entiers de K. Le problème de la capitulation consiste donc précisément à décrire la partie du groupe des classes d'idéaux de k qui est représentée par les classes des idéaux de k qui capitulent dans K, lorsque K est une extension abélienne non ramifiée de k. Comme nous le verrons plus loin, cette hypothèse de non-ramification n'est pas vraiment une restriction : pour les extensions abéliennes de conducteur donné, le problème de la capitulation se pose de façon naturelle en termes de classes de rayons. On peut aussi le poser bien entendu en termes de classes d'idèles, ce qui se révèle techniquement commode à l'occasion, mais peu éclairant en fin de compte pour la question qui nous préoccupe.

Quelle que soit sa formulation cependant, y compris la plus élémentaire, la question de la capitulation reste aujourd'hui encore l'un des aspects les moins connus de l'arithmétique des

*Sém. Théor. Nombres Bordeaux 1987–1988, exp. n°17

extensions abéliennes. Cela tient, je crois, au fait que la Théorie du corps de classes, qui est l'information la plus forte que nous possédions sur l'arithmétique de ces extensions, s'est élaborée paradoxalement non pas, comme on a pu l'espérer avant les travaux de Takagi, à partir des propriétés de l'homomorphisme d'extension, qui sont au cœur du problème de la capitulation, mais, tout au contraire, autour de celles, duales, de l'application norme. Arrêtons nous un instant sur ce point : étant donnée une extension quelconque K/k de corps de nombres, il existe deux applications naturelles entre les groupes de classes d' idéaux de K et de k.

$$\begin{tikzcd} Cl_K \arrow[d, shift left, "N_{K/k}"] \\ Cl_k \arrow[u, shift left, "j_{K/k}"] \end{tikzcd}$$

— La première, ascendante, est *l'homomorphisme d'extension* $j_{K/k}$ qui est induit par l'extension des idéaux de l'anneau des entiers de k à celui de K.

— La seconde, descendante, est la *norme arithmétique* $N_{K/k}$.

Bien entendu, ces deux applications ne sont pas indépendantes puisqu'on a trivialement :

$$N_{K/k} \circ j_{K/k} = [K/k] \qquad \text{et} \qquad j_{K/k} \circ N_{K/k} = \nu_{K/k},$$

i.e. l'exponentiation par le degré de l'extension, à gauche ; et la *norme algébrique*, à droite ; c'est-à-dire l'exponentiation symbolique par l'élément $\nu_{K/k} = \sum_{g \in G} g$ de l'algèbre $\mathbb{Z}[G]$, lorsque l'extension K/k est galoisienne de groupe G.

Maintenant, le sous-groupe $Cap_{K/k}$ des classes de Cl_k qui capitulent dans Cl_K n'est rien d'autre que le noyau du morphisme $j_{K/k}$. Mais c'est du conoyau de $N_{K/k}$ et non du noyau de $j_{K/k}$ dont nous parle la théorie du corps de classes. Cela ne veut pas dire que cette théorie ne nous apporte aucune information sur la capitulation, car nombre d'avancées significatives, comme le théorème d'Artin-Furtwängler ou celui de Tannaka-Terada ont été obtenues via le corps de classes. Simplement, ces informations sont essentiellement indirectes, ce qui explique que bien des aspects du phénomène de la capitulation nous demeurent mystérieux.

Cela dit, le plan de ce rapport est le suivant.

Dans une première partie, nous présentons ce que nous appelons l'interprétation arithmétique du théorème de l'idéal principal, qui consiste à relier l'étude de la capitulation à celle de la cohomologie des unités : c'est l'approche la plus ancienne, celle inaugurée par Hilbert dans son célèbre théorème 94.

Dans une seconde partie, nous nous attachons à décrire l'approche algébrique du problème qui permet, via les isomorphismes du corps de classes de ramener le théorème de l'idéal principal dans certaines situations bien précises à un problème ment algébrique de théorie des groupes : c'est la méthode suivie pour les théorèmes d'Artin-Furwängler et de Tannaka-Terada évoqués plus haut.

Enfin , dans une dernière partie, nous présentons quelques résultats récents sur le problème de la capitulation ; en particulier ceux obtenus par Miyake.

Dans chacune des trois sections, nous avons essayé de donner des preuves aussi concises et directes que possible des résultats présentés, notamment chaque fois qu'une démonstration immédiatement accessible au lecteur non spécialiste nous sait manquer. Si donc les résultats énoncés ici sont, pour l'essentiel, bien connus des spécialistes, certaines approches peuvent être regardées, elles, comme originales.

1 L'approche arithmétique

1.1 Le théorème 94 de Hilbert et son interprétation cohomologique

Le résultat le plus ancien sur la capitulation est celui donné par D. Hilbert dans son traité sur les corps de nombres algébriques [1], à propos des extensions cycliques relatives de degré premier impair, et qu'il énonce comme suit :

Théorème (Théorème 94)**.** *Lorsque le corps cyclique relatif K de degré premier impair ℓ par rapport à k a sa différente relative égale à 1, il y a toujours dans k un idéal I qui n'est pas un idéal principal de k mais qui devient un idéal principal dans K. La ℓ-ième puissance de cet idéal I est alors aussi nécessairement un idéal principal dans k et le nombre des classes du corps k est divisible par ℓ.*

La démonstration de Hilbert repose sur le fait que, sous les hypothèses énoncées (absence de ramification, groupe de Galois cyclique, degré premier impair) , il existe une unité η de K, de norme relative $N_{K/k}(\eta) = 1$, qui n'est pas la puissance symbolique $\varepsilon^{\sigma-1}$ d'une autre unité, pour un σ non trivial de $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ (Théorème 92). Par le Théorème 90, une telle unité s'écrit $\eta = \alpha^{\sigma-1}$ pour un α de K, qui engendre ainsi un idéal ambige (i.e. invariant par G) de K,donc étendu de k puisque K/k est supposée non ramifiée (Théorème 93). Cet idéal ne pouvant être principal dans k (sans quoi on aurait $\alpha = \beta\varepsilon$, pour un β de k et une unité ε de K, donc $\eta = \alpha^{\sigma-1} = \varepsilon^{\sigma-1}$ contrairement à l'hypothèse), c'est l'idéal attendu I. Naturellement, il vient alors $I^\ell = N_{K/k}(I) = \big(N_{K/k}(\alpha)\big)$, ce qui montre que la classe de I est exactement d'ordre ℓ.

On voit clairement par là que, dans le résultat de Hilbert, le nœud de la preuve consiste à associer aux idéaux $\mathfrak{a}$ de k qui capitulent dans K les applications $f_{\mathfrak{a}} : \sigma \mapsto \alpha^{\sigma-1}$, où α est un générateur arbitraire de $\mathfrak{a}$ dans K. En termes modernes, $f_{\mathfrak{a}}$ est ce que nous appelons un 1-cocycle du groupe G à valeurs dans le groupe dans les unités E_K. Or, comme l'a remarqué Iwasawa [32], sous sa forme cohomologique la correspondance obtenue est parfaitement générale.

Il vient, en effet :

Proposition 1. *Étant donnée une extension galoisienne quelconque K/k de corps de nombres, le quotient P_K^G/P_k du groupe des idéaux principaux ambiges de K par le sous-groupe des idéaux principaux de k s'identifie au premier groupe de cohomologie $H^1(G, E_K)$ du groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ à valeurs dans le groupe des unités de K.*

En particulier, lorsque l'extension K/k est non ramifiée, les idéaux ambiges étant étendus, il suit canoniquement :

$$Cap_{K/k} \simeq H^1(G, E_K).$$

Preuve. Partons de la suite exacte courte qui définit le groupe P_K :

$$1 \longrightarrow E_K \longrightarrow K^\times \longrightarrow P_K \longrightarrow 1.$$

La suite exacte de cohomologie associée commence ainsi

$$1 \longrightarrow E_k \longrightarrow k^\times \longrightarrow P_K^G \longrightarrow H^1(G, E_K) \longrightarrow H^1(G, K^\times)$$

Et le théorème 90 de Hilbert généralisé nous dit que terme de droite $H^1(G, K^\times)$ est nul. II vient donc, comme attendu :

$$P_K^G/P_k \simeq H^1(G, E_K).$$

Cela étant, si l'extension K/k est non ramifiée, un calcul élémentaire (cf. eg. [31], p. 403) montre que les idéaux ambiges de K sont exactement les étendus à K des idéaux de k. Le groupe P_K^G est donc constitué des idéaux de k qui capitulent dans K, ce qui donne le résultat annoncé [1].

L'isomorphisme obtenu permet de ramener dans tous les cas l'étude de la capitulation à celle de la cohomologie des unités. Le malheur est que celle-ci est extrêmement mal connue, sauf, peut être lorsque le groupe G est cyclique, auquel cas la colomologie des unités est elle même cyclique et l'on a l'identité de Herbrand (cf. [31], p. 405) :

Proposition 2 (Quotient de Herbrand des unités)**.** *Dans une extension cyclique K/k de corps de nombres, le quotient des ordres des groupes de cohomologie galoisienne associés aux unités est donné par la formule :*

$$\frac{|H^0(G, E_K)|}{|H^1(G, E_K)|} = \frac{\prod_{\mathfrak{p}_\infty | \infty} d_{\mathfrak{p}_\infty}}{[K : k]}$$

1. Lorsque l'extension K/k se ramifie, l'identité $P_K^G = P_K \cap I_k$ est en défaut, et la capitulation $Cap_{K/k}$ apparaît alors comme noyau de l'application naturelle $H^1(G, E_K) \to I_K^G//I_k$ (cf. [37], Ch. III, §1).

où, pour chaque place archimédienne $\mathfrak{p}_\infty$ du corps k, l'entier $d_{\mathfrak{p}_\infty}$ désigne le degré de l'extension locale correspondante.

Dans la formule obtenue, l'ordre du numérateur $|H^0(G, R_K)| = \big(E_k : N_{K/k}(E_K)\big)$ n'est pas connu en général. Cependant, il vaut au moins 1, ce qui permet d'écrire sous les hypothèses de la proposition 1 :

$$|Cap_{K/k}| \geq \frac{[K:k]}{\prod_{\mathfrak{p}_\infty|\infty} d_{\mathfrak{p}_\infty}}$$

Interdisant alors aux places réelles de k de se complexifier dans K (condition qui est automatiquement remplie lorsque le degré $[K:k]$ est impair), nous obtenons le théorème :

Théorème 3 (Théorème 94 généralisé)**.** *Dans une extension cyclique non ramifiée de corps de nombres, où les places à l'infini sont complètement décomposées, l'ordre de la capitulation est un multiple du degré de l'extension.*

Tout groupe abélien étant produit direct de groupes cycliques, ce résultat suggère la *Conjecture principale* suivante :

Conjecture 4. *Dans une extension abéltenne non ramifiée de corps de nombres, où les places à l'infini sont complètement décomposées, l'ordre de la capitulation est un multiple du degré.*

Nous verrons plus loin, par des arguments tirés du corps de classes, que cette conjecture est vraie lorsque l'extension K/k considérée est maximale, i.e. lorsque K est le corps de classes de Hilbert de k. Contentons nous pour l'instant de noter qu'en vertu de l'identité déjà citée

$$N_{K/k} \circ j_{K/k} = [K/k],$$

la capitulation dans une extension (abélienne) de degré n n'intéresse que les classes d'ordre divisant n ; en particulier la restriction de l'homomorphisme d'extension $j_{K/k}$ au sous-groupe de Cl_k formé des classes d'ordre étranger à n est injective. Si donc nous écrivons $G = \prod G_p$ la décomposition du groupe $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ comme produit direct de ses sous-groupes de Sylow, et que nous convenons de désigner, pour chaque premier p divisant n, par $K^{(p)}$ la p-sous-extension maximale de K, la p-partie $Cap^{(p)}_{K/k}$ du groupe $Cap_{K/k}$ n'est autre que le sous-groupe $Cap_{K^{(p)}/k}$ qui mesure la capitulation dans la p-extension $K^{(p)}/k$ de groupe $\mathrm{Gal}(K^{(p)}/k) \simeq G_p$.

Il suit de là que la conjecture précédente se lit dans les p-extensions. Cela étant, nous avons :

Proposition 5. *Soit K/k une extension abélienne non ramifiée et ∞-décomposée dont le groupe de Galois G est le produit d'un groupe cyclique par un groupe cyclique élémentaire. Alors l'ordre de la capitulation $Cap_{K/k}$ est un multiple du degré $[K:k]$ de l'extension .*

Preuve (d'après Adachi [28]). D'après ce qui précède, il suffit d'établir la proposition lorsque K/k est une p-extension, c'est-à-dire lorsque le groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ est le produit d'un p-groupe cyclique par un p-groupe cyclique élémentaire H. Dans ce cas, la suite exacte longue de HochschiId-Serre, appliquée au groupe des unités de K, commence ainsi (avec $L = K^H$) :

$$1 \longrightarrow H^1(G/H, E_L) \longrightarrow H^1(G, E_K) \longrightarrow H^1(G, E_K)^H \longrightarrow H^2(G/H, E_L)$$

II vient donc :

$$|Cap_{K/k}| = |H^1 G, E_K)| \geq |H^1 G/H, E_L)|.|H^1(G, E_K)^H|$$

Cela étant, le premier groupe $H^1(G/H, E_L)$ est d'ordre au moins $[L:k]$, d'après le Théorème 3 ; et le second $H^1(G, E_K)^H$ est au moins d'ordre $p = [K:L]$, puisque c'est le sous-groupe des points fixes d'un p-groupe non trivial. Il suit ainsi :

$$|Cap_{K/k}| \geq [K:L][L:k] = [K:k], \text{ comme annoncé.}$$

En dehors cependant de ce cas particulier, force est de constater que les minorations arithmétiques de la capitulation n'ont guère conduit jusqu'ici à des résultats significatifs, eu égard à l'inégalité espérée en toute généralité. En revanche, comme nous allons le voir, il est possible dans certaines situations spécifiques, d'améliorer la Conjecture 4.

1.2 Le Spiegelungssatz de Leopoldt comme résultat de capitulation

Revenons sur l'isomorphisme donné par la proposition 1 :

$$Cap_{K/k} \simeq H^1(G, E_K).$$

Faute de connaître la cohomologie des unités en toute généralité, il est tentant de regarder ce qui se passe lorsque le groupe E_K se réduit à son sous-groupe de torsion μ_K, ou, moins restrictivement, lorsque E_K contient μ_K comme facteur direct, en un certain sens de façon canonique. C'est précisément ce qui se produit lorsque le corps K possède une conjugaison complexe naturelle, c'est-à-dire lorsque K est une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps de nombres totalement réel K_+.

Introduisons pour simplifier le complété profini $\hat{\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Z}$ pour la topologie définie par ses sous-groupes d'indice impair :

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n \text{ impair}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

(de sorte que $\hat{\mathbb{Z}}$ s'identifie canoniquement au produit $\prod_{p \text{ impair}} \mathbb{Z}_p$ des complétés p-adiques de $\mathbb{Z}$ pour tous les nombres premiers impairs).

Si $\Delta = \{1, \tau\}$ désigne le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/K_+)$, le nombre 2 étant inversible dans $\hat{\mathbb{Z}}$, l'algèbre de Galois $\mathbb{Z}[\Delta]$ se décompose comme produit direct de deux exemplaires de $\hat{\mathbb{Z}}$ à l'aide des idempotents orthogonaux

$$e_+ = \frac{1}{2}(1+\tau) \qquad \& \qquad e_- = \frac{1}{2}(1-\tau)$$

Plus généralement, tout $\hat{\mathbb{Z}}[\Delta]$-module M s'écrit comme somme directe de sa composante *réelle* $M^+ = e_+M$ et de sa composante *imaginaire* $M^- = e_-M$. Par exemple, le sous-groupe $\hat{Cl}_K$ de Cl_K formé des classes d'ordre impair s'écrit canoniquement :

$$\hat{Cl}_K = \hat{Cl}_K^+ \oplus \hat{Cl}_K^-$$

et le premier facteur $\hat{Cl}_K^+$ n'est autre que le sous-groupe $\hat{Cl}_{K_+}$ des classes d'ordre impair du groupe des classes d'idéaux du sous-corps réel maximal K_+. de K.

Supposons maintenant que le groupe G commute à la conjugaison complexe τ, autrement dit que K comme k admettent une conjugaison complexe naturelle, et que l'extension K/k provienne d'une extension galoisienne de même degré K_+/k_+ pour leurs sous-corps réels maximaux. Tensorisant par $\hat{\mathbb{Z}}$ les suites exactes utilisées dans la démonstration de la proposition 1, nous obtenons directement l'isomorphisme de $\hat{\mathbb{Z}}[\Delta]$-modules :

$$\hat{Cap}_{K/k} \simeq H^1(G, \hat{E}_K)$$

où $\hat{Cap}_{K/k}$ désigne le sous-groupe de Cl_K formé des classes d'ordre impair qui capitulent dans K, et $\hat{E}_K = \hat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} E_K \simeq \varprojlim_{n \text{ impair}} E_K/E_K^n$ est le complété profini de E_K pour la topologie des sous-groupes d'indice impair.

Par action de l'idempotent e_-, nous en déduisons immédiatement l'isomorphisme entre composantes imaginaires :

$$\hat{Cap}_{K/k}^- \simeq H^1(G, \hat{E}_K)^- \simeq H^1(G, \hat{\mu}_K)$$

puisque la composante imaginaire du groupe $\hat{E}_K$, qui est $\hat{\mathbb{Z}}$-engendrée par les classes dans $\hat{E}_K$ des unités de K dont tous les conjugués sont de module 1, se réduit au sous-groupes μ_K des racines d'ordre impair de l'unité dans K.

Nous avons même mieux : La démonstration de la proposition 1 utilisait l'hypothèse de non-ramification pour établir l'égalité $Cap_{K/k} \simeq P_K^G/P_k$. Ici, où seules nous intéressent en fin de compte les composantes imaginaires des groupes considérés, il nous suffit que cette égalité ait lieu pour les composantes imaginaires des sous-groupes d'ordre impair, c'est-à-dire en l'occurrence que les idéaux ramifiés dans K/k ne se décomposent pas dans K/K_+ . Nous pouvons donc énoncer :

Théorème 6. *Soit K/k une extension galoisienne de corps à conjugaison complexe (autrement dit, soit K_+/k_+ une extension galoisienne de corps totalement réels, puis k une extension quadratique totalement imaginaire de k_+ et K_+ l'extension posée K_+k). Si les places ramifiées dans K/k ne sont pas décomposées par la conjugaison complexe (en particulier, si l'extension K/k est non ramifiée), la composante imaginaire du plus grand sous-groupe d'ordre impair de la capitulation $\hat{Cap}_{K/k}$ est donnée par l'isomorphisme*

$$\hat{Cap}^-_{K/k} \simeq H^1(\mathrm{Gal}(K/k), \hat{\mu}_K),$$

où $\hat{\mu}_K$ est le groupe des racines d'ordre impair de l'unité dans K.

Corollaire 7. *Conservons les hypothèses du théorème 6 et sons en outre $\hat{\mu}_K = \hat{\mu}_k$ (i.e. que les racines d'ordre impair de l'unité dans K sont déjà dans k) . Il vient alors :*

$$\hat{Cap}^-_{K/k} \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(K/k), \hat{\mu}_K),$$

et la composante imaginaire du plus grand sous-groupe d' ordre impair de la capitulation s' identifie ainsi au radical kummérien de la sous-extension ahélienne maximale d' exposant $n = |\hat{\mu}_k|$ de K/k.

Dans ce dernier cas, l'ordre de la composante imaginaire de la capitulation coïncide avec le degré de l'extension chaque fois que le groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ est abélien et d'exposant n. En particulier l'ordre de la capitulation totale (réelle et imaginaire) est alors strictement supérieur au degré de l'extension. En effet, le théorème 3 appliqué à l'une quelconque des sous-extensions cycliques de K_+/k_+ montre que la composante réelle de la capitulation n'est jamais triviale.

On voit donc clairement sur cet exemple combien il peut être difficile de fixer en général une borne supérieure à l'ordre de la capitulation dans une extension quelconque (autre que celle résultant de l'inclusion triviale $Cap_{K/k} \subset {}_{[K:k]}Cl_k$.

Le corollaire 7 ci-dessus peut être regardé comme une généralisation du très classique Spiegelungssatz de Leopoldt (cf. [33]). Fixons, en effet, un nombre premier impair ℓ, et considérons un corps totalement réel $k_\circ$; notons $k = k_\circ[\zeta]$ l'extension cyclotomique engendrée sur $k_\circ$ par les racines ℓ-ièmes de l'unité, puis $k_+ = k_\circ[\zeta + \zeta^{-1}]$ le sous-corps réel maximal de k. Écrivons ℓ^d (avec $d \geq 1$) l'ordre du ℓ-groupe des racines de l'unité dans k, puis, pour tout $m = 1, \ldots, d$, introduisons la ℓ-extension abélienne non-ramifiée d'exposant ℓ^m maximale $K_+^{(m)}$ de k_+. Par la théorie du corps de classes, le groupe de Galois $G^{(m)} = \mathrm{Gal}(K_+^{(m)}/k_+)$ s'identifie au quotient d'exposant ℓ^m du groupe des classes d'idéaux du corps totalement réel k_+.

$$G^{(m)} \simeq {}^{\ell^m}Cl_{k_+} = Cl_{k_+}/Cl_{k_+}^{\ell^m}$$

i.e. à la composante réelle du quotient d'exposant ℓ^m du groupe des classes du corps à conjugaison complexe k :

$$G^{(m)} \simeq {}^{\ell^m}Cl_k^+.$$

Maintenant, si $K^{(m)}$ désigne le corps composé $K_+^{(m)}k$, l'extension $K^{(m)}/k$ vérifie les hypothèses du corollaire 7 pour le nombre premier ℓ (en ce sens que les ℓ-sous-groupes de Sylow des groupesμ_K et $\mu_{K^{(m)}}$ coïncident), de sorte que nous obtenons :

$$Cap^-K^{(m)}/k \simeq \mathrm{Hom}(G^{(m)}, \hat{\mu}_k) \simeq \mathrm{Hom}({}^{\ell^m}Cl_k^+, {}_{\ell^m}\,\mu_k).$$

Et les classes qui capitulent sont au plus d'ordre ℓ^m. De l'inclusion évidente $Cap^-K^{(m)}/k \subset {}_{\ell^m}\mathcal{C}\ell_k^-$, nous déduisons donc finalement l'homomorphisme injectif :

$$\mathrm{Hom}({}^{\ell^m}Cl_k^+,\ {}_{\ell^m}\mu_k) \hookrightarrow {}_{\ell^m}\mathcal{C}\ell_k^-$$

qui nous montre que, pour $m = 1, \ldots, d$, le ℓ^m-rang de la composante réelle du ℓ-groupe des classes d'idéaux du corps k est inférieur au ℓ^m-rang de la composante imaginaire ; ce qui est une extension classique du résultat de Leopoldt (cf. C34], Ch. I).

2 L'approche algébrique

2.1 Le théorème d'Artin-Furwängler

La Conjecture 4 postule que dans une extension abélienne non ramifiée et non-décomposée K/k de corps de nombres, l'ordre de la capitulation $Cap_{K/k}$ est un multiple du degré $[K : k]$ de l'extension. Cela doit être le cas en particulier lorsque l'extension K/k est maximale sous les conditions énoncées, c'est-à-dire lorsque K est le corps des classes de Hilbert H_k de k. La Théorie du corps de classes nous dit alors que le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/k)$ s'identifie au groupe des classes d'idéaux Cl_k de k. Dans ces conditions, le degré de l'extension est exactement l'ordre de Cl_k et la conjecture 4 affirme simplement que tous les idéaux de k capitulent dans K. C'est le résultat d'Artin-Furtwängler (cf. [10, 11]), qui est connu sous le nom de *Théorème de l'idéal principal* :

Théorème 8 (Théorème de l'idéal principal)**.** *Les idéaux d'un corps de nombres deviennent principaux dans son corps des classes de Hilbert (i.e. dans l'extension abélienne non-ramifiée ∞-décomposée maximale de ce corps).*

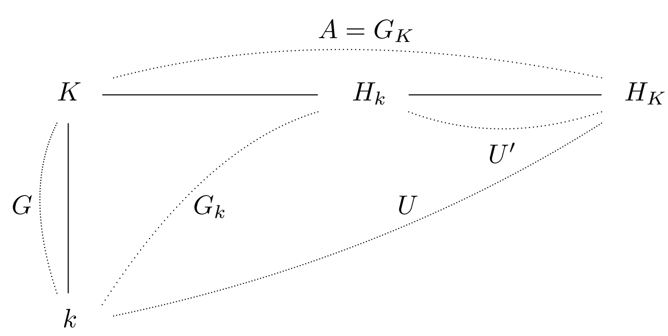
La section 2 de la bibliographie est consacrée précisément à ce résultat et à ses extensions les plus immédiates. Les démonstrations "historiques" ont été dans leur presque totalité publiées dans les années trente aux annales de Hambourg. Des exposés plus modernes se trouvent dans les livres de Neukirch [19] (qui reprend une argumentation de Witt) et d'Artin-Tate [18] (que nous suivrons ici, et qui utilisent un soupçon de cohomologie). Dans tous les cas, la preuve du théorème de l'idéal principal repose sur un argument purement algébrique que nous allons maintenant exposer :

Étant donnée une extension K/k de corps de nombres, la Théorie du corps de classes identifie le groupe Cl_k au groupe de Galois $G_k = \mathrm{Gal}(H_k/k)$ de l'extension abélienne non ramifiée ∞-décomposée maximale de k, et le groupe Cl_K au groupe de Galois $G_K = \mathrm{Gal}(H_K/K)$ de l'extension correspondante de K, Cela étant, dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\ell_K \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, shift left, "N_{L/K}"] & G_K \arrow[d, shift left, "\mathrm{res}_{K/k}"] \\
\mathcal{C}\ell_k \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, shift left, "j_{L/K}"] & G_k \arrow[u, shift left, "\mathrm{Ver}_{K/k}"]
\end{tikzcd}$$

la norme arithmétique $N_{K/k}$ correspond à la restriction $\mathrm{res}_{K/k}$ des automorphismes de Galois, et l'homomorphisme d'extension $J_{K/k}$ au transfert $\mathrm{Ver}_{K/k}$ (Verlagerung).

Si maintenant K est contenu dans H_k, nous pouvons résumer la situation par le diagramme :



Et, du point de vue purement algébrique, le problème de la capitulation se pose comme suit : étant donnés un groupe U (en l'occurrence $U = \mathrm{Gal}(H_k/k)$) et un sous-groupe abélien A contenant le sous- groupe dérivé U' (en l'occurrence $A = \mathrm{Gal}(H_K/K)$), déterminer le noyau du transfert :

$$\mathrm{Ver}_{U/A} : U/U' \to A.$$

Le Théorème de l'idéal principal résulte de la constatation, purement algébrique, que $\mathrm{Ver}_{U/A}$ est nul lorsque A coïncide avec U'.

Pour établir ce point, remarquons d'abord que le groupe U se présente comme extension de son sous-groupe normal abélien A par le quotient abélien $G = U/A$:

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow U \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

À isomorphisme près, la loi de groupe sur U est donc déterminée par la donnée des lois de groupe de A et de G, de l'action de G sur A (via les automorphismes intérieurs de U) et de la classe dans le groupe de cohomologie $H^2(G, A)$ du système de facteurs

$$a_{\sigma,\tau} = u_\sigma u_\tau u_{\sigma\tau}^{-1}$$

associé au choix d'un système de représentants dans U des classes du quotient $G = U/A$. Avec ces notations, le groupe U peut être décrit comme l'ensemble des symboles $a.u_\sigma$ (avec $a \in A$ et $\sigma \in G$) équipé de la loi de groupe :

$$(a.u_\sigma)\,(b.u_\sigma) = ab^\sigma.\, a_{\sigma,\tau} u_{\sigma\tau}.$$

Cela étant, le transfert $\mathrm{Ver}_{U/A}$ de U/U' vers A est défini par la formule (cf. [18], Ch. XIII, §2) :

$$\mathrm{Ver}_{U/A}(a.u_\sigma U') = \prod_{\sigma\in G} \big(u_\sigma (a.u_\tau) u_{\sigma\tau}^{-1}\big) = \prod_{\sigma\in G} a^\sigma a_{\sigma,\tau}$$

ce que nous pouvons encore écrire :

$$\mathrm{Ver}_{U/A}(a.u_\sigma U') = N(a) \prod_{\sigma\in G} a_{\sigma,\tau}$$

en notant $N(a) = \prod_{\sigma\in G} a^\sigma$ le produit des conjugués de a.

Pour réinterpréter le transfert en termes d'algèbre linéaire, introduisons le module résolvant

$$B = A \oplus I_G = A \oplus \big(\underset{\tau\neq 1}{\oplus} \mathbb{Z}\,(\tau - 1)\big)$$

somme directe du groupe abélien A, regardé comme $\mathbb{Z}$-module et noté additivement, et de l'idéal d'augmentation I_G de l'algèbre $\mathbb{Z}[G]$; et munissons le de l'action de G définie par :

$$\sigma * a = a^\sigma \qquad \& \qquad \sigma * (\tau - 1) = a_{\sigma,\tau} + \sigma(\tau - 1).$$

Un calcul élémentaire montre alors que l'application log : $a.u_\tau U' \mapsto a + (\tau - 1) + I_G * B$ est un isomorphisme du groupe U abélianisé sur le quotient $B/I_G * B$:

$$U/U' \simeq B/IG * B.$$

Cela étant, nous avons :

Lemme A. *Dans l'isomorphisme précédent, le transfert $Ver_{U/A}$ correspond à l'application trace :* $\mathrm{Tr}_{B/A} = \sum_{\sigma\in G} \sigma$.

Preuve. Il s'agit de vérifier la commutativité du diagramme (où les notations sont multiplicatives à gauche et additives à droite) :

$$\begin{tikzcd} U/U' \arrow[r, "\log"] \arrow[d, "\mathrm{Ver}_{U/A}"'] & B/I_G * B \arrow[d, "\mathrm{Tr}_{B/A}"] \\ A \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd}$$

Or, nous avons directement, en notations multiplicatives dans U :

$$\mathrm{Ver}_{U/A}(a.u_\sigma U') = \prod_{\sigma\in G} a^\sigma \prod_{\sigma\in G} a_{\sigma,\tau}$$

c'est-à-dire, en notations additives dans B :

$$\mathrm{Ver}_{U/A}(a.u_\sigma U') = \sum_{\sigma\in G} a^\sigma \ + \ \sum_{\sigma\in G} a_{\sigma,\tau} = \sum_{\sigma\in G} \sigma * a + \sum_{\sigma\in G} \sigma * (\tau - 1) \ - \ \big(\sum_{\sigma\in G} \sigma\big) * (\tau - 1)$$

et finalement :

$$\mathrm{Ver}_{U/A}(a.u_\sigma U') = \big(\sum_{\sigma\in G} \sigma\big) * \big(a + (\tau-1)\big) = \mathrm{Tr}_{B/A}\big(a + (\tau - 1)\big),$$

comme attendu.

Et le théorème d'Artin-Furtwängler résulte alors de l'identité $(A : U')\,\mathrm{Tr}_{B/A}(B) = 0$, qui montre que la trace est nulle sur B pour $A = U'$ et que nous allons maintenant établir :

Lemme B. *Avec les notations précédentes, on a :* $(A : U')\,\mathrm{Tr}_{B/A}(B) = 0$.

Preuve. Partons de la définition du module résolvant :

$$B = A \oplus I_G$$

L'isomorphisme $B/I_G * B \simeq U/U'$ montre que le sous-module de torsion $A \cap I_G * B$ de $I_G * B$ est égal à U', ce qui permet d'écrire (pour la structure de Z-module) :

$$I_G * B = U' \oplus I_G^2.$$

En particulier, il vient :

$$I_G/I_G^2 \simeq B/(A + I_G * B) \simeq U/A = G.$$

Décomposons donc le groupe G comme produit direct de sous-groupes cycliques G_i (avec, disons, $i = 1, \dots, s$) d'ordres respectifs e_i ; et faisons choix pour chaque indice i d'un générateur τ_i dans G_i. L'élément τ_i est ainsi d'ordre e_i dans G, et il en est donc de même de l'élément $b_i = \tau_i - 1$ dans B/I_G*B. Complétons maintenant les b_i déjà obtenus en choisissant des générateurs $b_{s+1}, \dots, b_m$ du groupe A d'ordres respectifs e_i modulo U' de telle sorte que nous ayons :

$$\textstyle\prod_{i=s+1}^m e_i = (A : U') \text{ et, bien entendu : } \prod_{i=1}^s e_i = (B : A + I_G * B) = (U : A).$$

Par construction, nous avons donc $e_i b_i \in I_G * B, \quad \forall i = 1, \dots, m$; ce que nous pouvons écrire :

$$e_i b_i = \sum_{j=1}^m \theta_{ij} * b_j$$

pour des θ_{ij} convenables dans I_G, puisque les b_i dans leur ensemble forment un système générateur du $\mathbb{Z}[G]$-module B. Introduisons alors la matrice M de terme générique :

$$m_{ij} = e_i\delta_{ij} \text{ (où } \delta_{ij} \text{ est le symbole de Kronecker).}$$

Nous pouvons réécrire l'identité précédente sous la forme : $\sum_{j=1}^m m_{ij} * b_j = 0$; ce qui, par multiplication à gauche par la transcomatrice $\widetilde{M}$ de M, nous donne :

$$\det M * b_j = 0 \text{ pour } j = 1, \dots, m, \text{ c'est-à-dire, finalement :}$$

$$\det M * B = 0.$$

Reste à évaluer l'élément $d = \det M$ de l'algèbre $\mathbb{Z}[G]$. L'isomorphisme $B/A \simeq I_G$ montre que les seuls éléments d de $\mathbb{Z}[G]$ qui vérifient $d * B \subset A$ sont les multiples de la trace $\mathrm{Tr}_{B/A} = \sum_{\sigma\in G} \sigma$. Tout le problème est donc d'estimer le degré de d. Mais celui-ci est, tout simplement, le déterminant de la matrice en les degrés des m_{ij}. Et l'identité $\deg m_{ij} = \delta_{ij} e_i$ donne donc directement :

$$\deg d = \prod_{i=1}^m e_i = \prod_{i=1}^s e_i \prod_{i=s+1}^m e_i = (U : A)(A : U') = (A : U')\deg \mathrm{Tr}_{B/A}\,.$$

Il vient donc : $d = (A : U')\,\mathrm{Tr}_{B/A}$; ce qui achève la démonstration du Théorème 8.

2.2 Le théorème de Tannaka-Terada

Le théorème de Tannaka-Terada est une généralisation de celui d'Artin-Furtwängler qui fait intervenir la théorie des genres, mais repose comme celui-ci sur un résultat purement algébrique de théorie des groupes. Il a été pressenti par Tannaka qui l'a établi d'abord dans un certain nombre de cas particuliers avant que Terada n'en donne finalement une preuve générale quoique extraordinairement technique (cf. [20, 21, 22, 23, 24]). Nous nous inspirons ici de la démonstration extrêmement astucieuse mise au point plus tard en collaboration avec Adachi (cf. [28]) pour établir directement une version sensiblement plus forte du résultat algébrique qui sous-tend le théorème arithmétique, et que Miyake a récemment déduite du résultat classique de Terada (cf. [30]).

Commençons par énoncer le résultat historique de Tannaka-Terada :

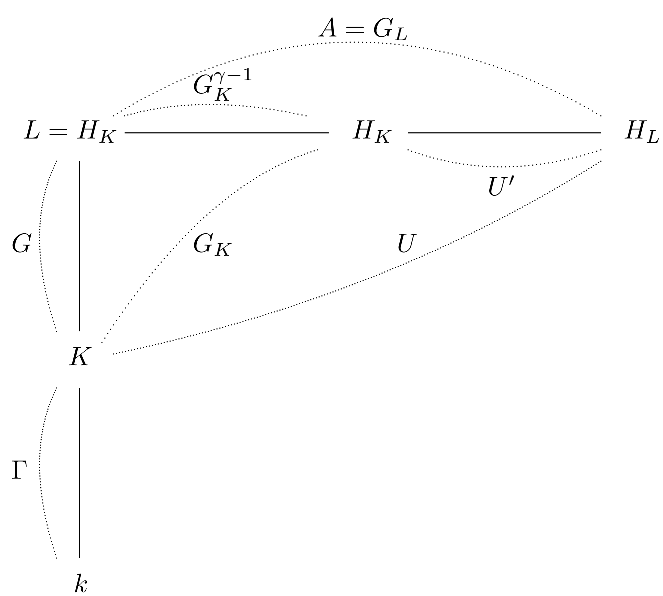
Théorème 9. *Pour toute sous-extension cyclique K du corps des classes de Hilbert H_k d'un corps de nombres k, les classes d'idéaux du corps K qui sont ambiges pour l'action de* $\mathrm{Gal}(K/k)$ *capitulent dans H_k.*

Bien entendu, prenant $K = k$, on retrouve le théorème d'Artin-Furtwängler.

Interprétation algébrique. Notons $L = H_k$ le corps de classes de Hilbert de k, puis H_K celui de K, et H_L celui de L. Écrivons Γ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/k)$, et faisons choix d'un générateur γ de Γ, ou plutôt d'un relèvement de ce générateur dans $\mathrm{Gal}(H_L/k)$. La théorie des genres (cf. [37], Ch. III, §2) nous enseigne que, puisque l'extension K/k est cyclique, la sous-extension maximale $L = H_k$ de H_K qui est abélienne sur k (autrement dit le corps des genres de H_K relativement à K/k) est caractérisée comme extension de K par l'identité :

$$\mathrm{Gal}(L/K) = G_K/G_K^{\gamma-1}$$

où $G_K/G_K^{\gamma-1}$ est le plus grand quotient de $G_K = \mathrm{Gal}(H_K/K)$ sur lequel Γ opère trivialement. La situation peut donc se résumer par le diagramme, avec $A/U' = G_K^{\gamma-1} = (U/U')^{\gamma-1}$:



Et, du point de vue algébrique, le problème de la capitulation se pose comme suit : étant donnés un groupe U (en l'occurrence $U = \mathrm{Gal}(H_K/K)$), un sous-groupe normal abélien A contenant le sous-groupe dérivé U' (en l'occurrence $A = \mathrm{Gal}(H_L/L)$), et un automorphisme γ de U (en l'occurrence, l'automorphisme intérieur associé à un relèvement dans U d'un générateur du groupe cyclique $\Gamma = \mathrm{Gal}(K/k)$), il s'agit de montrer que le noyau du transfert contient le sous- groupe $(U/U')^\Gamma$ des points fixes de Γ, sous la condition

$$A/U' = (U/U')^{\gamma-1}, \text{ i.e. } A = U^{\gamma-1}U'.$$

Nous allons voir que ce résultat vaut lors même que γ n' est pas un automorphisme du groupe U :

Théorème 10. *Soit A un sous-groupe normal abélien d'un groupe U, contenant le sous-groupe dérivé U'. S' il existe un endomorphisme $\gamma \in \operatorname{End} U$ tel qu'on ait :*

$$A = U^{\gamma-1}U',$$

alors le transfert $\operatorname{Ver}_{U/A} : U/U' \to A$ est nul sur le sous-groupe $(U/U')^{\langle\gamma\rangle}$ des points fixes de γ dans U/U'.

Reformulation en termes d'algèbre linéaire. Reprenons la description du groupe U comme extension du sous-groupe abélien A par le quotient abélien $G = U/A$. Le sous-groupe dérivé U' étant évidemment stable pour l'action de γ, l'hypothèse$A = U^{\gamma-1}U'$ montre que l'endomorphisme γ agit trivialement sur le quotient $U/A = G$, de sorte que nous pouvons décrire l'opération de γ sur U en écrivant :

$$u_\tau^\gamma = a_\tau . u_\tau \text{ pour tout } \tau \text{ de } G,$$

avec a_τ convenable dans A ; ce qui nous permet de transporter cette action au module résolvant $B = A \oplus I_G$ introduit plus haut, en posant

$$\gamma * (\tau - 1) = a_\tau + (\tau - 1).$$

Notons, pour simplifier $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}}$ le groupe cyclique engendré par γ, et $\delta = \gamma - 1$. Cela étant, d'après l'isomorphisme $U/U' \simeq B/I_G * B$, l'identité $(U/U')^\delta = A/U'$ s'écrit dans B :

$$A + I_G * B = \delta * B + I_G^B.$$

Et tout le problème est de vérifier que l'application trace $\operatorname{Tr}_{B/A} = \sum_{\sigma\in G}\sigma$ de $B/I_G * B$ dans A s'annule sur le sous-module $(B/I_G * B)^\Gamma$ des points fixes par Γ, autrement dit que l'on a :

$$\delta b \in I_G * B \Rightarrow \operatorname{Tr}_{B/A}(b) = 0,$$

conformément au diagramme commutatif (où les notations sont multiplicatives à gauche et additives à droite) :

$$\begin{tikzcd} (U/U')^\Gamma \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\operatorname{Ver}_{U/A}"'] & (B/I_G * B)^\Gamma \arrow[d, "\operatorname{Tr}_{B/A}"] \\ A \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd}$$

Réduction à une identité algébrique. Les hypothèses faites impliquent que le groupe U est nilpotent puisque son sous-groupe dérivé est abélien. En particulier il est produit direct de ses sous- groupes de Sylow et ce n'est donc pas restreindre la généralité que de supposer que tous les groupes considérés sont des p-groupes. Cela étant, nous avons construit dans la section précédente un système de générateurs $b_1, \dots, b_m$ du $\mathbb{Z}[G]$-module B, tels que les s premiers $b_1, \dots, b_s$ forment une pseudo-base du quotient $B/(A + I_G * B) \simeq I_G/I_G^2$, en en ce sens que leurs ordres respectifs $e_1, \dots, e_s$ modulo $A + I_G * B$ vérifient la formule :

$$\textstyle\prod_{i=1}^s e_i = \big(B : (A + I_G * B)\big) = (U : A :)$$

Si Γ est lui-même un p-groupe, l'hypothèse $A + I_G * B = \delta * B + I_G^B$ nous assure ici que $b_1, \dots, b_s$ engendrent B comme $\mathbb{Z}[G\times\Gamma]$-module. Sinon, quitte à compléter les b_i déjà obtenus par des éléments de A, nous pouvons toujours nous ramener à ce cas sans modifier le produit des e_i. En particulier l'identité $e_i b_i \in A + I_G * B$ peut donc s'écrire pour chaque $i = 1, \dots, s$:

$$e_i b_i = \textstyle\sum_{j=1}^s \theta_{ij} * b_j + \delta * \sum_{j=1}^s \lambda_{ij} * b_j \text{ avec } \theta_{ij} \in I_G \text{ et } \lambda_{ij} \in \mathbb{Z}[G \times \Gamma].$$

Posons, comme précédemment,

$$m_{ij} = e_i\delta_{ij} - \theta_{ij} \text{ (où } \delta_{ij} \text{ est le symbole de Kronecker).}$$

Notons enfin M la matrice $[m_{ij}]$ et Λ la matrice $[\lambda_{ij}]$. Nous obtenons :

Lemme C. *L'opérateur $\Delta = \det(M-\delta\Lambda) = \mathrm{Tr}_{B/A} - \delta D$ annule le module B. En particulier, comme opérateur sur B, l'application trace se factorise par δ ; ce que nous écrivons :*

$$\mathrm{Tr}_{B/A} = \delta D.$$

Preuve. Nous avons par construction :

$$\textstyle\sum_{j=1}^{s}(m_{ij}-\delta\lambda_{ij})b_j = 0 \text{ pour } i=1,\ldots,s\,; \text{ autrement dit : } (M-\delta\Lambda)*\mathbf{b},$$

où $\mathbf{b}$ désigne le vecteur colonne formé des b_i pour $i=1,\ldots,s$. Multipliant à gauche cette identité par la transcomatrice de $M-\delta\Lambda$, nous obtenons, comme annoncé :

$$\Delta * b_i = 0 \text{ pour } i=1,\ldots,s, \text{ c'est-à-dire, en fin de compte : } \Delta * B = 0,$$

puisque les b_i engendrent B. Maintenant, le développement de Δ suivant les puissances de δ est de la forme :

$$\delta = \det M - \delta D$$

avec $D = \sum_{j=1}^{s}\det(M_1,\ldots,M_{j-1},\Lambda_j,\ldots,M_{j+1},\ldots,M_s-\delta\Lambda_s)$, si $M_1,\ldots,M_s$ d'une part et $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_s$ d'autre part désignent les vecteurs colonnes respectifs de M et de A.

Et tout revient à vérifier que $\det M$ est l'opérateur trace $\mathrm{Tr}_{B/A} = \sum_{\sigma\in G}\sigma$. Or, cela est clair puisque l'identité$(M-\delta\Lambda)*\mathbf{b}$ lue modulo A s'écrit dans $I_G \simeq B/A$:

$$M*\mathbf{b} = 0 \text{ (puisque les } \delta * b_i \text{ sont dans } A),$$

ce qui donne (après multiplication par la transcomatrice de M) :

$$\det M * \mathbf{b} = 0, \text{ i.e. } \det M * B \subset A$$

Par un argument déjà utilisé, $\det M$ qui est dans $\mathbb{Z}[G]$ et annule $B/A = I_G$ est donc un multiple de la trace ; et il est égal à la trace puisque nous avons trivialement :

$$\deg(\det M) = \det[\deg m_{ij}] = \textstyle\prod_{i=1}^{s} e_i = \big(B:(A+I_G*B)\big) = (U:A) = \deg \mathrm{Tr}_{B/A}.$$

En conclusion, pour établir que la trace est nulle sur le sous-groupe $(B/I_G*B)^{\Gamma}$ deB/I_G*B ou, si l'on préfère, sur le sous-module ${}^{\delta^{-1}}(I_G*B)$ de B, il convient de montrer que l'opérateur D est nul sur le sous-module $\delta\big({}^{\delta^{-1}}(I_G*B)\big) = (I_G*B)\cap A = U'$. Mais comme le sous-groupe dérivé U' est engendré par les commutateurs $[a,u_\tau] = a^{\tau-1}$, qui sont dans I_G*A, et ceux construits sur les représentants $[u_\sigma,u_\tau] = u_\sigma u_\tau u_\sigma^{-1}u_\tau^{-1} = a_{\sigma,\tau} - a_{\tau,\sigma}$, que l'on peut engendrer sur $\mathbb{Z}[G]$ à partir des éléments $[b_h,b_k] = b_h * b_k - b_k * b_h$, tout le problème se ramène à vérifier l'identité :

$$Db_h * b_k = Db_k * b_h$$

Lorsque celle-ci a lieu, l'hypothèse de départ $A = \delta * B + U'$ nous donne, en effet, immédiatement :

$$D*U' = DI_G * A = DI_G(\delta * B + U') = \mathrm{Tr}_{B/A}(I_G*B) + I_G D * U' = I_G*(D*U')\,;$$

donc $D*U' = 0$, de sorte que le Théorème 10 résulte finalement du lemme :

Lemme D. *Avec les notations précédentes il vient : $Db_k * b_h = Db_h * b_k$, pour $h \neq k$.*

Preuve. Partons de l'identité $\sum_{j=1}^{s}(m_{ij}-\delta\lambda_{ij})b_j = 0$ pour $i=1,\ldots,s$ dans B ; et regardons la modulo A. Nous obtenons l'identité :

$$\textstyle\sum_{j=1}^{s} m_{ij}.b_j = 0 \text{ pour } i=1,\ldots,s \text{ dans } I_G = B/A.$$

Cela étant, par un calcul purement formel dans l'algèbre des polynômes $I_G[\delta]$ en l'indéterminée δ, nous avons, en introduisant les vecteurs colonnes :

$$\delta Db_k = \mathrm{Tr}_{B/A}(b_k) - \Delta b_k = -\det(M-\delta\Lambda)b_k = -\det(M_1-\delta\Lambda_1,\ldots,(M_k-\delta\Lambda_k b_k,\ldots,M_s-\delta\Lambda_s),$$

c'est-à-dire :

$$\delta Db_k = -\det(M_1-\delta\Lambda_1,\ldots,\textstyle\sum_{j=1}^{s} M_j b_j - \delta, \sum_{j=1}^{s}\Lambda_j b_j,\ldots,M_s-\delta\Lambda_s),$$

avec $\sum_{j=1}^{s} M_j b_j = 0$, comme indiqué ci-dessus, d'où :

$$\delta Db_k = \det(M_1-\delta\Lambda_1,\ldots,\delta,\textstyle\sum_{j=1}^{s}\Lambda_j b_j,\ldots,M_s-\delta\Lambda_s),$$

et finalement :

$$Db_k = D_k \text{ avec } D_k = \det(M_1-\delta\Lambda_1,\ldots,\delta,\textstyle\sum_{j=1}^{s}\Lambda_j b_j,\ldots,M_s-\delta\Lambda_s).$$

Considérons donc la matrice $N_k = [M_1-\delta\Lambda_1,\ldots,\delta,\sum_{j=1}^{s}\Lambda_j b_j,\ldots,M_s-\delta\Lambda_s]$ de déterminant D_k et notons $\widetilde{N}_k$ sa transcomatrice.

L'identité de départ, $\sum_{j=1}^{s}(m_{ij} - \delta\lambda_{ij})b_j = 0$ pour $i = 1, \ldots, s$, s'écrit encore :

$$N_k * \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix} = -(M_k - \delta\Lambda_k)b_k \ ;$$

ce qui, après multiplication à gauche par la transcomatrice $\widetilde{N}_k$ de N_k, donne :

$$\begin{bmatrix} D_k * b_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ D_k * b_s \end{bmatrix} = \widetilde{N}_k N_k * \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix} = -\widetilde{N}_k(M_k - \delta\Lambda_k) * b_k.$$

Ainsi, pour $h \neq k$, le terme $D_k * b_h$ est obtenu en multipliant la h-ième ligne de l'opposé de la matrice $\widetilde{N}_k$ par la matrice $M_k - \delta\Lambda_k$, et en faisant agir tout sur b_k. Mais la h-ième ligne de $\widetilde{N}_k$ se calcule en formant les mineurs de la matrice (où l'on a isolé les colonnes d'indices k et h) :

$$[M_1 - \delta\Lambda_1, \ldots, \textstyle\sum_{j=1}^{s} \Lambda_j b_j, \ldots, \ ., \ldots, M_s - \delta\Lambda_s].$$

Elle correspond donc à la k-ième ligne de $\widetilde{N}_h$, qui se calcule, elle, en formant les mineurs de la matrice :

$$[M_1 - \delta\Lambda_1, \ldots, \ ., \ldots, \textstyle\sum_{j=1}^{s} \Lambda_j b_j, \ldots, M_s - \delta\Lambda_s].$$

La multiplication par la matrice colonne $M_k - \delta\Lambda_k$ redonne donc exactement le déterminant D_k, d'où comme annoncé :

$$D_k * b_h = D_h * b_k$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire 11. *Sous les hypothèses du Théorème, l'ordre du noyau du transfert* $\mathrm{Ver}_{U/A}$ *est un multiple de l' indice* $(U : A)$ *du sous-groupe* A.

Preuve. Le Théorème 10 affirme en effet que le transfert $\mathrm{Ver}_{U/A}$ est nul sur le sous-groupe $(U/U')^{\Gamma}$ des points fixes de dans U/U' Or l'ordre de ce groupe est égal à l'indice de A dans U en vertu de l'exactitude de la suite longue de groupes finis :

$$1 \longrightarrow (U/U')^{\Gamma} \longrightarrow U/U' \xrightarrow{\gamma-1} U/U' \longrightarrow U/A \longrightarrow 1$$

3 Interprétation arithmétique des résultats algébriques

3.1 Le théorème de l'idéal principal

Revenons d'abord sur le théorème d'Artin-Furtwängler. Comme l'a observé Herbrand [13], le caractère purement formel du Théorème de l'idéal principal permet de le transposer facilement *mutatis mutandis* dans le cadre plus vaste des groupes de classes de rayons. On peut même, à l'instar de Miyake [9] l'énoncer de façon très générale en termes idèliques. Introduisons pour cela le formalisme profini de la Théorie du corps de classes développé dans [37] sous sa forme ℓ-adique : Un corps de nombres K étant donné, pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K notons $\pi_{\mathfrak{p}}$ une uniformisante locale puis $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} = \varprojlim K_{\mathfrak{p}}^{\times}/K_{\mathfrak{p}}^{\times\, n} \simeq \mathcal{U}_{K_{\mathfrak{p}}}\, \pi^{\hat{\mathbb{Z}}}$ le compactifié profini du groupe multiplicatif du complété $\mathfrak{p}$-adique de K, et appelons groupe des idèles de K le produit restreint

$$\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{res}} \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} = \bigcup_{S \text{ fini}} \mathcal{J}_K^S \quad \text{avec} \quad \mathcal{J}_K^S = \prod_{\mathfrak{p}\in S} \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} \prod_{\mathfrak{p}\notin S} \mathcal{U}_{K_{\mathfrak{p}}}$$

constitué des familles d'éléments des $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ dont presque tous sont dans le sous-groupe unité $\mathcal{U}_{K_\mathfrak{p}}$, équipé de sa topologie naturelle de limite inductive des sous-groupes compacts $\mathcal{J}_K^S$. Notons enfin

$$\mathcal{R}_K = \hat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$$

le tensorisé multiplicatif du groupe $K^\times$ par le groupe profini $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dans l'isomorphisme du corps de classes, le quotient

$$\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K/\mathcal{R}_K$$

s'identifie (algébriquement et topologiquement) au groupe de Galois $\mathscr{G}_K = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ de l'extension abélienne maximale de K.

Cela posé, l'homomorphisme d'extension $j_{K/k}$ pour les groupes d'idèles satisfait la propriété :

Théorème 12. *Soit K/k une extension galoisienne de corps de nombres de groupe de Galois G. Alors, si $\mathcal{V}_K$ est un sous-groupe de $\mathcal{J}_K$ qui contient $\mathcal{R}_K$ et est stable pour l'action de G, on a :*

$$\mathcal{V}_K{}^{-1}N_{K/k}(\mathcal{R}_K) = \mathcal{J}_K \quad \Rightarrow \quad j_{K/k}(\mathcal{J}_K) \subset \mathcal{V}_K$$

Preuve (d'après Miyake [5]). Supposons $\mathcal{V}_K{}^{-1}N_{K/k}(\mathcal{R}_K) = \mathcal{J}_K$ et introduisons l'extension abélienne L de K associée à $\mathcal{V}_K$ par la théorie du corps de classes. Le sous-groupe de $\mathcal{J}_k$ qui correspond à la sous-extension maximale F de L qui est abélienne sur k étant l'image de la norme $N_{K/k}(\mathcal{V}_K)$ dans $\mathcal{C}_k = \mathcal{J}_K/\mathcal{R}_k$, l'identité dans $\mathcal{J}_k$:

$$\mathcal{R}_k\, N_{K/k}(V_K) = \mathcal{R}_k\, N_{L/k}(\mathcal{J}_K)$$

donnée par l'hypothèse nous assure que F est encore la plus grande sous-extension de K abélienne sur k. Maintenant, le groupe $\mathcal{V}_K$ étant supposé stable pour l'action de $G = \mathrm{Gal}(K/k)$, le corps L est une extension galoisienne de k, et nous pouvons appliquer le théorème de Furtwängler au groupe $U = \mathrm{Gal}(L/k)$ de groupe dérivé $U' = \mathrm{Gal}(L/F)$.

Or, par le corps de classes, nous avons $U/U' \simeq \mathcal{J}_k/\mathcal{R}_k N_{K/k}(\mathcal{J}_K)$ et $U/U'' \simeq \mathcal{J}_F/\mathcal{R}_f N_{K/F}(\mathcal{V}_K)$. Et le transfert $\mathrm{Ver}\, U/U'$ correspond à l'extension des idèles de k à F. Il vient donc, comme annoncé :

$$j_{K/k}(\mathcal{J}_k) = j_{K/F}\big(j_{F/k}(\mathcal{J}_k)\big) = j_{K/F}\big(\mathcal{R}_F N_{K/F}((\mathcal{V}_k)\big).$$

Scolie 13. *Conservons les notations du Théorème et écrivons $\big(\mathcal{J}_K : {}^{-1}N_{K/k}(\mathcal{R}_k)\mathcal{V}_K\big) = d$. Cela posé, nous obtenons simplement $j_{K/k}(\mathcal{J}_K)^d \subset \mathcal{V}_K$ en dehors de toute hypothèse sur d.*

Preuve. Soit L l'extension abélienne de K correspondant au sous-groupe ouvert ${}^{-1}N_{K/k}(\mathcal{R}_k)\mathcal{V}_K$. Par construction, nous avons donc $d = [L : K]$ et $\mathcal{R}_K N_{L/K}(\mathcal{V}_K) = {}^{-1}N_{K/k}(\mathcal{R}_k)\mathcal{V}_K$. Nous pouvons dès lors appliquer le Théorème 11 au sous-groupe ouvert ${}^{-1}N_{K/k}(\mathcal{V}_k) \subset \mathcal{J}_K$ dans l'extension galoisienne L/k. Nous obtenons ainsi les inclusions :

$$j_{L/k}(\mathcal{J}_k) \subset {}^{-1}N_{K/k}(\mathcal{V}_k), \qquad \text{puis} \qquad j_{L/k}(\mathcal{J}_k^d) = N_{L/K} \circ j_{L/k}(\mathcal{J}_k) \subset \mathcal{V}_K,$$

comme attendu.

Appliqué maintenant aux groupes de classes de rayons, le Théorème 12 peut s'énoncer comme suit :

Corollaire 14. *Soient K un corps de nombres algébriques et $\mathfrak{f}_K$ un diviseur entier de K. Notons $L = H_K^{\mathfrak{f}_K}$ le corps des classes de rayons modulo $\mathfrak{f}_K$ sur K (de sorte que le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/K)$ s'identifie au quotient $Cl_K^{\mathfrak{f}_K} = D_K^{\mathfrak{f}_K}/R_K^{\mathfrak{f}_K}$ du groupe des diviseurs de K étrangers à $\mathfrak{f}_K$ par le sous-groupe des diviseurs principaux engendrés par les éléments congrus à 1 modulo $\mathfrak{f}_K$) et définissons un diviseur $\mathfrak{f}_L$ de L en posant pour chaque place $\mathfrak{p}_L$ de L au-dessus d'une place $\mathfrak{p}_K$ de K représentée dans $\mathfrak{f}_K$:*

$$v_{\mathfrak{p}_L}(\mathfrak{f}_L) = \Psi_{\mathfrak{p}_L}(v_{\mathfrak{p}_K}(\mathfrak{f}_K)),$$

où $\Psi_{\mathfrak{p}_L}$ désigne la fonction de Herbrand associée à la localisée en $\mathfrak{p}_L$ de l' extension L/K.

Cela étant, l'application naturelle $Cl_K^{\mathfrak{f}_K} \to Cl_L^{\mathfrak{f}_L}$ est l'application nulle. Autrement dit, les classes de rayons de $Cl_K^{\mathfrak{f}_K}$ capitulent dans le groupe $Cl_L^{\mathfrak{f}_L}$ des classes de rayons de L modulo $\mathfrak{f}_L$.

Bien entendu, prenant $\mathfrak{f}_K = 1$, on obtient $\mathfrak{f}_L = 1$, ce qui redonne le Théorème 8.

Preuve. Rappelons que le corps des classes de rayons de conducteur $\mathfrak{f}_K$ est la plus grande extension abélienne de K de conducteur $\mathfrak{f}_K$, et qu'elle est associée au groupe d'idèles :

$$\mathcal{R}_K N_{L/K}(\mathcal{J}_L) = \mathcal{R}_K N_{L/K}(\mathcal{U}_L^{\mathfrak{f}_L}), \text{ avec } \mathcal{U}_L^{\mathfrak{f}_L} = \textstyle\prod_{\mathfrak{p}\nmid\infty} \mathcal{U}_{K_\mathfrak{p}}^{v_\mathfrak{p}(\mathfrak{f}_K)} \prod_{\mathfrak{p}\mid\infty,\, \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{f}_K} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}.$$

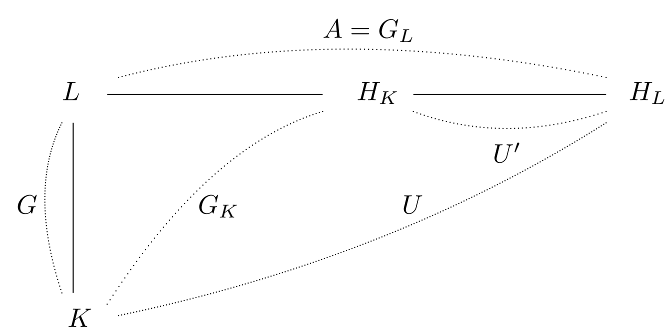
En particulier, elle est non-ramifiée aux places finies étrangères à $\mathfrak{f}_K$ et complètement composée aux places infinies étrangères à $\mathfrak{f}_K$. Si, maintenant, $\mathfrak{f}_L$ est le diviseur de L défini dans le corollaire, un calcul classique (cf. [34] montre que l'on a :

$$N_{L/K}(\mathcal{U}_L^{\mathfrak{f}_L}) = \mathcal{U}_K^{\mathfrak{f}_K}\text{ ; d'où : } \mathcal{R}_K N_{L/K}(\mathcal{U}_L^{\mathfrak{f}_L}) = \mathcal{R}_K \mathcal{U}_K^{\mathfrak{f}_K} = \mathcal{R}_K N_{L/K}(\mathcal{J}_L).$$

Les conditions du Théorème 12 sont donc remplies avec $\mathcal{V}_L = \mathcal{R}_L \mathcal{U}_L^{\mathfrak{f}_L}$ dans l'extension abélienne L/K. Traduite en termes de classes de rayons, la conclusion $j_{K/L}(\mathcal{J}_K) \subset \mathcal{R}_L \mathcal{U}_L^{\mathfrak{f}_L}$ fournit le résultat.

3.2 Retour sur la conjecture principale de la capitulation

Revenons maintenant sur la conjecture 4 et considérons pour cela le schéma d'extensions associé à une extension galoisienne non ramifiée ∞-décomposée L/K de corps de nombres, où nous avons fait figurer les corps de classes de Hilbert respectifs de L et de K :



Le théorème de Tannaka-Terada ou plutôt le Corollaire 11 appliqué avec $U = \mathrm{Gal}(H_L/K)$ et $A = \mathrm{Gal}(H_K/L)$ nous montre que l'ordre de la capitulation $Cap_{L/K}$ dans l'extension L/K est un multiple du degré $[L : K] = (U : A)$ pourvu qu'il existe un endomorphisme γ du groupe U tel que nous ayons :

$$A/U' = (U/U')^{\gamma-1};$$

de sorte que la Conjecture 4 est vérifiée dans ce cas.

De cette condition K. Miyake donne la présentation cohomologique suivante (cf. [7]) : regardons le groupe U comme extension du sous-groupe normal abélien A par le quotient abélien $G = U/A$; faisons agir U sur A via les automorphismes intérieurs de U ; et considérons l'homomorphisme π :

$$H^1(U, A) \to H^1(U, A/U'),$$

induit par la surjection naturelle de A sur A/U' . Le groupe U agissant trivialement sur le quotient A/U' , nous avons évidemment :

$$H^1(U, A/U') = \mathrm{Hom}(U, A/U') \simeq \mathrm{Hom}(U/U', A/U') = \mathrm{Hom}(G, A/U').$$

Pour tout élément φ de $\mathrm{Im}\,\pi$, regardé comme homomorphisme de G dans A/U', posons :

$$d_\varphi = |\,\mathrm{Coker}\,\varphi| = (A/U' : \mathrm{Im}\,\varphi).$$

Cela étant, nous avons :

Proposition 15. *Étant donné un sous-groupe normal abélien A d'un groupe U qui définit un quotient abélien $U/A = G$, pour qu'il existe un endomorphisme surjectif γ de U tel qu'on ait :*

$$A = U^{\gamma-1}U',$$

il est nécessaire et suffisant qu'il existe un morphisme surjectif $\varphi \in \mathrm{Hom}(U, A/U')$ *qui soit la réduction modulo* U' *d'un 1-cocycle* f *de* U *dans* A*. Lorsque cette condition est remplie, l'ordre* $(U : A)$ *du groupe quotient* U/A *divise celui du noyau de l'homomorphisme de transfert* $\mathrm{Ver}_{U/A} : U/U' \to A$*.*

Scolie 16. *Plus généralement, pour tout homomorphisme* $\varphi \in \mathrm{Hom}(U, A/U')$ *qui provient d'un 1-cocycle* $f \in Z^1(U, A)$*, on a l'identité :*

$$(\mathrm{Ker}\,\varphi)^{d_\varphi} \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ver}_{U/A},$$

où $d_\varphi = (A/U' : \mathrm{Im}\,\varphi)$ *est l' ordre du conoyau de* φ*.*

Preuve. Comme exposé plus haut, tout 1-cocycle f de U dans A induit, par réduction modulo U', un morphisme φ de U/U' dans A/U'. Inversement à un tel cocycle f correspond canoniquement un endomorphisme γ de U, relevant φ, et défini par l'identité :

$$\gamma(x) = f(x)x, \quad \forall x \in U.$$

Le sous-groupe normal A_γ qui lui est associé par la relation

$$A_\gamma = U^{\gamma - 1}U'.$$

n'est autre que l'image réciproque dans A du sous groupe $\mathrm{Im}\,\varphi$ de A/U'. Il vient ainsi :

$$d_\varphi = (A/U' : \mathrm{Im}\,\varphi) = (A : A_\gamma),$$

donc $\mathrm{Ver}_{U/A_\gamma} = \mathrm{Ver}_{A/A_\gamma} \circ \mathrm{Ver}_{U/A} = (\mathrm{Ver}_{U/A})^{d_\varphi}$, et l'identité annoncée $(\mathrm{Ker}\,\varphi)^{d_\varphi} \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ver}_{U/A}$ résulte alors de la Proposition 15 appliquée à A_γ.

Peut-être n'est-il pas inutile de réécrire la Proposition 15 en terme de classes d'idéaux :

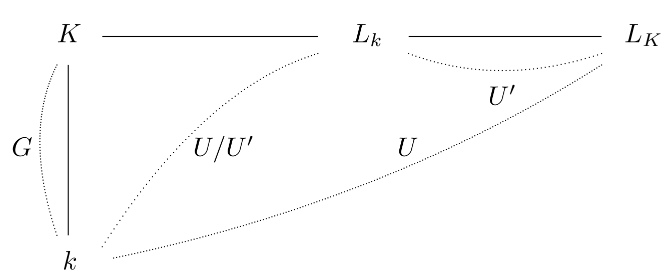
Corollaire 17. *Soient* L/K *une extension abélienne non-ramifiée* ∞*-décomposée de corps de nombres algébriques,* H_K *le corps des classes de Hilbert de* K*, et* H_L *celui de* L*. La conjecture 4 est vérifiée dans* L/K *sous la condition suffisante qu'il existe un morphisme surjectif* $\varphi \in \mathrm{Hom}\big(\mathrm{Gal}(H_L/K), N_{L/K}(Cl_L)\big)$ *qui provienne d'un 1-cocycle* $f \in Z^1\big(\mathrm{Gal}(H_L/K), Cl_L\big)$*.*

Tout comme dans la section précédente, le résultat obtenu est susceptible d'une interprétation idélique. Généralisant le Théorème 12, et avec les mêmes notations, nous obtenons, en effet :

Théorème 18. *Soient* K/k *une extension galoisienne de corps de nombres et* G *son groupe de Galois. Alors, si* $\mathcal{V}_K$ *est un sous-groupe ouvert de* $\mathcal{J}_K$ *contenant* $\mathcal{R}_K$*, qui est stable par* G*, on a :*

$$\big(j_{K/k}(\mathcal{J}_k)\mathcal{V}_K{}^{-1}N_{K/k}(\mathcal{R}_k)\big)^d \subset \big(j_{K/k}(\mathcal{J}_k) \cap \mathcal{V}_K\big), \text{ avec } d = \big(\mathcal{J}_K : (j_{K/k}(\mathcal{J}_k)\mathcal{V}_K{}^{-1}N_{K/k}(\mathcal{R}_k))\big).$$

Preuve (d'après Miyake [7]). Supposons d'abord que K soit abélienne sur k et introduisons l'extension abélienne L_K de K associée à $\mathcal{V}_K$ par la théorie du corps de classes. Notant L_k la sous-extension maximale de L_K qui est abélienne sur k, nous obtenons le schéma galoisien :



ainsi que les isomorphismes :

$$A \simeq \mathcal{J}_K/V_K\,; \qquad U' \simeq \mathcal{V}_K{}^{-1}N_{K/k}(\mathcal{R}_k)/\mathcal{V}_K\,; \qquad U/U' \simeq \mathcal{J}_k/N_{K/k}(\mathcal{V}_K)\mathcal{R}_k.$$

Considérons l'application naturelle $\varphi \in \mathrm{Hom}(U/U', A/U')$ induite par l'extension des idèles de k à K. Elle provient bien entendu de l'application induite par l'extension des idèles dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{J}_k/\mathcal{R}_k N_{K/k}(\mathcal{V}_K), (\mathcal{J}_K/\mathcal{V}_K)^G)$. Mais, comme ce dernier groupe s'écrit encore $\mathrm{Hom}(U/U', A^G) \simeq \mathrm{Hom}(U, A^G) = H^1(U, A^G)$, et qu'il est trivialement contenu dans $H^1(U, A)$, nous pouvons appliquer la proposition 15 qui nous donne directement :

$$(\mathrm{Ker}\,\varphi)^{d_\varphi} \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ver}_{U/A},$$

ce qui est précisément le résultat annoncé.

Le cas galoisien s'en déduit sans difficulté, comme le Théorème 12, qui correspond au cas particulier ${\mathcal{V}_K}^{-1} N_{K/k}(\mathcal{R}_k) = \mathcal{J}_K$.

Bibliographie

Vu la complexité du sujet, nous avons choisi d'organiser exceptionnellement la bibliographie autour de trois thèmes directeurs, en respectant strictement dans chacune des sections la chronologie des publications.

AUTOUR DU THÉORÈME 94 DE HILBERT

[1] D. HILBERT, *Théorie des corps de nombres algébriques*, Ann . Sci. Toulouse 1909–1910 ; Hermann, Paris (1913).

[2] T. TANNAKA, *A generalized principal ideal theorem and a proof of a conjecture of Deuring*, Ann. of Math. **67** (1958), 574–589.

[3] O. TAUSSKY, *A remark concerning Hilbert's theorem 94*, J. reine angew. Math. **239/240** (1970), 435–438.

[4] H. KISILEVSKY, *Some results related to Hilbert's theorem 94*, J. Numb. th. **2** (1970), 199–206.

[5] K. MIYAKE, *On the structure of the idele group of an algebraic number field*, Nagoya Math. J. **80** (1980), 117-127.

[6] R.J. BOND, *Some results on the capitulation problem*, J. Numb. Th.**13** (1981), 246–254.

[7] K. MIYAKE, *On the structure of the idele group of an algebraic number field II*, Tôhoku Math. J. **80** (1982), 101–112.

[8] K. MIYAKE, *On capitulation of ideals of an algebraic number field*, Proc. Japan Acad. **60** (1984), 232–235.

[9] K. MIYAKE, *A family of finite nilpotent groups*, Proc. Japan Acad. **60** (1984), 269–272.

AUTOUR DU THÉORÈME D'ARTIN-FURTWÄNGLER

[10] E. ARTIN, *Idealklassen in Oberkörpern und allgemeine Rezprozitätsgesetz*, Abh. Math. Sem. Hamburg **7** (1930), 46–51.

[11] P. FURTWÄNGLER, *Beweis des Hauptidealsatzes für die Klassenkörper algebraischer Zahlkörper*, Abh. Math. Sem. Hamburg **7** (1930), 14–36.

[12] S. IYANAGA, *Über den algemeinen Hauptidealsatz*, Japan J. Math. **7** (1930), 315–333.

[13] J. HERBRAND, *Sur les théorèmes du genre principal et des idéaux principaux*, Abh. Math. Sem. Hamburg **9** (1932), 84–92.

[14] S. IYANAGA, *Zum Beweis des Hauptidealsatzes*, Abh. Math. Sem. Hamburg **10** (1934), 349–357.

[15] E. WITT, *Bemerkungen zum Beweis des Hauptidealsatzes von S. lyanaga*, Abh. Math. Sem. Hamburg **11** (1936), 221.

[16] H.G. SCHUMAN (mit W. FRANZ), *Zum Beweis des Hauptidealsatz*, Abh. Math. Sem. Hamburg **12** (1937–1938), 42–47.

[17] E. WITT, *Verlagarung von Gruppen und Haupt idealsatza*, Proc. Int. Congr. of Math. Ser. II, vol. 2, Amsterdam (1954), 70–73.

[18] E. ARTIN & J. TATE, *Class Field Theory* (Ch. XIII, §4), Benjamin, New-York (1965).

[19] J. NEUKIRCH, *Class Field Theory* (Ch. IV, §8), Springer Verlag, Berlin (1985).

AUTOUR DU THÉORÈME DE TANNAKA-TERADA

[20] T. TANNAKA & F. TERADA, *A generalization of the principal ideal theorem*, Proc. Japan Acad. **25** (1949), 7–8.

[21] F. TERADA, *On a generalization of the principal ideal theorem*, Tôhoku Math. J. **1** (1949), 229–269.

[22] T. Tannaka, *Some remarks concerning the principal ideal theorem*, Tôhoku Math. J. **1** (1949), 270–278.

[23] T. Tannaka, *An alternative proof of the generalized principal ideal theorem*, Proc. Japan Acad. **25** (1949), 26–31.

[24] T. Tannaka, *Some remarks concerning the principal ideal theorem*, Tôhoku Math. J. **4** (1952), 141–152.

[25] H. Kuniyoshi & S. Takahashi, *On the principal genus theorem*, Tôhoku Math. J. **5** (1953), 128–131.

[26] F. Terada, *On a generalization of the principal ideal theorem*, J. Math. Soc. Japan **7** (1955).

[27] F. Terada, *A principal ideal theorem in the genus field*, Tôhoku Math. J. **23** (1971), 697–718.

[28] N. Adachi, *Report on principal ideal theorems*, Mem. School Sci. Engin., Waseda Univ. **37** (1973), 81–90.

[29] H. Furuya, *Principal ideal theorems in the genus field for absolutely abelian extensions*, J. Numb. Th. **9** (1977), 4–15.

[30] K. Miyake, *A generalization of Hilbert's theorem 94*, Nagoya Math. J. **96** (1984) 83–94.

Et aussi ...

[31] C. Chevalley, *Sur la théorie du corps de classe dans les corps finis et les corps locaux*, J. Fac. Sci. Tokyo **2** (1933) , 365–476.

[32] K. Iwasawa, *A note on the group of units of an algebraic number field*, J. Math. pures appl. **35** (1956), 189–192.

[33] H.W. Leopoldt, *Zur Struktur der ℓ-Klassengruppe galoischer Zahlkörper*, J. reine angew Math. **199** (1958).

[34] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris (1968).

[35] Bernard Oriat, *Essai de généralisation du Spiegelungssatz*, Thèse, Besançon (1980).

[36] M. Grandet & J.-F. Jaulent, *Sur la capitulation dans une $\mathbb{Z}_\ell$-extension*, J. reine angew. Math. **362** (1985), 213-217 .

[37] J.-F. Jaulent, *L'arithmétique des ℓ-extension* (Thèse de doctorat d'État), Pub. Math. Besançon (1986) ; http://pmb.univ-fcomte.fr/1986.html.

Addendum

Ce qui précède n'est autre que la mise au format TEX, après correction de nombre d'erreurs typographiques, de la synthèse sur la capitulation des groupes de classes des corps de nombres publiée au Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux et reçue le 14 octobre 1988.

Parmi les travaux ultérieurs, il convient de signaler le rapport de Miyake [38], paru peu après, et, bien sûr, la démonstration algébrique de la conjecture principale donnée finalement par Suzuki [39] deux ans plus tard. Une approche alternative débouchant effectivement sur une nouvelle preuve a été proposée plus récemment par Gruenberg et Weiss [40], lesquels l'ont généralisée dans [41].

Complément bibliographique

[38] K. Miyake, *Algebraic investigations of Hilbert's Theorem 94, the principal ideal theorem and the capitulation problem*, Expo. Math. **7** (1989), 289-346.

[39] H. Suzuki, *A generalization of Hilbert's Theorem 94*, Nagoya Math. J. **121** (1991), 161–169.

[40] K. W. Gruenberg & A. Weiss, *Capitulation and transfer kernels*, J. Théor. Nombres Bordeaux **12** (2000), 219–226.

[41] K. W. Gruenberg & A. Weiss, *Capitulation and Transfer Triples*, Proc. London Math. Soc. **87** (2003), 273–290.

Adresse : Univ. Bordeaux & CNRS,
Institut de Mathématiques de Bordeaux,
351 Cours de la Libération, F-33405 Talence cedex
Courriel : jean-francois.jaulent@math.u-bordeaux.fr
https://www.math.u-bordeaux.fr/~jjaulent/