Théorie des Genres des Corps globaux*

Bruno Anglès et Jean-François Jaulent

Abstract. We establish the fundamental results of genus theory for finite (non necessary Galois) extensions of global fields by using narrow S-class groups, when S is an arbitrary finite set of places. This exposition, which involves both the number fields and the functions fields cases, generalizes most classical results on this subject.

Résumé. Nous établissons les résultats fondamentaux de la théorie des genres pour les extensions finies (quelconques) de corps globaux dans le cadre des groupes de S-classes d'idéaux signés pour un ensemble fini arbitraire de places ; la présentation donnée vaut indifféremment pour les corps de nombres et les corps de fonctions et contient ou généralise la plupart des résultats connus.

Introduction

La Théorie des Genres pour les corps de nombres remonte aux Disquisitiones Arithmeticae. Gauss étudiait les formes quadratiques alors que le point de vue actuel met l'accent sur l'Arithmétique des extensions abéliennes. C'est seulement en 1951 que Hasse donna une interprétation du genre des corps quadratiques basée sur la Théorie du corps de classes, et en 1959 que Fröhlich donna une définition générale du corps des genres attaché à un corps de nombres arbitraire. Dans cet article, nous étendons la Théorie des genres aux cas des corps de fonctions dans le cadre des groupes de S-classes d'idéaux signés que nous introduisons en parallèle avec celui des corps de nombres (voir paragraphe 2.1).

Il existe en effet une forte analogie entre les corps de nombres et les corps de fonctions d'une variable sur les corps finis. Ainsi, si $\mathbb{F}_q$ est un corps fini et T est une indéterminée sur $\mathbb{F}_q$, on peut voir $\mathbb{F}_q[T]$ comme l'analogue de $\mathbb{Z}$, son corps de fractions $\mathbb{F}_q(T)$ comme l'analogue de $\mathbb{Q}$, et $\frac{1}{T}$ comme l'analogue de la place à l'infini de $\mathbb{Q}$ donc $\mathbb{F}_q((\frac{1}{T}))$ comme l'analogue de $\mathbb{R}$. C'est sous cette correspondance que nous nous plaçons dans cet article en abordant la Théorie des genres en toute caractéristique.

Dans la première section, nous poursuivons les travaux de Rosen ([11]) en introduisant le corps de classes de Hilbert au sens restreint pour les corps de fonctions. Nous sommes alors armés pour définir la notion de S-corps des genres d'un corps global en toute caractéristique (paragraphe 2.2). Le théorème 2.3.1 généralise ainsi les formules des genres obtenues par Furuta ([5]) et Goldstein ([7]). Nous terminons par l'étude du corps des S-classes centrales d'une extension séparable finie de corps globaux.

*Manuscripta Math. **101** (2000), 513–532.

Les résultats obtenus dans cet article seront utilisés dans un travail en préparation où est étudiée la "parité" des groupe de classes d'idéaux des corps de fonctions cyclotomiques et de leurs sous-corps "totalement réels".

Enfin nous remercions tout particulièrement Georges Gras qui nous a signalé une inexactitude dans la version préliminaire de ce travail (cf. remarque 2.2.)

Notations

Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini à q éléments et p sa caractéristique. Si T est une indéterminée sur $\mathbb{F}_q$, on pose $Z = \mathbb{F}_q[T]$ et $Q = \mathbb{F}_q(T)$. On désigne enfin par $\bar{Q}$ une clôture algébrique de Q.

Suivant l'usage on note $\mathbb{Z}$ l'anneau des nombres relatifs, $\mathbb{Q}$ son corps des fractions et $\bar{\mathbb{Q}}$ le corps des nombres algébriques, c'est-à-dire la fermeture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$.

Dans ce qui suit, toutes les extensions finies de $\mathbb{Q}$ sont réputées contenues dans $\bar{\mathbb{Q}}$ et toutes les extensions finies de Q contenues dans $\bar{Q}$.

Soit maintenant K un corps ; nous disons que K est un *corps global* si c'est un corps de nombres, i.e. une extension finie de $\mathbb{Q}$, ou si K est une extension séparable finie de $\mathbb{F}_q(T) = Q$. En particulier, dans ce qui suit, toute extension L/K de corps globaux sera toujours réputée séparable et de degré fini.

Soit alors K un corps global ; nous notons :

- Pl_K^∞ l'ensemble des places à l'infini de K si K est un corps de nombres, l'ensemble des places de K au-dessus de $\infty = 1/T$ si K/Q est séparable finie ;
- Pl_K^0 l'ensemble des places finies et $Pl_K = Pl_K^0 \cup Pl_K^\infty$;
- K_v le complété de K en la place v et, si v est finie, U_v groupe des unités de l'anneau des entiers O_v de K_v puis $U_v^{(1)} = 1 + \pi O_v$ son sous-groupe principal ;
- O_K l'anneau des entiers de K, i.e. la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans K si K est un corps de nombres, celle de $Z = \mathbb{F}_q[T]$ si K est un corps de fonctions;
- I_K le groupe des idéaux fractionnaires non nuls de O_K;
- P_K le sous-groupe des idéaux fractionnaires principaux non nuls de O_K;
- Cl_K le groupe des classes d'idéaux de O_K, i.e. le quotient $Cl_K = I_K/P_K$;
- E_K le groupe des éléments inversibles de O_K;
- J_K le groupe des idèles de K, i.e. le produit restreint des groupes multiplicatifs $K_v^\times$ des complétés K_v de K en ses diverses places ;
- $U_K = \Pi_{v \in Pl_K^\infty} K_v^\times \Pi_{v \in Pl_K^\circ} U_v$ le groupe des idèles unités ;

- $U_k^+ = \Pi_{v\in Pl_K^\infty} K_v^+ \Pi_{v\in Pl_K^\circ} U_v$ le sous-groupe totalement positif de U_K ;
- K^+ le groupe des éléments totalement positifs dans $K^\times$;
- $Sg_K = K^\times/K^+$ le groupe des signatures de K ;
- $Is_K = I_K \oplus Sg_K$ le groupe des idéaux signés ;
- Ps_K le sous-groupe des idéaux signés principaux ;
- $Cs_K = Is_K/Ps_K \simeq Cl_K^{\mathrm{res}}$ le groupe des classes d'idéaux signés ;
- $S_K = S_K^\circ \cup S_K^\infty$ un ensemble fini de places de K ;
- U_K^S le groupe des S-unités (réputées totalement positives en dehors de S) dans J_K ;
- $E_K^S = U_K^S \cap K^\times$ le groupe des S-unités globales (totalement positives en dehors de S) ;
- $Is_K^S = Is_K/Is_K(S)$ le groupe des S-idéaux signés ;
- $Ps_K^S = Ps_K Is_K(S)/Is_K(S)$ son groupe principal ;
- $Cs_K^S = Is_K^S/Ps_K^S$ le groupe des S-classes d'idéaux signés.

1. Groupe de classes d'idéaux au sens restreint

Dans cette section nous introduisons les groupe de classes d'idéaux au sens restreint et la notion corps de classes de Hilbert au sens restreint pour les corps de fonctions.

1.1. Fonctions "signe" sur les corps de fonctions

Soit $\mathbb{R}^\times = \mathbb{Q}_\infty^\times$ le groupe multiplicatif des nombres réels non nuls ; classiquement on a une fonction signe

$$\phi_\infty :\ \mathbb{Q}_\infty^\times \to \mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\}\ ,$$

qui est définie par $\phi_\infty(x) = 1$ pour $x > 0$ et $\phi_\infty(x) = -1$ pour $x < 0$. Il est clair que ϕ_∞ est un morphisme de groupes de noyau $\mathbb{R}_+^\times$.

Si maintenant $E/\mathbb{R}$ est une extension finie, avec $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on pose $\phi_E = \phi_\infty \circ N_{E/\mathbb{R}}$. Alors $\phi_E : E^\times \to \{-1, 1\}$ est un morphisme de groupes de noyau $\mathrm{Ker}\phi_E = \mathbb{C}^\times$ si $E = \mathbb{C}$, et $\mathrm{Ker}\phi_E = \mathbb{R}_+^\times$ si $E = \mathbb{R}$.

Dans ce paragraphe nous allons introduire des fonctions analogues pour les extensions séparables finies de $Q_\infty = \mathbb{F}_q((\frac{1}{T}))$.

Soit $x \in Q_\infty^\times$; on peut écrire de manière unique :

$$x = (\frac{1}{T})^{n_x} \lambda_x \varepsilon_x,$$

avec $n_x \in \mathbb{Z}$, $\lambda_x \in \mathbb{F}_q^\times = Z^\times$ et $\varepsilon_x \in U_{Q_\infty}^{(1)}$. On définit alors le "signe" de x par :

$$\phi_\infty(x) = \lambda_x.$$

Alors $\phi_\infty : \ Q_\infty^\times \to \mathbb{F}_q^\times$ est un morphisme de groupes surjectif de noyau $< \frac{1}{T} > \times U_{Q_\infty}^{(1)}$. Notons que pour $M \in Z$ non nul le "signe" $\phi_\infty(M)$ est le coefficient dominant du polynôme M.

1.1.0. Définition. *Soit K une extension séparable finie de $Q_\infty = \mathbb{F}_q((\frac{1}{T}))$. Nous appellons signe sur $K^\times$ le morphisme $\phi_K = \phi_\infty \circ N_{K/Q_\infty}$ à valeurs dans $\mathbb{F}_q^\times$.*

1.1.1. Remarque. *Si E/Q_∞ est une sous-extension de K/Q_∞, on a alors :*

(i) $\phi_K = \phi_E \circ N_{K/E}$;
(ii) $N_{K/E}(\mathrm{Ker}\phi_K) \subset \mathrm{Ker}\phi_E$.

1.1.2. Théorème. *Soient E/Q_∞ une extension séparable finie et E^{mod}/Q_∞ sa sous-extension abélienne modérément ramifiée maximale. Soient f le degré d'inertie et e l'indice de ramification de E^{mod}/Q_∞. Soit enfin $\mathbb{F}_E$ le sous-corps fini de E de degré $[\mathbb{F}_E : \mathbb{F}_q] = f$. Alors :*

(i) Il existe $\zeta \in \mathbb{F}_E^\times$ tel qu'on ait $E^{mod} = \mathbb{F}_E((\sqrt[e]{\frac{-\zeta}{T}}))$ et de plus :

$$\phi_E(E^\times) = < (\mathbb{F}_q^\times)^e, N_{\mathbb{F}_E/\mathbb{F}_q}(\zeta) > .$$

(ii) Si l'on a en outre $\frac{1}{T} \in N_{E^{mod}/Q_\infty}(E^{mod\times})$, il vient $E^{mod} = \mathbb{F}_q((\sqrt[e]{\frac{-1}{T}}))$ et

$$\phi_E(E^\times) = (\mathbb{F}_q^\times)^e.$$

Preuve. Observons tout d'abord que si E^{ab}/Q_∞ est la sous-extension abélienne maximale de E/Q_∞, nous avons $N_{E/Q}(E^\times) = N_{E^{ab}/Q}(E^{ab\times})$ donc $\phi_E(E^\times) = \phi_{E^{ab}}(E^{ab\times})$, de sorte que le théorème sera établi si nous le démontrons dans le cas abélien.

Notons $E^{nr} = \mathbb{F}_E((\frac{1}{T}))$ la sous-extension (abélienne) non ramifiée maximale de E. L'extension E^{mod}/E^{nr} est alors totalement ramifiée de degré e. Si ρ est une uniformisante de E^{mod}, nous pouvons donc écrire

$$\rho^e = -\zeta u/T \quad \text{avec} \quad -\zeta \in \mathbb{F}_E \quad \text{et} \quad u \in U_{E^{mod}}^{(1)} \ ;$$

et l'hypothèse $p \nmid e$ nous assure que u est une puissance e-ième dans $U_{E^{mod}}^{(1)}$, disons $u = v^e$. Quitte à remplacer ρ par ρ/v, nous pouvons donc supposer

$$\rho^e = -\zeta/T, \text{ comme attendu .}$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} N_{E^{mod}/Q_\infty}(\rho) &= N_{E^{nr}/Q_\infty} \ \circ \ N_{E^{mod}/N^{nr}}(\rho) \\ &= N_{E^{nr}/Q_\infty}\Big((-1)^e\zeta/T\Big) = (-1)^{ef} N_{\mathbb{F}_E/\mathbb{F}_q}(\zeta)/T^f \end{aligned}$$

d'où

$$\phi_{E^{mod}}(\rho) = (-1)^{ef} N_{\mathbb{F}_E/\mathbb{F}_q}(\zeta).$$

Par ailleurs, nous avons immédiatement :

$$\phi_{E^{mod}}(\mathbb{F}_E^\times) = \phi_{E^{nr}}\Big(N_{E^{mod}/E^{nr}}(\mathbb{F}_E^\times)\Big) = \phi_{E^{nr}}\Big((\mathbb{F}_E^\times)^e\Big) = \Big(\phi_{E^{nr}}(\mathbb{F}_E^\times)\Big)^e = (\mathbb{F}_q^\times)^e$$

En résumé il vient :

$$\phi_{E^{mod}}(E^{\mathrm{mod}\times}) =< (\mathbb{F}_q^\times)^e, (-1)^{ef} N_{\mathbb{F}_E/\mathbb{F}_q}(\zeta) >=< (\mathbb{F}_q^\times)^e, N_{\mathbb{F}_E/\mathbb{F}_q}(\zeta) > .$$

Et le point *(i)* du théorème résulte de ce que, l'extension E^{ab}/E^{mod} ayant pour degré une puissance de p, ce dernier groupe coïncide avec $\phi_{E^{ab}}(E^{ab\times}) = \phi_E(E^\times)$.

Enfin, l'hypothèse $\frac{1}{T} \in N_{E^{mod}/Q_\infty}(E^{mod\times})$, qui entraîne $f = 1$ i.e. $\mathbb{F}_E = \mathbb{F}_q$, donne aussi $(-1)^e = N_{E^{mod}/Q_\infty}(-1)$ donc $\zeta \in N_{E^{mod}/Q_\infty}$ i.e. $\zeta \in (\mathbb{F}_q^\times)^e$, d'où le point *(ii)*.

1.1.3. Corollaire *L'extension abélienne de Q_∞ associée à $\mathrm{Ker}\phi_\infty$ est le corps*

$$Q'_\infty = Q_\infty[\sqrt[q-1]{-1/T}] = \mathbb{F}_q((\sqrt[q-1]{-1/T}));$$

c'est la plus grande extension abélienne modérément ramifiée de Q_∞ dans laquelle $1/T$ est norme. En particulier, si K est une extension séparable de Q_∞, l'extension abélienne de K associée à $\mathrm{Ker}\phi_K$ par la théorie locale du corps de classes est le compositum $K' = KQ_\infty = K[\sqrt[q-1]{-1/T}]$.

Preuve. La première assertion résulte immédiatement du théorème appliqué à l'extension abélienne E/Q_∞ associée à $\mathrm{Ker}\phi_\infty$ par la théorie locale du corps de classes, laquelle vérifie par construction l'identité normique :

$$N_{E/Q_\infty}(E^\times) = \mathrm{Ker}\phi_\infty = U_{Q_\infty}(\frac{1}{T})^{\mathbb{Z}}.$$

La seconde assertion s'ensuit puisque $\mathrm{Ker}\phi_K$ est la préimage de $\mathrm{Ker}\phi_\infty$ par N_{K/Q_∞}.

1.1.4. Proposition. *Soit K/Q_∞ une sous-extension d'une extension séparable finie L/Q_∞. On a alors*

$$\big(\mathrm{Ker}\phi_K : N_{L/K}(\mathrm{Ker}\phi_L)\big) = [L^{ab} : L \cap K'],$$

où L^{ab} est la sous-extension maximale de L qui est abélienne sur K et K' le compositum $KQ'_\infty = K[\sqrt[q-1]{-1/T}]$.

Preuve. Introduisons l'extension abélienne maximale $\bar{L}^{ab}$ de L et notons $\bar{K}^{ab}$ celle de K. Par le corollaire 1.1.3., la sous-extension abélienne de $\bar{K}^{ab}$ qui est fixée par $N_{L/K}(\mathrm{Ker}\phi_L)$ est l'intersection $L'^{ab} = L' \cap \bar{K}^{ab}$ qui n'est rien d'autre que le compositum $L^{ab'} = L^{ab} \times K'$. Cela étant, puisque $\mathrm{Ker}\phi_K$ fixe K', il vient comme annoncé :

$$(\mathrm{Ker}\phi_K : N_{L/K}(\mathrm{Ker}\phi_L)) = [L^{ab}K' : K'] = [L^{ab} : L^{ab} \cap K'].$$

Et l'ensemble de la discussion peut se résumer par le schéma de corps :

$$\begin{array}{ccccccc}
L & \text{——} & L' & \text{——} & L\bar{K}^{ab} & \text{——} & \bar{L}^{ab} \\
| & & | & & | & & \\
L^{ab} & \text{——} & L'^{ab} = L^{ab'} & \text{——} & \bar{K}^{ab} & & \\
| & & | & & & & \\
L \cap K' & \text{——} & K' & & & & \\
| & & & & & & \\
K & & & & & &
\end{array}$$

1.1.5. Corollaire. *Notons $d'(L/K)$ le degré $[L^{ab} : L \cap K'] = [L'^{ab} : K']$.*
(i) Puisque l'extension K'/k est modérément ramifiée, $d'(L/K)$ est un multiple de la partie sauvage de l'indice de ramification $e^{ab}(L/K)$ de l'extension abélienne L^{ab}/K, l'égalité ayant lieu si et seulement si la sous-extension maximale $L^{mod} = L \cap \bar{K}^{mod}$ de L qui est abélienne et modérée sur K est contenue dans K'.
(ii) Lorsque $\frac{1}{T}$ est norme dans l'extension L/Q_∞ (ce qui implique en particulier que $L/\mathbb{Q}_\infty$ soit totalement ramifiée) $d'(L/K)$ est la plus grande puissance de p qui divise $e^{ab}(L/K)$ si et seulement si on a l'égalité (où $a \wedge b$ désigne le pgcd de a et de b) :

$$(q-1) \wedge [L : \mathbb{Q}_\infty] = \big((q-1) \wedge [L : K]\big) \times \big((q-1) \wedge [K : \mathbb{Q}_\infty]\big)$$

Preuve. Soit π_L un premier de L vérifiant $N_{L/Q_\infty}(\pi_L) = \frac{1}{T}$. Posons $\pi_K = N_{L/K}(\pi_L)$. Alors π_K est un premier de K de norme $N_{K/Q_\infty}(\pi_K) = \frac{1}{T}$. Il vient donc :

$$L^\times = <\pi_L> \times \mathbb{F}_q^\times \times U_L^{(1)} \quad \text{et} \quad K^\times = <\pi_K> \times \mathbb{F}_q^\times \times U_K^{(1)}.$$

Posons $m_K = [K : Q_\infty] \wedge (q-1)$ et $m_L = [L : Q_\infty] \wedge (q-1)$. il vient :

$$\ker\phi_K = <\pi_K> \times (\mathbb{F}_q^\times)^{\frac{q-1}{m_K}} \times U_K^{(1)},$$

$$\mathrm{Ker}\phi_L = <\pi_L> \times (\mathbb{F}_q^\times)^{\frac{q-1}{m_L}} \times U_L^{(1)}.$$

et

$$N_{L/K}((\mathbb{F}_q^\times)^{\frac{q-1}{m_L}}) = (\mathbb{F}_q^\times)^{\frac{q-1}{m_L}[L:K]} = (\mathbb{F}_q^\times)^{\frac{q-1}{m_L}(m_L \wedge [L:K])} = (\mathbb{F}_q^\times)^{\frac{q-1}{m_L}((q-1)\wedge[L:K])}.$$

Ainsi l'égalité attendue : $\frac{\mathrm{Ker}\phi_E}{N_{K/E}(\mathrm{Ker}\phi_K)} = \frac{U_E^{(1)}}{N_{K/E}(U_K^{(1)})}$ équivaut bien à la condition annoncée : $m_L = m_K \times ((q-1) \wedge [L : K])$. $\diamond$

1.2. Classes au sens restreint et corps de classes de Hilbert

Soit K un corps global. Rappelons que nous avons désigné par Pl_K^∞ l'ensemble des places à l'infini de K si K est un corps de nombres, des places au-dessus de $\infty = 1/T$ si K est un corps de fonctions. Pour $v \in Pl_K^\infty$, K se plonge dans K_v, et $\phi_{K_v}(x)$ est bien défini pour $x \in K^\times$. On définit le sous-groupe des élements totalement "positifs" de $K^\times$ par :

$$K^+ = \{x \in K^\times | \ \forall v \in Pl_K^\infty, \ \phi_{K_v}(x) = 1\}.$$

1.2.0. Définition *Nous appelons groupe des "signatures" d'un corps global K le quotient fini* :

$$Sg_K = K^\times / K^+.$$

Si R est un sous-groupe de $K^\times$, l'image de R dans Sg_K est notée $sg_K(R)$. En particulier, on a donc $Sg_K = sg_K(K^\times)$.

1.2.1. Lemme. *On a* :

$$\mathrm{Sg}_K = \mathrm{sg}_K(K) \simeq \prod_{v \in Pl_K^\infty} \phi_{K_v}(K_v^\times).$$

Preuve. C'est une conséquence directe du théorème d'approximation forte. $\diamond$

On pose $P_K^+ = \{xO_K | x \in K^+\}$. Alors le groupe de classes d'idéaux au sens restreint de O_K est :

$$Cl_K^{\mathrm{res}} = I_K / P_K^+.$$

On pose de même :

$$U_K = \prod_{v \in Pl_K^\infty} K_v^\times \times \prod_{v \notin Pl_K^\infty} U_{K_v},$$

$$U_K^+ = \prod_{v \in Pl_K^\infty} \mathrm{Ker}\phi_{K_v} \times \prod_{v \notin Pl_K^\infty} U_{K_v}.$$

Alors U_K et U_K^+ sont des sous-groupes ouverts de J_K.

1.2.2. Proposition. *Les groupes de classes d'idéaux au sens ordinaire ou restreint sont donnés par les isomorphismes canoniques :*

(i) $Cl_K \simeq J_K / U_K K^\times$;
(ii) $Cl_K^{\mathrm{res}} \simeq J_K / U_K^+ K^\times$.

Preuve. C'est une conséquence immédiate de l'isomorphisme $I_K \simeq J_K / U_k$. $\diamond$

1.2.3. Corollaire. *Classes au sens ordinaires et classes au sens restreint sont liées par la suite exacte :*

$$1 \to \mathrm{sg}(E_K) \to \mathrm{Sg}_K \to Cl_K^{\mathrm{res}} \to Cl_K \to 1.$$

Preuve. On a immédiatement :

$$U_K / U_K^+ \simeq \mathrm{sg}(K), \ K^\times \cap U_K = E_K \text{ et } K^\times \cap U_K^+ = K^+ \cap E_K = E_K^+.$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition 1.2.2. $\diamond$

Soit H_K/K l'extension abélienne de K correspondant par la théorie du corps de classes à $K^\times U_K$. Alors H_K est appelé le *corps de classes de Hilbert au sens ordinaire* de O_K. C'est l'extension abélienne maximale de K qui est non ramifiée (aux places finies) dans laquelle toute place de Pl_K^∞ se décompose totalement. Notons que l'application d'Artin donne lieu à l'isomorphisme canonique :

$$Cl_K \simeq \mathrm{Gal}(H_K/K).$$

Le lecteur pourra consulter [12] pour obtenir plus d'informations sur les corps de classes de Hilbert pour les corps de fonctions.

Soit H_K^{res}/K l'extension abélienne de K correspondant à $K^\times U_K^+$. Alors H_K^{res} est appelé le *corps de classes de Hilbert au sens restreint* de O_K. L'application d'Artin donne lieu à l'isomorphisme :

$$Cl_K^{\mathrm{res}} \simeq \mathrm{Gal}(H_K^{res}/K).$$

1.2.4. Exemples.

(i) On a $\mathrm{sg}(\mathbb{Q}) = \mathrm{sg}(\mathbb{Z}^\times) = \{-1, 1\}$. Il suit donc : $H_{\mathbb{Q}} = H_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{res}} = \mathbb{Q}$.
(ii) On a $\mathrm{sg}(Q) = \mathrm{sg}(\mathbb{F}_q^\times) = \mathbb{F}_q^\times$. Ainsi $H_Q = H_Q^{\mathrm{res}} = Q$.
(iii) Soit $n \geq 3$ et soit $K = \mathbb{Q}(e^{\frac{2i\pi}{n}})$ le n-ième corps cyclotomique. Alors, pour tout $v \in Pl_K^\infty$, on a $K_v = \mathbb{C}$. Et il suit $H_K = H_K^{\mathrm{res}}$.
(iv) Soit $M \in Z = \mathbb{F}_q[T]$ un polynôme unitaire de degré supérieur ou égal à 1. Soit K le M-ième corps de fonctions cyclotomique. Nous renvoyons le lecteur à [6] pour la définition de K. Alors, pour tout $v \in Pl_K^\infty$, on a :

$$K_v = \mathbb{F}_q((\sqrt[q-1]{\frac{-1}{T}})).$$

Il suit donc $\mathrm{Ker}\phi_{K_v} = K_v^\times$. Et il en résulte : $H_K = H_K^{\mathrm{res}}$.

1.2.5. Remarque. *Soit L/K une extension séparable finie de corps globaux. On a alors $H_K^{\mathrm{res}} \subset H_L^{\mathrm{res}}$. Et si L/K est galoisienne, H_L^{res}/K l'est aussi.*

1.2.6. Proposition. *Soient K un corps global et $L = H_K^{\mathrm{res}}$. Alors toute classe de Cl_K^{res} a une image triviale dans Cl_L^{res}.*

Preuve. Ce n'est rien d'autre que la transposition au sens restreint du classique théorème d'Artin-Furtwängler pour les corps des nombres.

1.3. Idéaux signés et groupes de S-classes d'idéaux signés

Pour définir le groupe des classes d'idéaux au sens restreint par analogie avec le groupe des classes d'idéaux au sens ordinaire $C\ell_K = I_K/P_K$, nous avons restreint, dans la section qui précède, le dénominateur au sous-groupe P_K^+ des idéaux principaux engendrés par les éléments totalement positifs. Mais il est souvent commode de travailler plutôt sur le numérateur. Dans [8] est ainsi introduite pour les corps de nombres la notions de "diviseur". Mais comme le terme de diviseur a déjà un sens bien précis pour les corps de fonctions, nous préférons parler ici d'idéal signé :

1.3.0 Définition. *Nous appelons groupe des idéaux signés d'un corps global K la somme directe*

$$Is_K = I_K \oplus Sg_K$$

du groupe I_K des idéaux et du groupe Sg_K des signatures de K. L'image Ps_K dans Is_K du groupe multiplicatif $K^\times$ est le sous-groupe des idéaux signés principaux.

Si Kest un corps de nombres possédant exactement r places réelles, on a $Sg_K = \{\pm 1\}^r$ et l'image d'un élément x de $K^\times$ dans Is_K et le couple formé de l'idéal principal engendré par x et des r signes des plongements de x aux places réelles. Si K est un corps de fonctions, on a un résultat analogue à cela près que $\{\pm 1\}^r$ est remplacé par le produit $\prod_{v|Pl_K^\infty} \phi_{K_v}(K_v^\times)$.

Soit, en effet, P une place de K ; on lui associe une valuation v_P comme suit :
- si P est une place ultramétrique, alors P correspond à un idéal premier de O_K, et v_P est alors la valuation P-adique usuelle sur $K^\times$;
- si P est réelle, K se plonge dans $K_P = \mathbb{R}$ et v_P est alors à valeurs dans $\mathbb{F}_2 = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$: on a $v_P(x) = \bar{0}$ pour $x > 0$ et $v_P(x) = \bar{1}$ pour $x < 0$;
- si P est complexe, v_P est la valuation triviale ;
- si P divise $\frac{1}{T}$ enfin, on pose $v_P = \phi_{K_P}$.

Le groupe des idéaux signés de K est alors le groupe abélien libre engendré par les valuations attachées aux places de K, chaque élément $D \in Is_K$, s'écrivant de manière unique sous la forme :

$$D = \sum_P n_P v_P,$$

avec $n_P \in \mathbb{Z}$ si P est une place finie, $n_P \in \mathbb{F}_2$ si P est réelle, et $n_P \in Im\phi_{K_P}$ si P divise $\frac{1}{T}$. L'application de $K^\times$ dans Is_K, est alors donnée par la formule :

$$x \mapsto \sum v_P(x) v_P.$$

1.3.1. Lemme. *le groupe $Cs_K = Is_K/Ps_K$ des classes d'idéaux signés s'identifie canoniquement au groupe $C\ell_K^{res}$ des classes d'idéaux au sens restreint.*

Preuve : C'est immédiat.

Soit maintenant $S = S_K$ un ensemble fini de places de K. On note $Is_K(S)$ le sous-groupe de Is_K engendré par les places de S :

- Si v est une place finie, elle correspond à un idéal premier non nul et le sous groupe engendré par v dans Is_K est le sous-groupe de I_K engendré par cet idéal ;

– Si v est une place à l'infini, le sous-groupe qu'elle engendre est le facteur $\phi_{K_v}(K_v^\times)$ de Sg_K ; il est d'ordre 2 si K est un corps de nombres et v réelle, trivial si v est complexe.

1.3.2. Définition. *Le groupe S-classes d'idéaux signés d'un corps global K est le quotient*
$$Cs_K^S = Is_K/Ps_K Is_K(S) \simeq Cs_K/Cs_K(S)$$
du groupe des classes d'idéaux signés par le sous groupe engendré par les classes des idéaux signés construits sur les places de S.

1.3.3. Remarques.
(i) Si $S = \emptyset$, on a déjà vu que l'on a $Cs_K^S \simeq Cl_K^{\mathrm{res}}$.
(ii) Si K est un corps de nombres et S l'ensemble des places réelles de K, alors $Cs_K^S \simeq Cl_K$. Plus généralement, si S contient les places réelles de K, notons S^0 l'ensemble des places finies contenues dans S et O_K^S l'ensemble des éléments de K réguliers en toute place finie en dehors de S^0. Alors Cs_K^S s'identifie au groupe de classes d'idéaux de O_K^S.

1.3.4. Définition *(Corps des S-classes de Hilbert). Considérons le groupe d'idèles*
$$U_K^S = \prod_{v\in Pl_K^\infty, v\notin S} \mathrm{Ker}\phi_{K_v} \times \prod_{v\in S} K_v^\times \times \prod_{v\notin S_{Pl_K^\infty}\cup S} U_{K_v}.$$
et notons H_K^S l'extension abélienne de K correspondant à $K^\times U_K^S$. Il vient :
$$\mathrm{Gal}(H_K^S/K) \simeq J_K/K^\times U_K^S \simeq Cs_K^S \ ;$$
et on dit que H_K^S est le corps des S-classes de Hilbert (au sens restreint) de K.

1.3.5. Définition. *Le groupe des S-unités du corps K est le sous-groupe*
$$E_K^S = \{x \in K^\times | \quad \forall P \notin S \quad v_P(x) = 0\}.$$
En d'autres termes, le groupe E_K^S est caractérisé par la suite exacte :
$$1 \to E_K^S \to K^\times \to Is_K \to Cls_K \to 1$$

1.3.6. Remarques.
(i) Pour $S = \emptyset$, E_K^S est le groupe des unités "totalement positives".
(ii) Si K est un corps de nombres, et S l'ensemble des places réelles E_K^S est le groupe des unités (au sens ordinaire) de l'anneau des entiers de K. Plus généralement, si S contient toutes les places réelles de K et si S° désigne l'ensemble des places finies contenues dans S, le groupe E_K^S est le groupe des unites de l'anneau O_K^S des $S_\circ$-entiers de K.

2. Corps des genres et corps des classes centrales

2.1 Groupe des genres relatifs à une extension de corps globaux

Considérons une extension L/K de corps globaux (i.e. soit une extension quelconque de corps de nombres de degré fini sur $\mathbb{Q}$, soit une extension quelconque de corps de fonctions séparables et de degré fini sur $Q = \mathbb{F}_q(T)$), et notons S_K un ensemble fini de places de K puis S_L l'ensemble fini des places de L au-dessus des places de S_K. Nous écrirons souvent S pour S_K ou S_L en l'absence de toute ambiguïté.

Rappelons que nous avons désigné par $H_L^{S_L}$ (resp. $H_K^{S_K}$) le corps des S-classes de Hilbert de L (resp.K) i.e. l'extension abélienne de L (resp.de K) qui est associéee par la théorie du corps de classes au groupe d'idèles $U_L^{S_L}$ (resp. $U_K^{S_L}$).

2.1.0 Définition. *Le corps des S-genres $LH_{L/K}^S$ de l'extension L/K est le plus grand sous-corps de H_L^S qui provient, par composition avec L, d'une extension abélienne de K. En d'autres termes, $H_{L/K}^S$ est la plus grande sous-extension de H_L^S qui est abélienne sur K.*

Le corps des S-genres $LH_{L/K}^S$ contient toujours le corps des S-classes H_K^S.

2.1.1. Exemples.
(i) Pour $S = \emptyset$, le corps des genres au sens restreint $LH_{L/K}^{\mathrm{res}} = LH_{L/K}^{\phi}$ est le plus grand sous-corps de H_L^{res} qui provient d'une extension abélienne de K.
(ii) Pour $S = Pl_L^{\infty}$, le corps des genres au sens ordinaire $LH_{L/K}$ est le plus grand sous-corps de H_L qui provient d'une extension abélienne de K.

2.1.2. Remarque. Puisque $LH_{L/K}^S/L$ est une sous-extension de H_L^S/L, l'isomorphisme $\mathrm{Gal}(H_L^S L) \simeq Cs_L^S$ identifie le quotient $\mathcal{G}_{L/K}^S = \mathrm{Gal}(LH_{L/K}^S/L)$ à un quotient du groupe de S-classes Cs_L^S. On dit que $\mathcal{G}_{L/K}^S$ est le quotient des genres de Cs_L^S relativement à l'extension L/K.

2.1.3. Proposition. *Soit L/K une extension quelconque de corps globaux.*
(i) Le groupe d'idèles de K qui correspond à la sous-extension abélienne $H_{L/K}^S/K$ de $H_L^S K$ est l'image $N_{L/K}(U_L^S)K^\times$ du groupe $U_L^S L^\times$ associé à H_L^S L.
(ii) Le groupe d'idèles de L qui correspond à l'extension abélienne $LH_{L/K}^S/L$ est le saturé pour la norme $N_{L/K}^{-1}(N_{L/K}(U_L^S)K^\times)L^\times$ du groupe $U_L^S L^\times$ associé à H_L^S L.

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la Théorie globale du corps de classes.

2.1.4. Corollaire. *Lorsque l'extension L/K est cyclique, de groupe de Galois $\Gamma =< \gamma >$, le quotient des S-genres $\mathcal{G}_{L/K}^S$ s'identifie au plus grand quotient ${}^{\Gamma}Cls_L^S$ du groupe Cs_L^S des S-classes de L sur lequel Γ opère trivialement :*

$$\mathcal{G}_{L/K}^S \simeq {}^{\Gamma}Cs_L^S = Cs_L^S/Cs_L^{S(\gamma-1)} \ .$$

On retrouve ainsi, pour $S = \emptyset$ ou $S = Pl^\infty$ les caractérisations traditionnelles du quotient des genres dans le cas cyclique. Notons par ailleurs que, le groupe

Cs_L^S étant fini, il en résulte que dans le cas cyclique le quotient des genres $\mathcal{G}_{L/K}^S$ a même ordre que le sous-groupe ambige (i.e. fixé par Γ) de Cs_L^S.

Preuve. Notons, pour simplifier, N la norme arithmétique $N_{L/K}$ et considérons un idèle x de J_L dont la norme tombe dans $N(U_L^S)K^\times$. Ecrivons donc $N(x) = N(u)k$, avec $u \in U_L^S$ et $k \in K^\times$. Nous obtenons $k = N(x/u) \in K^\times \cap NJ_L$ et, l'extension étant suposée cyclique, le principe de Hasse nous permet d'écrire $k = N(l)$ pour un $l \in L^\times$. Il vient donc $N(x/u) = 1$, d'où, via le théorème 90 pour les idèles, $x/lu = y^{\gamma-1}$ pour un $y \in J_L$, c'est-à-dire

$$x \in J_L^{\gamma-1} U_L^S L^\times;$$

et finalement : $\mathcal{G}_{L/K}^S \simeq J_L/J_L^{\gamma-1}U_L^S L^\times \simeq Cs_L^S/Cs_L^{S(\gamma-1)}$ comme attendu.

2.2. Formule des S-genres et suite exacte des S-genres

Soit L/K une extension quelconque de corps globaux; pour chaque place v de K, notons K_v le complété correspondant de K et $(L_{w)w|v}$ la famille des complétés de L aux places w au-dessus de v (considérés dans une même clôture algébrique de K_v) ; désignons enfin par $(L_w^{ab})_{w|v}$ la famille des sous-extensions abéliennes maximales de K_v respectivement contenues dans les $(L_w)_{w|v}$.

Soit alors $\hat{L}_v^{ab} = \Pi_{w|v} L_w^{ab}$ le compositum des L_w^{ab} et $\check{L}_v^{ab} = \cap_{w|v} L_w^{ab}$ leur intersection, puis $\tilde{L}_v^{ab}$ le sous-corps de $\hat{L}_v^{ab}$ fixé par les sous-groupes d'inertie $G^\circ(\hat{L}_v^{ab}/L_w^{ab})$ attachés aux extensions abéliennes $\hat{L}_v^{ab}/L_w^{ab}$ lorque w décrit les places au-dessus de v.

2.2.1. Remarques. Lorsque les L_w^{ab} coïncident, ce qui se produit en particulier dès que l'extension L/K est galoisienne, il n'y a pas lieu de distinguer entre $\hat{L}_v^{ab}$, $\check{L}_v^{ab}$ et $\tilde{L}_v^{ab}$. Nous écrivons donc dans ce cas L_v^{ab} sans plus de détail ; mais cette simplification n'est pas possible dans le cas général.

D'après la Théorie locale du corps de classes, L_w^{ab} est l'extension abélienne de K_v associée au groupe de normes $N_{L_w/K_v}(L_w^\times)$, que nous écrirons de façon abrégée $N(L_w^\times)$; il coïncide naturellement avec le groupe $N(L_w^{ab\times}) = N_{L_w^{ab}/K_v}(L_w^{ab\times})$. Le compositum $\hat{L}_v^{ab}$ des L_w^{ab} correspond donc à l'intersection $\cap_{w|v} N(L_w^\times)$ et leur intersection $\check{L}_v^{ab}$ au sous-groupe $\Pi_{w|v} N(L_w^\times)$ de $K_v^\times$ engendré par les $N(L_w^\times)$. Enfin , pour chaque place w_0 au-dessus de v le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\hat{L}_v^{ab}/L_{w_0}^{ab})$ s'identifie au quotient $N(L_{w_0}^\times)/\Pi_{w|v} N(L_w^\times)$ et son sous-groupe d'inertie à l'image $N(U_{w_0})\big(\Pi_{w|v} N(L_w^\times)\big)$ du sous-groupe U_{w_0} des unités de L_{w_0}. Et le groupe d'idèles associé au corps $\tilde{L}_v^{ab}$ est ainsi le produit $\big(\Pi_{w|v} N(U_w)\big)\big(\cap_{wLv} N(L_w^\times)\big)$. Il vient donc :

2.2.2. Proposition et définition. *Avec les notations ci-dessus :*
(i) le quotient $K_v^\times/\Pi_{w|v} NL_w^\times$ s'identifie au groupe de Galois de l'extension abélienne locale $\check{L}_v^{ab}/K_v$; et nous disons que $D_v^{ab}(L/K) = \mathrm{Gal}(\check{L}_v^{ab}/K_v)$ est le groupe de décomposition abélianisé de la place v dans l'extension L/K ;

(ii) le quotient $U_v/\Pi_{w|v}NU_w$ s'identifie au groupe d'inertie de l'extension abélienne locale $\tilde{L}_v^{ab}/K_v$; et nous disons que $I_v^{ab}(L/K) = G^\circ(\tilde{L}_v^{ab}/K_v)$ est le groupe d'inertie abélianisé de la place v dans l'extension L/K.

Venons-en maintenant au cas particulier des places à l'infini :
(i) Si K est un corps de nombres et v une place réelle, on a $k_v = \mathbb{R}$ et $L_w = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour chaque place w au-dessus de v. Dans ce cas les L_w sont donc abéliens sur K_v, leur compositum $\hat{L}_v$ est égal à $\mathbb{C}$ dès que l'un au moins des L_w est complexe et leur intersection $\check{L}_v$ est $\mathbb{R}$ si et seulement si l'un des L_w est réel. En particulier le groupe de Galois

$$D'_v(L/K) = \mathrm{Gal}(\check{L}_v/K_v) \simeq K_v^\times/\Pi_{w|v}N_{L_w/K_v}(L_w^\times)$$

est d'ordre 1 ou 2, et trivial si et seulement si v admet un prolongement w réel.

(ii) Si K est un corps de fonctions, et v divise $\frac{1}{T}$, rappelons que nous avons posé $K'_v = K_v[\sqrt[q-1]{-1/T}]$ et $L'_w = L_w[\sqrt[q-1]{-1/T}]$. Dans la correspondance du corps de classes, nous savons par (1.1.6.) que $\mathrm{Ker}\phi_{k_v}$ fixe K'_v et que son sous-groupe $N_{L_w/K_v}(\mathrm{Ker}\phi_{L_w})$ fixe, lui, la sous-extension maximale L'^{ab}_w de L'_w qui est abélienne sur K_v. D'après la théorie locale du corps de classes, le produit $\Pi_{w|v}N_{L_w/K_v}(\mathrm{Ker}\phi_{L_w})$ est donc associé à l'intersection $L'v = \cap_{w|v}L'^{ab}_w$, de sorte que le quotient $K_v^\times/\Pi_{w|v}N_{L_w/K_v}(\mathrm{Ker}\phi_{L_w})$ s'identifie au groupe de Galois

$$D'_v(L/K) = \mathrm{Gal}(L'_v/K'_v).$$

En résumé, nous avons :

2.2.3. Proposition. *Soit v une place à l'infini de K et ϕ_{K_v} la fonction signe associée.*
(i) Si K est un corps de nombres, le quotient $\mathrm{Ker}\phi_{k_v}/\Pi_{w|v}N_{L_w/L_v}(\mathrm{Ker}\phi_{L_w})$ s'identifie au groupe de Galois $D'_v(L/K) = \mathrm{Gal}(\check{L}_v/K_v)$ d'ordre 1 ou 2.
(ii) Si K est un corps de fonctions, le quotient $\mathrm{Ker}\phi_{k_v}/\Pi_{w|v}N_{L_w/L_v}(\mathrm{Ker}\phi_{L_w})$ s'identifie au groupe de Galois $D'_v(L/K) = \mathrm{Gal}(L'_v/K'_v)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la formule des genres :

2.2.4. Théorème (Formule des S-genres). *Soient L/K une extension quelconque de corps globaux, S_K un ensemble fini de places de K et S_L l'ensemble des places de L au-dessus de celles de S_K. Le nombre de S-genres relatif à l'extension L/K est alors donné par la formule :*

$$[LH_{L/K}^S : L] = h_K^S \frac{\Pi_{v\in Pl_K^\infty\setminus S_K^\infty} d'_v(L/K)\ \Pi_{v\in Pl_K^0\setminus S_K^0} e_v^{ab}(L/K)\ \Pi_{v\in S_K} d_v^{ab}(L/K)}{[L^{ab}:K](E_K^S : E_K^S \cap \mathcal{N}_{L/K}^S)}$$

Dans celle-ci, h_K^S désigne le cardinal du groupe des S-classes Cs_K^S d'idéaux signés et $d'_v(L/K)$ est le degré de l'extension abélienne locale L'_v/K'_v ; $d_v^{ab}(L/K)$ est l'ordre du groupe de décomposition abélianisé $D_v^{ab}(L/K)$ et $e_v^{ab}(L/K)$ celui du groupe d'inertie abélianisé $I_v^{ab}(L/K)$; le corps L^{ab} est le plus grand sous-corps de L qui est abélien sur K ; le groupe E_K^S est le groupe des S-unités (au *sens restreint) de K ; et $\mathcal{N}_{L/K}^S = K^\times \cap N_{L/K}(U_L^S)$ est le groupe des S-normes locales attaché à l'extension L/K.*

2.2.5. Remarque. Lorsque l'extension globale L/K est abélienne, on a évidemment $L^{ab} = L$ ainsi que les égalités entre groupes locaux $D_v^{ab}(L/K) = D_v(L/K)$ et $I_v^{ab}(L/K) = I_v(L/K)$. Si elle est cyclique, on a en outre $\mathcal{N}_{L/K} = N_{L/K}(L^\times)$ en vertu du principe de Hasse.

Preuve. Rappelons que nous avons désigné par H_K^S le corps des S-classes de Hilbert de K et par $H_{L/K}^S$ le sous-exension maximale de H_L^S qui est abélienne sur K. Nous avons donc :

$$[LH_{L/K}^S : L] = \frac{[H_{L/K}^S : K]}{[L \cap H_{L/K}^S : K]} = \frac{[H_{L/K}^S : H_K^S][H_K^S : K]}{[L^{ab} : K]},$$

puisque $L^{ab} = L \cap H_{L/K}^S$ est bien la sous-extension maximale de L qui est abélienne sur K. Cela étant, d'après (1.3.4.) le groupe d'idèles associé à H_K^S est $U_K^S K^\times$ et , d'après (2.1.3.), celui associé à $H_{L/K}^S$ est $N_{L/K}(U_L^S)K^\times$. Il suit :

$$[H_{L/K}^S : H_K^S] = (U_K^S\ K^\times : N_{L/K}(U_L^S)K^\times) = \frac{(U_K^S : N_{L/K}(U_L^S))}{(K^\times \cap U_K^S : K^\times \cap N_{L/K}(U_L^S))}.$$

Pour conclure, il suffit alors de remarquer que la contribution des différentes places au numérateur est donnée par (2.2.2.) et (2.2.3.) ; tandis qu'au dénominateur, on a $K^\times \cap U_K^S = E_K^S$ et $K^\times \cap N_{L/K}(U_L^S) = E_K^S \cap \mathcal{N}_{L/K}^S$. Notons que lorsque l'extension L/K est galoisienne, cette dernière intersection n'est autre que $E_K^S \cap \mathcal{N}_{L/K}$ où $\mathcal{N}_{L/K} = K^\times \cap N_{L/K}(J_L)$ est le groupe des éléments de K qui sont normes locales partout d ans l'extension L/K.

2.2.6. Corollaire. *Soit L/K une extension quelconque de corps de nombres et L^{ab}/K sa sous-extension abélienne maximale.*

(i) Le nombre de genres relatif à l'extension L/K est donné par la formule :

$$[LH_{L/K} : L] = \frac{h_K \prod_v e_v^{\mathrm{ab}}(L/K)}{[L^{\mathrm{ab}} : K]\,(E_K : E_K \cap N_{L/K}(U_L))}\ ,$$

où h_K est le nombre de classes de K.

(ii) Le nombre de genres au sens restreint est donné, lui, par la formule :

$$[LH_{L/K}^{\mathrm{res}} : L] = \frac{h_K^{\mathrm{res}} \prod_{v \in S_\infty(K)} d_v^{\mathrm{ab}}(L/K) \prod_{v \notin S_\infty(K)} e_v^{\mathrm{ab}}(L/K)}{[L^{\mathrm{ab}} : K]\,(E_K^+ : E_K^+ \cap N_{L/K}(U_L))},$$

où h_K^{res} est le cardinal de Cl_K^{res} et E_K^+ est le groupe des unités qui sont positives aux places réelles de K.

2.2.7. Remarque. *Lorsque L/K est galoisienne, la formule obtenue pour le corps des genres au sens ordinaire dans (i) nous donne la formule de Furuta ([5]). Lorsque L/K est abélienne, la formule obtenue pour le corps des genres au sens restreint dans (ii) nous donne la formule de Goldstein ([7], Théorème 2.1).*

2.2.8. Corollaire. *Soit L/K une extension quelconque de corps de fonctions et L^{ab}/K sa sous-extension abélienne maximale.*
(i) Notons h_K le cardinal du groupe des classes Cl_K. Alors :

$$[LH_{L/K} : L] = \frac{h_K \prod_{v \in S_\infty(K)} d_v^{\mathrm{ab}}(L/K) \prod_{v \notin S_\infty(K)} e_v^{\mathrm{ab}}(L/K)}{[L^{\mathrm{ab}} : K]\,(E_K : E_K \cap N_{L/K}(U_L))}.$$

(ii) On suppose que pour toute place $w \in Pl_L^\infty$ on a : $\frac{1}{T} \in N_{L_w/Q_\infty}(L_w^\times)$ et que $[L_w : Q_\infty]$ divise $(q-1)r_w$ où r_w est un entier premier à $q-1$. Notons h_K^{res} le cardinal de Cl_K^{res} ; le nombre de genres au sens restreint est alors :

$$[LH_{L/K}^{\mathrm{res}} : L] = \frac{h_K^{\mathrm{res}} \prod_{v \in Pl_K^\infty(K)} p^{n_v} \prod_{v \notin Pl_K^\infty(K)} e_v^{\mathrm{ab}}(L/K)}{[L^{\mathrm{ab}} : K]\,(E_K^+ : E_K^+ \cap N_{L/K}(U_L))},$$

où $E_K^+ = E_K \cap K^+$ est le groupe des unités totalement positives et p^{n_v} est la plus grande puissance de p qui divise $e_v^{\mathrm{ab}}(L/K)$ (p est la caractéristique de $\mathbb{F}_q$).

Revenons maintenant au cas général. soit donc, comme plus haut, L/K une extension quelconque de corps globaux, S_K un ensemble fini de places de K et S_l l'ensemble des places de L au-dessus de celles de K; Rappelons que nous avons noté $H_{L/K}^S$ la plus grande sous-extension de $H_{L/K}$ qui est abélienne sur K. Cela étant, avec les notations du théorème 2.2.4, nous avons :

2.2.9. Théorème (*Suite exacte des S-genres). Les symboles locaux de restes normiques donnent la suite exacte courte qui relie corps des S-genres et corps des S-classes de Hilbert, groupes de Galois locaux et groupe de Galois global :*

$$1 \to \frac{E_K^S}{E_K^S \cap \mathcal{N}_{L/K}^S} \to \mathrm{Ram}_{L/K}^S \to \mathrm{Gal}(H_{L/K}^S/H_K^S) \to 1,$$

où le groupe médian $\mathrm{Ram}_{L/K}^S$ est la somme directe :

$$\mathrm{Ram}_{L/K}^S = \big(\oplus_{v \in Pl_K^\infty \setminus S_K^\infty} D'_v(L/K)\big) \oplus \big(\oplus_{v \in Pl_K^0 \setminus S_K^0} I_v^{ab}(L/K)\big) \oplus \big(\oplus_{v \in S} D_v^{ab}(L/K)\big).$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la démonstration du théorème 2.2.4. : le premier morphisme $f : E_K^S/E_K^S \cap \mathcal{N}_{L/K} \to \mathrm{Ram}_{L/K}^S$ est induit par les symboles locaux de restes normiques (pris dans les extensions abéliennes locales correspondantes) ; et le second morphisme $g : \mathrm{Ram}_{L/K}^S \to \mathrm{Gal}(H_{L/K}^S/H_K^S)$ n'est autre que la formule du produit $(\sigma_v)_v \to \prod \sigma_v|_{H_{L/K}^S}$ prise dans l'extension abélienne $H_{L/K}^S/K$, chacun des σ_v agissant trivialement sur le corps des S-classes de Hilbert H_K^S. La théorie globale du corps de classes nous dit alors que les S-unités globales (i.e. les éléments de E_K^S) ont une image triviale dans $\mathrm{Gal}(H_{L/K}^S/K)$, en d'autres termes que l'on a $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Ker}g$; et l'exactitude de la suite résulte de l'identité donnée par le théorème 2.2.4.

$$\frac{|\mathrm{Ram}_{L/K}^S|}{(E_K^S : E_K^S \cap \mathcal{N}_{L/K}^S)} = \frac{[H_{L/K}^S : L^{ab}][L^{ab} : K]}{[H_K^S : K]} = [H_{L/K}^S : H_K^S],$$

conformément au schéma de corps :

$$\begin{array}{ccccccc}
L & \text{——} & LH_K^S & \text{——} & LH_{L/K}^S & \text{——} & H_L^S \\
| & & | & & | & & \\
L^{ab} & \text{——} & L^{ab}H_K^S & \text{——} & H_{L/K}^S & & \\
| & & | & & & & \\
L \cap H_K^S & \text{——} & H_K^S & & & & \\
| & & & & & & \\
K & & & & & &
\end{array}$$

Et, bien entendu, si l'extension L/K est abélienne, on a $LH_{L/K}^S = H_{L/K}^S$. $\diamond$

Lorsque le groupe des unités E_K est particulièrement simple, il est naturellement possible d'expliciter le terme normique dans la formule des genres ; ainsi :

2.2.10. Proposition. *Soit $K/\mathbb{F}_q(T)$ une extension séparable finie telle qu'il y ait une unique place de K au dessus de ∞. Si L/K est une extension galoisienne finie et v une place de K, on pose :*

$$m_v = \frac{q_K^{\deg_v} - 1}{(q_K^{\deg_v} - 1) \wedge e_v^{\mathrm{ab}}(L/K))} \wedge (q_K - 1),$$

où $\deg_v$ est le degré de la place v et q_K est le cardinal du corps des constantes de K. Et on note :

$$m_{L/K} = \text{p.g.c.d.}\,\{m(v),\ v \text{ place de } K\}.$$

Alors :
(i) $(E_K : E_K \cap \mathcal{N}_{L/K}) = (E_K : E_K \cap N_{L/K}(U_L)) = \frac{q_K - 1}{m_{L/K}}$,
(ii) Et sous la condition $q_K = q$, il vient

$$(E_K^+ : E_K^+ \cap N_{L/K}(U_L^+)) = \frac{[K : Q] \wedge (q-1)}{m_{L/K} \wedge [K : Q] \wedge (q-1)}.$$

Preuve. Notons $\mathbb{F}_K$ le corps des constantes de K. Comme il y a une unique place de K au dessus de ∞, on a $E_K = \mathbb{F}_K^\times$. Il suit :

$$E_K \cap \mathcal{N}_{L/K} = \cap_v (\mathbb{F}_K^\times \cap N_{L_v^{\mathrm{ab}}/K_v}(U_{L_v^{\mathrm{ab}}})).$$

Or par [11], Proposition 2, le cardinal de $\mathbb{F}_K^\times \cap N_{L_v^{\mathrm{ab}}/K_v}(U_{L_v^{\mathrm{ab}}})$ est égal à m_v. D'où la première assertion. Pour (ii), notons que E_K^+ est un sous-groupe de $\mathbb{F}_q^\times$ et que le cardinal de E_K^+ est $[K:Q] \wedge (q-1)$. La Proposition suit. $\diamond$

2.2.11. Corollaire. *Soit $K = \mathbb{F}_q(T)$ et $L/\mathbb{F}_q(T)$ une extension galoisienne finie :*

(i) Le nombre de genres au sens ordinaire relatif à L/Q est alors donné par la formule :

$$[LH_{L/Q} : L] = \frac{m(L/Q)\, d_\infty^{\mathrm{ab}}(L/Q) \prod_{v \neq \infty} e_v^{\mathrm{ab}}(L/Q)}{(q-1)[L^{\mathrm{ab}} : Q]},$$

(ii) Si pour toute place $w \in Pl_L^\infty$, on a $\frac{1}{T} \in N_{L_w/Q_\infty}(L_w^\times)$ et $[L_w : Q_\infty]$ divise $(q-1)r_w$ où r_w est un entier premier à $q-1$, le nombre de genres au sens restreint est :

$$[LH_{L/Q}^{\mathrm{res}} : L] = \frac{p^{n_\infty} \prod_{v \neq \infty} e_v^{\mathrm{ab}}(L/Q)}{[L^{\mathrm{ab}} : Q]},$$

où p^{n_∞} est la plus grande puissance de p divisant $e_\infty^{\mathrm{ab}}(L/Q)$ (p est la caractéristique de $\mathbb{F}_q$).

Preuve. C'est une conséquence directe du Théorème 2.2.6. et de la Proposition 2.2.10. $\diamond$

2.3. Corps des classes centrales

Soient toujours L/K une extension quelconque de corps globaux, S_K un ensemble fini de places de K et S_L l'ensemble des places de L au-dessus des places dans S_K. Rappelons que nous avons posé :

$$U_L^{S_L} = \prod_{Pl_L^\infty \setminus S_L^\infty} \mathrm{Ker}\phi_{L_v} \prod_{v \in S_L} L_v^\times \prod_{v \in Pl_L^0 \setminus S_L^0} U_{L_v}.$$

Ecrivons ${}_N J_L$ le noyau de la norme $N_{L/K} :\ J_L \to J_K$.

2.3.0. Définition. *Le corps des S-classes centrales de l'extension L/K est l'extension abélienne $C_{L/K}^{S_L}$ de L correspondant par la théorie du corps de classes au sous-groupe ${}_N J_L U_L^{S_L} L^\times$ de J_L.*

Remarquons qu'on a la double inclusion :

$$L \subset LH_{L/K}^{S_L} \subset C_{L/K}^{S_L} \subset H_L^{S_L}.$$

Cela dit, l'appellation de corps des S-classes centrales se comprend comme suit :

2.3.1. Lemme. *Lorsque L/K est galoisienne, le corps des S-classes centrales $C_{L/K}^{S_L}$ est la plus grande extension galoisienne de K contenue dans $H_L^{S_L}$ telle que $\mathrm{Gal}(C_{L/K}^{S_L}/L)$ soit contenu dans le centre de $\mathrm{Gal}(C_{L/K}^{S_L}/K)$.*

Preuve. Posons $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ et observons que le quotient J_L/U_L s'identifie au groupe des idéaux I_L du corps L. Pour établir la proposition, il suffit naturellement de prouver que si I_G est l'idéal d'augmentation de $\mathbb{Z}[G]$ on a :

$$_N J_L U_L = J_L^{I_G} U_L.$$

Or les idéaux de L de norme 1 sont précisement ceux contenus dans $I_L^{I_G}$. Il vient donc $_N J_L U_L \subset J_L^{I_G} U_L \subset {}_N J_L U_L$, puis $_N J_L U_L^S L^\times = J_L^{I_G} U_L^S L^\times$; d'où le résultat. ◇

2.3.2 Exemples.
(i) Le corps des classes centrales de l'extension L/K est l'extension abélienne $C_{L/K}$ de L correspondant au sous-groupe $_N J_L U_L L^\times$ de J_L. On a :

$$L \subset LH_{L/K} \subset C_{L/K} \subset H_L.$$

(ii) Le corps des classes centrales au sens restreint est l'extension abélienne $C_{L/K}^{\mathrm{res}}$ L correspondant à $_N J_L U_L^+ L^\times$. On a :

$$L \subset LH_{L/K}^{\mathrm{res}} \subset C_{L/K}^{\mathrm{res}} \subset H_L^{\mathrm{res}}.$$

2.3.3. Théorème. *Soient L/K une extension galoisienne de corps globaux, S_K un ensemble fini de places de K et S_L l'ensemble des places de L au dessus des places de S_K. Alors corps des S-genres et corps des S-classes centrales sont liés par l'isomorphisme :*

$$\mathrm{Gal}(C_{L/K}^{S_L}/LH_{L/K}^{S_L}) \simeq \frac{(\mathcal{N}_{L/K}/N_{L/K}(L^\times))}{(E_K^{S_K} \cap \mathcal{N}_{L/K}/E_K^{S_K} \cap N_{L/K}(L^\times))}.$$

2.3.4. Corollaire. *Sous les hypothèses du théorème, on a :*

$$\mathrm{Gal}(C_{L/K}/LH_{L/K}) \simeq \frac{(\mathcal{N}_{L/K}/N_{L/K}(L^\times))}{(E_K \cap \mathcal{N}_{L/K}/E_K \cap N_{L/K}(L^\times))},$$

$$\mathrm{Gal}(C_{L/K}^{\mathrm{res}}/LH_{L/K}^{\mathrm{res}}) \simeq \frac{(\mathcal{N}_{L/K}/N_{L/K}(L^\times))}{(E_K^+ \cap \mathcal{N}_{L/K}/E_K^+ \cap N_{L/K}(L^\times))}.$$

Preuve. Posons

$$T_1 = \{\alpha \in J_L,\ N_{L/K}(\alpha) \in N_{L/K}(U_L^{S_L} L^\times)\},$$

et

$$T_2 = \{\alpha \in J_L,\ N_{L/K}(\alpha) \in N_{L/K}(U_L^{S_L}) K^\times\}.$$

Alors T_1 et T_2 sont des sous-groupe de J_L et on a $T_1 \subset T_2$. De plus, $C_{L/K}^{S_L}/L$ correspond à T_1 et $G_{L/K}^{S_L}/L$ correspond à T_2. Cela entraîne

$$\mathrm{Gal}(C_{L/K}^{S_L}/LH_{L/K}^{S_L}) \simeq \frac{T_2}{T_1}.$$

Considérons l'application $f:\ T_2 \to \frac{\mathcal{N}_{L/K}}{N_{L/K}(L^\times)(E_K^{S_K}\cap\mathcal{N}_{L/K})}$ définie comme suit :

Pour $\alpha \in T_2$, de norme $N_{L/K}(\alpha) = N_{L/K}(\beta)x$ avec $\beta \in U_L^{S_L}$ et $x \in K^\times$, notons $f(\alpha)$ la classe de x. Montrons que f est bien définie. Supposons $N_{L/K}(\alpha) = N_{L/K}(\beta')x'$ avec $\beta' \in U_L^{S_L}$ et $x' \in K^\times$. Nous obtenons $x(x')^{-1} = N_{L/K}(\beta'\beta^{-1})$. D'où $x(x')^{-1} \in E_K^{S_K} \cap \mathcal{N}_{L/K}$, comme entendu. Notons que f est un morphisme de groupes.

Soit maintenant $x \in \mathcal{N}_{L/K}$, disons $x = N_{L/K}(\alpha)$ pour un certain $\alpha \in J_L$. Nous avons alors $\alpha \in T_2$. Ainsi f est une surjection.

Il est clair que T_1 est contenu dans Ker$f$.

Soit maintenant $\alpha \in$ Ker$f$. De l'égalité $N_{L/K}(\alpha) = N_{L/K}(\beta)N_{L/K}(y)\mu$ avec $\beta \in U_L^{S_L}$, $y \in L^\times$ et $\mu \in E_K^{S_K} \cap \mathcal{N}_{L/K}$, nous tirons $\mu = N_{L/K}(\tau)$ avec $\tau \in U_L^{S_L}$. Ainsi $\alpha \in T_1$.

Nous avons donc obtenu :

$$\mathrm{Gal}(C_{L/K}^{S_L}/LH_{L/K}^{S_L}) \simeq \frac{(\mathcal{N}_{L/K}/N_{L/K}(L^\times))}{(E_K^{S_K} \cap \mathcal{N}_{L/K}/E_K^{S_K} \cap N_{L/K}(L^\times))}.$$

Le Théorème suit. ◇

Il est bien connu que le groupe des noeuds $\mathcal{N}_{L/K}/N_{L/K}(L^\times)$ qui intervient au numérateur est un invariant purement galoisien de l'extension L/K :

2.3.5. Théorème. *Soient K un corps global et L/K une extension galoisienne finie de groupe de Galois G. Pour toute place v de K, choisissons une place w de L au dessus de v et notons G_v le groupe de décomposition de w dans L/K. Posons $\mathcal{N}_{L/K} = K^\times \cap N_{L/k}(J_L)$. il vient :*
(i) $\frac{\mathcal{N}_{L/K}}{N_{L/K}(L^\times)} \simeq \mathrm{Coker}\left(\prod_v \hat{H}^{-3}(G_v,\mathbb{Z}) \to \hat{H}^{-3}(G,\mathbb{Z})\right)$.
(ii) Supposons L/K abélienne ; alors $\frac{\mathcal{N}_{L/K}}{N_{L/K}(L^\times)}$ est isomorphe au conoyau de l'application $f:\ \prod_v \bigwedge^2 G_v \to \bigwedge^2 G$ définie par $f(\cdots,\sigma_v\wedge\tau_v,\cdots) = \sum \sigma_v \wedge \tau_v$.

Preuve. L'assertion (i) est dans [13], page 198, et (ii) résulte de [10], Théorème 3. ◇

2.3.6. Corollaire. *Si L/K est cyclique, ou plus généralement s'il existe une place v de K telle que $G_v = \mathrm{Gal}(L/K)$, on a :*

$$C_{L/K}^{S_L} = LH_{L/K}^{S_L}.$$

Réunissant 2.2.4. et 2.3.3. nous obtenons la formule des S-classes centrales :

2.3.7. Théorème *(Formule des S-classes centrales). Dans une extension galoisienne L/K de corps globaux, le nombre de S-classes centrales est donné par la formule :*

$$[C_{L/K}^S : L] = h_K^S \frac{\Pi_{v\in Pl_K^\infty\setminus S_K^\infty} d'_v(L/K)\ \Pi_{v\in Pl_K^0\setminus S_K^0} e_v^{ab}(L/K)\ \Pi_{v\in S_K} d_v^{ab}(L/K)}{[L^{ab}:K]\left(E_K^S : E_K^S \cap N_{L/K}(L^\times)\right)} \kappa_{L/K}$$

Dans celle-ci, h_K^S désigne le cardinal du groupe des S-classes Cs_K^S d'idéaux signés et $d'_v(L/K)$ est le degré de l'extension abélienne locale L'_v/K'_v ; $d_v^{ab}(L/K)$ est l'ordre du groupe de décomposition abélianisé $D_v^{ab}(L/K)$ et $e_v^{ab}(L/K)$ celui du groupe d'inertie abélianisé $I_v^{ab}(L/K)$; le corps L^{ab} est le plus grand sous-corps de L qui est abélien sur K ; le groupe E_K^S est le groupe des S-unités (au sens restreint) de K ; et $\mathcal{N}_{L/K}^S = K^\times \cap N_{L/K}(U_L^S)$ est le groupe des S-normes locales attaché à l'extension L/K ; enfin $\kappa_{L/K} = \big(\mathcal{N}_{L/K} : N_{L/K}(L^\times)\big)$ est le nombre de noeuds de l'extension L/K.

Références

[1] R. Clement, *The Genus Field of an Algebraic Function Field*, Journal of Number Theory **40** (1992), 359-375.

[2] G. Cornell, *Relative Genus Theory and the Class Group of ℓ-Extensions*, Trans. of the Amer. Math. Soc. volume **277** number 1 (1983), 421-429.

[3] A. Fröhlich *Local Fields*, in J.-W.-S. Cassels & A. Fröhlich, Algebraic Number Theory, Academic Press, London (1967), 1-41.

[4] A. Fröhlich *Central Extensions, Galois Groups, and Ideal Class Groups of Number Fields*, Contemporary Mathematics volume **24**, Amer. Math. Soc. (1983).

[5] Y. Furuta, *The Genus Field and Genus Number in Algebraic Number Fields*, Nagoya Math. J. **29** (1967), 281-285.

[6] S. Galovich & M. Rosen, *Units and Class Groups in Cyclotomic Function Fields*, Journal of Number Theory **14** (1982), 156-184.

[7] L. J. Goldstein, *On Prime Discriminants*, Nagoya Math. J. **45** (1971), 119-127.

[8] G. Gras, Pratique du corps de classes global.

[9] J.-F. Jaulent, *L'Arithmétique des ℓ-Extensions*, Thèse d'Etat, Publ. Math. Fac. Sci. Besançon, Théor. Nombres 1984/1985 & 1985/1986 (1986).

[10] M. Razar, *Central and Genus Class Fields and the Hasse Norm Theorem*, Compositio Math. vol. **35** (1977), 281-298.

[11] M. Rosen, *Ambiguous Divisor Classes in Function Fields*, Journal of Number Theory **9** (1977), 160-174.

[12] M. Rosen, *The Hilbert Class Field in Function Fields*, Expo. Math. **5** (1987), 365-378.

[13] J. Tate, *Global Class Field Theory*, in J.-W.-S. Cassels & A. Fröhlich, Algebraic Number Theory, Academic Press, London (1967), 162-203.

Bruno Anglès
Université Paul Sabatier
Laboratoire Emile Picard
U.F.R. M.I.G.
118 route de Narbonne
F-31062 TOULOUSE Cedex 4
E-mail : angles@picard.ups-tlse.fr

Jean-François Jaulent
Université Bordeaux
Institut de Mathématiques
351, cours de la Libération
F-33405 TALENCE Cedex
jaulent@math.u-bordeaux.fr