Sur les invariants d'Iwasawa des tours cyclotomiques *

Jean-François JAULENT et Christian MAIRE

Abstract. We carry out the computation of the Iwasawa invariants ρ_S^T, μ_S^T, λ_S^T associated to abelian T-ramified S-decomposed ℓ-extensions over the finite steps K_n of the cyclotomic $\mathbb{Z}_\ell$-extension K_∞/K of a number field of CM-type.

Résumé. Nous déterminons explicitement les paramètres d'Iwasawa ρ_S^T, μ_S^T, λ_S^T des ℓ-groupes de S-classes T-infinitésimales $\mathcal{C}\ell_S^T(K_n)$ attaché aux étages finis de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K_∞/K d'un corps de nombres à conjugaison complexe.

0. Introduction

On sait depuis les travaux de K. Iwasawa sur les corps cyclotomiques (cf. [4]) que les ordres respectifs $\ell^{x(n)}$ des ℓ-groupes de classes d'idéaux $\mathcal{C}\ell(K_n)$ attachés aux divers étages K_n de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K_∞ d'un corps de nombres K sont donnés pour n assez grand par une formule explicite de la forme :

$$x(n) \;=\; \mu\ell^n \;+\; \lambda n \;+\; \nu,$$

où ν est un entier relatif (éventuellement négatif) et où λ et μ sont des entiers naturels déterminés par la pseudo décomposition, comme module de torsion sur l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]]$, de leur limite projective $\mathcal{C}(K_\infty) = \varprojlim \mathcal{C}\ell(K_n)$ pour les applications normes, limite que la théorie du corps de classes interprète comme groupe de Galois de la pro-ℓ-extension abélienne non ramifiée maximale H_∞ de K_∞. Il est alors commode de réécrire l'égalité précédente sous la forme :

$$x(n) \;\approx\; \mu\ell^n \;+\; \lambda n,$$

en convenant de tenir pour équivalentes deux suites d'entiers dont la différence est ultimement constante. Sous cette dernière forme l'identité obtenue vaut alors identiquement si l'on remplace les ℓ-groupes $\mathcal{C}\ell(K_n)$ par leurs quotients respectifs d'exposant ℓ^{n+1}, comme expliqué dans [2].

Donnons nous maintenant deux ensembles finis disjoints S et T de places finies de K ; notons S_n et T_n respectivement les ensembles de places de K_n au-dessus de S et de T ; et considérons le ℓ-groupe $\mathcal{C}\ell_S^T(K_n)$ des S-classes T-infinitésimales du corps K_n, que la théorie ℓ-adique du corps de classes identifie au groupe de Galois de la pro-ℓ-extension abélienne maximale de K_n qui est S-décomposée et T-ramifiée (i.e. complètement décomposée aux places de S_n et non ramifiée en dehors de T_n). Les groupes $\mathcal{C}\ell_S^T(K_n)$ ne sont plus généralement finis (du moins dés que l'ensemble T contient suffisamment de places au-dessus de ℓ), mais leurs quotients respectifs d'exposant ℓ^{n+1} le sont encore, et il résulte des arguments de [2] qu'il existe des entiers naturels ρ_S^T, μ_S^T, λ_S^T tels que les ordres respectifs $\ell^{x_S^T(n)}$ des ${}^{\ell^{n+1}}\mathcal{C}\ell_S^T(K_n)$ vérifient l'estimation asymptotique :

$$x_S^T(n) \;\approx\; \rho_S^T(n+1)\ell^n \;+\; \mu_S^T\ell^n \;+\; \lambda_S^T n.$$

*Canadian Math. Bull. 46 (2003), 178-190.

Ici encore les paramètres ρ_S^T, μ_S^T et λ_S^T sont donnés par la pseudo-décomposition élémentaire de la limite projective $\mathcal{C}_T^S(K_\infty) = \varprojlim \mathcal{C}\ell_S^T(K_n)$ regardée comme module noethérien sur l'algèbre d'Iwasawa Λ (avec cette seule nuance que l'invariant λ_S^T diffère d'une unité de l'invariant lambda de $\mathcal{C}_S^T(K_\infty)$ lorsque l'extension K_∞/K est elle-même S-décomposée et T-ramifiée, ce qui a lieu lorsque S est vide et que T contient l'ensemble L des places au-dessus de ℓ).

L'objet de ce travail est de déterminer explicitement ces trois invariants pour S et T arbitraires, lorsque K est un corps de nombres contenant les racines 2ℓ-ièmes de l'unité et admettant une conjugaison complexe (en ce sens que K est une extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps totalement réel K^+), et ce à partir des seules données galoisiennes de l'extension cyclotomique K_∞/K et des *invariants référents*, c'est à dire des paramètres λ et μ correspondant aux cas particuliers $S \cup T = L$, où le couple $(S,\, T)$ constitue une partition de l'ensemble L des places au-dessus de ℓ.

Le calcul des invariants ρ_S^T, μ_S^T et λ_S^T utilise paradoxalement assez peu de théorie d'Iwasawa (essentiellement le théorème d'existence des paramètres établi dans [2]) mais repose principalement sur une utilisation fine des techniques du corps de classes ℓ-adique et, en particulier, sur un raffinement *ad hoc* des identités de dualité données par G. Gras dans son étude systématique sur les théorèmes de réflexion (cf. [1]),identités qui permettent de remplacer les classiques inégalités du Spiegelungssatz par des égalités.

Avant d'aborder ces questions, précisons quelques notations.

1. Principales notations

Nous utilisons dans ce qui suit les conventions suivantes :

K est un corps de nombres totalement imaginaire ayant c places complexes ;
$K_\infty = \bigcup K_n$ est sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique (pour un premier ℓ donné) ;
K_n est l'unique sous-corps de K_∞ de degré ℓ^n sur K (on a donc $K = K_0$) ;
$\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell}$ est le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ identifié à $\mathbb{Z}_\ell$ par le choix d'un générateur topologique γ, et $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma - 1]]$ est l'algèbre d'Iwasawa associée ;

S et T désignent deux ensembles finis disjoints de places finies de K ;
L est l'ensemble des places ℓ-adiques (i.e. au-dessus de ℓ) ;
s, t et l dénombrent respectivement les places de K_∞ au-dessus de S, T et L ;
$S_\ell = S \cap L$ est la partie sauvage de S et $S_0 = S \setminus S_\ell$ la partie modérée de S ;
$T_\ell = T \cap L$ est la partie sauvage de T et $T_0 = S \setminus T_\ell$ la partie modérée de T ;
s_ℓ, s_0, t_ℓ et t_0 dénombrent les places de K_∞ au-dessus de S_ℓ, S_0, T_ℓ et T_0 ;
$\delta^S = \sum_{\mathfrak{p} \in S_\ell} [K_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_\ell]$ est le degré sauvage en S ; de même δ^T en T.

Nous faisons usage également des notations de la théorie ℓ-adique du corps de classes. A chaque étage fini K_n de la tour cyclotomique, nous notons ainsi :

$\mathcal{R}_{\mathfrak{p}_n} = \varprojlim K_{\mathfrak{p}_n}^\times / K_{\mathfrak{p}_n}^{\times \ell^m}$ le compactifié ℓ-adique du groupe multiplicatif $K_{\mathfrak{p}_n}^\times$ du complété de K_n ; puis $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}_n}$ le sous-groupe unité de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}_n}$et $\mu_{\mathfrak{p}_n}$ son sous-groupe de torsion. Cela posé, le corps K_n étant sous-entendu, nous notons :

$\mathcal{J} = \prod_{\mathfrak{p}_n}^{res} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}_n}$ le ℓ-groupe des idèles et $\mathcal{U} = \prod_{\mathfrak{p}_n} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}_n}$ son sous-groupe unité ;
$\mathcal{R} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} K_n^\times$ le ℓ-groupe des idèles principaux ou sous-groupe principal de $\mathcal{J}$;
$\mathcal{E} = \mathcal{R} \cap \mathcal{U} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} E$ le ℓ-adifié du groupe des unités globales (au sens restreint) ;
$\mathcal{D} = \mathcal{J}/\mathcal{U}$ le ℓ-groupe des diviseurs et $\mathcal{P} = \mathcal{R}/\mathcal{E}$ son sous-groupe principal ;
$\mathcal{C}\ell = \mathcal{D}/\mathcal{P}$ le ℓ-groupe des classes de diviseurs (ou d'idéaux au sens restreint).

Ensuite, pour S et T finis disjoints et $\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{p}_n \in T} \mathfrak{p}_n^{\nu_\mathfrak{p}}$, nous écrivons :

$\mathcal{R}_S = \prod_{\mathfrak{p}_n \in S} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}_n}$ le semi-localisé en S et $\mathcal{U}_S = \prod_{\mathfrak{p}_n \in S} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}_n}$ son sous-groupe unité ;
$\mathcal{J}^T = \prod_{\mathfrak{p}_n \notin T} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}_n}$ le cofacteur de $\mathcal{R}_T$ et $\mathcal{U}^T = \prod_{\mathfrak{p}_n \notin T} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}_n}$ son sous-groupe unité ;
$\mathcal{R}^T = \mathcal{R} \cap \mathcal{J}^T$ le sous-groupe principal de $\mathcal{J}^T$ et $\mathcal{E}^T = \mathcal{R} \cap \mathcal{U}^T$;

$\mathcal{J}_S = \mathcal{R}_S\mathcal{U}^S$ le ℓ-groupe des S-idèles et $\mathcal{E}_S = \mathcal{R} \cap \mathcal{J}_S$ le ℓ-groupe des S-unités ;
$\mathcal{J}_S^T = \mathcal{R}_S\mathcal{U}^{ST} = \mathcal{J}^T \cap \mathcal{J}_S$ et $\mathcal{E}_S^T = \mathcal{R} \cap \mathcal{J}_S^T$ le groupe des S-unités T-infinitésimales ;
$\mathcal{J}^m = \mathcal{J}^T\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}$ avec $\mathcal{U}_{\mathfrak{m}} = \prod_{\mathfrak{p}_n \in T} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}_n^\nu}$ et $\mathcal{U}^m = \mathcal{U}^T\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}$, $\mathcal{R}^{\mathfrak{m}} = \mathcal{R} \cap \mathcal{J}^{\mathfrak{m}}$, $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}} = \mathcal{E} \cap \mathcal{J}^{\mathfrak{m}}$;
$\mathcal{J}_S^{\mathfrak{m}} = \mathcal{R}_S\mathcal{U}^{\mathfrak{m}} = \mathcal{J}^{\mathfrak{m}} \cap \mathcal{J}_S$ et $\mathcal{E}_S^{\mathfrak{m}} = \mathcal{R} \cap \mathcal{J}_S^{\mathfrak{m}}$ le groupe des S-unités $\mathfrak{m}$-congruentes ;
$\mathcal{C}\ell_S^T = \mathcal{J}/\mathcal{J}_S^T\mathcal{R}$ le ℓ-groupe des S-classes T-infinitésimales et $\mathcal{C}\ell_S^{\mathfrak{m}} = \mathcal{J}/\mathcal{J}_S^{\mathfrak{m}}\mathcal{R}$ le ℓ-groupe des S-classes de rayon $\mathfrak{m}$.

Enfin, nous notons $(\rho_S^T,\ \mu_S^T,\ \lambda_S^T)$ les paramètres de la suite des quotients d'exposant $\ell^n + 1$ des ℓ groupes de S-classes T-infinitésimales ${}^{\ell^{n+1}}\mathcal{C}\ell_S^T(K_n)$, conformément à la définition (introduite dans [2]) :

Définition 1. *Une suite de ℓ-groupes abéliens finis $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite paramétrée par les invariants (ρ, μ, λ) lorsque les cardinaux $\sharp A_n = \ell^{a(n)}$ sont donnés asymptotiquement par la formule :*

$$a(n) \approx \rho(n+1)\ell^n \ + \ \mu\ell^n \ + \ \lambda n,$$

i.e. lorsque la différence $a(n) - (\rho(n+1)\ell^n + \mu\ell^n + \lambda n)$ est ultimement constante.

2. Identités du miroir

Ces identités relient les invariants d'Iwasawa relatifs au couple (S,T) aux mêmes invariants relatifs au couple transposé (T,S). Elles s'obtiennent en comparant les informations données par la théorie de Kummer avec celles découlant de la théorie du corps de classes, et requièrent de ce fait que l'on dispose de suffisamment de racines de l'unité.

Nous supposons donc dans ce qui suit que K_∞ contient toutes les racines d'ordre ℓ-primaire de l'unité (autrement dit que K_1 contient les racines ℓ^2-ièmes de l'unité) et nous nous intéressons à la ℓ-extension abélienne maximale $H_S^T(K_n)$ de K_n qui est S-décomposée, T-ramifiée et d'exposant ℓ^{n+1}. Pour décrire son radical kummérien et son groupe de Galois, nous avons besoin de quelques notations.

Fixons n assez grand pour que les places de $S \cup T$ ne se décomposent pas dans K_∞/K_n et plaçons nous au niveau n de la tour en omettant systématiquement l'indice n dans ce qui suit. Notons enfin $\mathcal{J}_S^T$ le ℓ-groupe des S-idèles T-infinitésimaux attaché à K_n. Cela posé, nous avons :

Lemme 2. *Avec les conventions précédentes, lorsque la réunion $S \cup T$ contient l'ensemble L des places ℓ-adiques, le radical kummérien attaché à la ℓ-extension abélienne maximale H_S^T de K_n qui est S-décomposée, T-ramifiée et d'exposant ℓ^{n+1} est donné par :*

$$\mathrm{Rad}_T^S = \{\ell^{n+1} \otimes x \in \ell^{-(n+1)}\mathbb{Z}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \otimes \mathcal{R} |\ x \in \mathcal{J}_T^S\mathcal{J}^{\ell^{n+1}}\}.$$

Et le groupe de Galois de H_S^T, qui est le quotient d'exposant ℓ^{n+1} du ℓ-groupe des S-classes T-infinitésimales est donné par :

$$\mathrm{Gal}_S^T = {}^{\ell^{n+1}}(\mathcal{J}/\mathcal{J}_S^T\mathcal{R}) = \mathcal{J}/\mathcal{J}_S^T\mathcal{R}\mathcal{J}^{\ell^{n+1}}.$$

Ces deux modules se correspondant dans la dualité de Kummer, ils sont en particulier isomorphes comme groupes abéliens.

Preuve. Dans l'une et l'autre description (kummérienne ou galoisienne), nous avons tout simplement exprimé les conditions locales de décomposition ou de non ramification, l'hypothèse $L \subset (S \cup T)$ nous dispensant de discuter la question plus délicate de la ramification éventuelle des places ℓ-adiques.

Pour comparer plus commodément les groupes Rad_T^S et Gal_S^T avec leurs homologues Rad_S^T et Gal_T^S, il est astucieux, à l'imitation de [1], de remplacer les conditions aux places de T par une congruence *ad hoc*, ce qui permet de substituer des quotients finis aux groupes de S-classes

T-infinitésimales. Supposons donc T non vide puis, pour chaque place $\mathfrak{p}_n$ de T (en fait de T_n), choisissons un entier $\nu_{\mathfrak{p}_n}$ assez grand pour que le groupe supérieur d'unités locales $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}_n^{\nu_{\mathfrak{p}_n}}}$ soit sans torsion et contenu dans la puissance ℓ^{n+1}-ième du groupe principal $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}_n}$; cela fait, introduisons le diviseur de K_n :

$$\mathfrak{m} \;=\; \prod_{\mathfrak{p}_n \in T} \mathfrak{p}_n^{\nu_{\mathfrak{p}_n}}.$$

Il vient alors :

Lemme 3. *Sous les hypothèses précédentes, le radical de Kummer* Rad_S^T *attaché à l'extension* H_T^S *et le groupe de Galois* Gal_S^T *attaché à l'extension* H_S^T *sont donnés par les isomorphismes :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Rad}_S^T &= \mathrm{Rad}_S^{\mathfrak{m}} = \{\ell^{n+1} \otimes x \in \ell^{-(n+1)}\mathbb{Z}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \otimes \mathcal{R} |\; x \in \mathcal{R}^{\mathfrak{m}} \cap \mathcal{J}_S \mathcal{J}^{\ell^{n+1}}\};\\ \mathrm{Gal}_S^T &\simeq {}^{\ell^{n+1}}\mathcal{C}\ell_S^{\mathfrak{m}} = {}^{\ell^{n+1}}(\mathcal{J}/\mathcal{J}_S^{\mathfrak{m}}\mathcal{R}) = \mathcal{J}/\mathcal{J}_S^{\mathfrak{m}}\mathcal{R}\mathcal{J}^{\ell^{n+1}}.\end{aligned}$$

Preuve. C'est une conséquence facile de l'inclusion $\mathcal{U}_{\mathfrak{m}} \subset \mathcal{U}_T^{\ell^{n+1}}$ qui donne d'abord :

$$\mathcal{J}^{\mathfrak{m}} \cap \mathcal{J}_S\mathcal{J}^{\ell^{n+1}} = \mathcal{J}^T\mathcal{U}_{\mathfrak{m}} \cap \mathcal{R}_S\mathcal{U}^S\mathcal{J}^{\ell^{n+1}} = \mathcal{R}_S\mathcal{U}^{ST}\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{J}^T \cap \mathcal{U}_T\mathcal{J}^{\ell^{n+1}}) = \mathcal{R}_S\mathcal{U}^{ST}\mathcal{U}_T^{\ell^{n+1}}$$

et d'autre part : $\qquad \mathcal{J}_S^{\mathfrak{m}}\mathcal{R}\mathcal{J}^{\ell^{n+1}} = \mathcal{J}_S^T\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}\mathcal{R}\mathcal{J}^{\ell^{n+1}} = \mathcal{J}_S^T\mathcal{R}\mathcal{J}^{\ell^{n+1}}.$

Définissons maintenant le *pseudo-radical* de K_n relatif à $\mathfrak{m}$ et S par la formule :

$${}_{\ell^{n+1}}\mathfrak{R}_S^{\mathfrak{m}} = \{\ell^{n+1} \otimes x \in \ell^{-(n+1)}\mathbb{Z}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \otimes \mathcal{R}^{\mathfrak{m}} |\; x \in \mathcal{J}_S\mathcal{J}^{\ell^{n+1}}\}\ ;$$

et notons

$${}_{\ell^{n+1}}\mathfrak{E}_S^{\mathfrak{m}} = \{\ell^{n+1} \otimes x \in \ell^{-(n+1)}\mathbb{Z}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \otimes \mathcal{R}^{\mathfrak{m}} |\; x \in \mathcal{E}_S^{\mathfrak{m}}\} \simeq {}^{\ell^{n+1}}\mathcal{E}_S^{\mathfrak{m}}$$

son sous-groupe construit sur les S-unités congrues à 1 modulo $\mathfrak{m}$. Le groupe ${}_{\ell^{n+1}}\mathfrak{R}_S^{\mathfrak{m}}$ est susceptible d'une double interprétation, kummérienne et galoisienne, qui est la clef des identités du miroir :

Théorème 4. *Le pseudo-radical satisfait les suites exactes courtes de dualité :*

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & {}_{\ell^{n+1}}(\mathcal{R}/\mathcal{R}^{\mathfrak{m}})/{}_{\ell^{n+1}}\mu & \longrightarrow & {}_{\ell^{n+1}}\mathfrak{R}_S^{\mathfrak{m}} & \xrightarrow{\phi} & {}_{\ell^{n+1}}\mathrm{Rad}_S^{\mathfrak{m}} & \longrightarrow & 1\\ & & & & \| & & & & \\ 1 & \longrightarrow & {}_{\ell^{n+1}}\mathfrak{E}_S^{\mathfrak{m}} & \longrightarrow & {}_{\ell^{n+1}}\mathfrak{R}_S^{\mathfrak{m}} & \xrightarrow{\psi} & {}_{\ell^{n+1}}\mathcal{C}\ell_S^{\mathfrak{m}} & \longrightarrow & 1\ ,\end{array}$$

où ${}_{\ell^{n+1}}\mu$ *désigne ici le* ℓ*-groupe des racines* ℓ^{n+1}*-ièmes de l'unité dans* K_n*.*

Preuve. L'application ϕ est la surjection naturelle de ${}_{\ell^{n+1}}\mathfrak{R}_S^{\mathfrak{m}}$ dans $\mathrm{Rad}_S^{\mathfrak{m}}$; son noyau est constitué des tenseurs $\ell^{n+1} \otimes x$ de $\mathfrak{R}_S^{\mathfrak{m}}$ pour lesquels x est la puissance ℓ^{n+1}-ième d'un élément y de $\mathcal{R}$ qui est défini à une racine ℓ^{n+1}-ième de l'unité près. L'application ψ s'obtient comme suit : Soit $\ell^{-(n+1)} \otimes x$ dans $\ell^{-(n+1)}\mathbb{Z}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \otimes \mathcal{R}^{\mathfrak{m}}$, disons $x = \mathfrak{x}_S\, \mathfrak{y}^{\ell^{n+1}}$ avec $\mathfrak{x}_S \in \mathcal{J}_S$ et $\mathfrak{y} \in \mathcal{J}$; le théorème d'approximation simultanée nous permet d'écrire $\mathfrak{y} = y\,\mathfrak{x}$ pour un y de $\mathcal{R}$ et un $\mathfrak{x}$ de $\mathcal{J}^{\mathfrak{m}}$; l'image de $\ell^{-(n+1)} \otimes x$ par ψ est alors la classe de $\mathfrak{x}$ dans $\mathcal{C}\ell_S^{\mathfrak{m}} = \mathcal{J}/\mathcal{J}_S^{\mathfrak{m}}\mathcal{R} \simeq \mathcal{J}^{\mathfrak{m}}/\mathcal{J}_S^{\mathfrak{m}}\mathcal{R}^{\mathfrak{m}}$. Elle est parfaitement définie et le noyau de ψ est exactement ${}_{\ell^{n+1}}\mathfrak{E}_S^{\mathfrak{m}}$.

Évaluons maintenant les paramètres des groupes extrêmes :

Proposition 5. *Dans les suites exactes de dualité, les groupes intervenant à droite comme à gauche sont paramétrés ; il en est donc de même pour les termes médians.*

(i) *Les éléments de la racine de* $\mathcal{R}^{\mathfrak{m}}$ *dans* $\mathcal{R}$ *étant des unités en* T*, le théorème d'approximation simultanée donne immédiatement :*

$${}_{\ell^{n+1}}(\mathcal{R}/\mathcal{R}^{\mathfrak{m}}) \simeq {}_{\ell^{n+1}}(\mathcal{U}_T/\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}) \simeq {}^{\ell^{n+1}}(\mathcal{U}_T/\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}) = {}^{\ell^{n+1}}\mathcal{U}_T\ ;$$

et ces derniers modules étant paramétrés par $(\delta^T,\ 0,\ t)$*, les quotients* ${}_{\ell^{n+1}}(\mathcal{R}/\mathcal{R}^{\mathfrak{m}})/{}_{\ell^{n+1}}\mu$ *le sont par* $(\delta^T,\ 0,\ t-1)$*.*

(ii) *Les éléments de $\mathfrak{E}_S^{\mathfrak{m}}$ étant construits sur les S-unités de $\mathcal{R}^{\mathfrak{m}}$, il vient :*

$$_{\ell^{n+1}}\mathfrak{E}_S^{\mathfrak{m}} \;\simeq\; {}^{\ell^{n+1}}\mathcal{E}_S^{\mathfrak{m}} \;\simeq\; {}^{\ell^{n+1}}(\mathcal{E}_S/\mathcal{E}_S^{tor}) \;,$$

où $\mathcal{E}_S^{tor}$ est le ℓ-groupe des racines de l'unité dans K_n ; et le théorème de Dirichlet pour les S-unités donne pour paramètres $(c,\ 0,\ s-1)$.

(iii) *Les groupes de S-classes de rayon $\mathfrak{m}$ étant finis, il vient de même :*

$$_{\ell^{n+1}}\mathcal{C}\ell_S^{\mathfrak{m}} \;\simeq\; {}^{\ell^{n+1}}\mathcal{C}\ell_S^{\mathfrak{m}} \;=\; {}^{\ell^{n+1}}\mathcal{C}\ell_S^{T} \;,$$

dont les paramètres sont précisément $(\rho_S^T,\ \mu_S^T,\ \lambda_S^T)$.

(iv) *Enfin, la dualité entre radical kummérien et groupe de Galois nous donne :*

$$\mathrm{Rad}_S^{\mathfrak{m}} \;=\; \mathrm{Rad}_S^T \;\simeq\; \mathrm{Gal}_T^S \;\simeq\; {}^{\ell^{n+1}}\mathcal{C}\ell_T^S \;,$$

ce qui fait apparaître les paramètres conjugués $(\rho_T^S,\ \mu_T^S,\ \lambda_T^S)$.

Preuve. C'est clair.

Comparant alors les paramètres des pseudo-radicaux $_{\ell^{n+1}}\mathfrak{R}_S^{\mathfrak{m}}$ donnés par les suites exactes de dualité, et observant que l'hypothèse $L \subset S \cup T$ se traduit en particulier par l'égalité entre degrés

$$\delta^S \;+\; \delta^T \;=\; 2c \;,$$

nous obtenons les identités attendues :

Théorème 6. *Lorsque le corps de nombres K contient les racines 2ℓ-ièmes de l'unité et si la réunion $S \cup T$ contient l'ensemble L des places ℓ-adiques, les paramètres d'Iwasawa des ℓ-groupes ${}^{\ell^{n+1}}\mathcal{C}\ell_S^T(K_n)$ vérifient les identités du miroir :*

(i) $\rho_S^T + \frac{1}{2}\delta^S = \rho_T^S + \frac{1}{2}\delta^T$;

(ii) $\mu_S^T = \mu_T^S$;

(iii) $\lambda_S^T + s = \lambda_T^S + t$.

Prenant par exemple $T = L$ et $S = \emptyset$, nous retrouvons le résultat bien connu :

Corollaire 7. *Sous les mêmes hypothèses, les invariants paramétrant la suite $({}^{\ell^{n+1}}\mathcal{C}\ell^L(K_n))_{n\in\mathbb{N}}$ des quotients d'exposant ℓ^{n+1} des ℓ-groupes de classes infinitésimales des corps K_n sont donnés, à partir de μ_L et λ_L, par les formules :*

$$\rho^L = \frac{1}{2}\;\delta^L = c \;, \qquad \mu^L = \mu_L \;, \qquad \lambda^L = \lambda_L + l \;.$$

Remarque. En termes de Λ-modules, cela revient à dire que les invariants d'Iwasawa de la limite projective $\mathcal{C}^L = \varprojlim \mathcal{C}\ell^L(K_n)$ (que la théorie du corps de classes identifie au groupe de Galois de la pro-ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale de K_∞) sont respectivement c, μ_L et $\lambda_L + l - 1$, puisqu'il faut alors tenir compte du fait que la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K_∞/K est elle-même ℓ-ramifiée.

3. Détermination du paramètre ρ_S^T

Comme nous allons le voir, le calcul de l'invariant ρ_S^T est totalement indépendant des conjectures ℓ-adiques standard (i.e. de Leopoldt et Gross-Kuz'min). Ce phénomène peut être même regardé comme emblématique de l'esprit de la théorie d'Iwasawa : les groupes de défaut de ces conjectures étant bornés lorsqu'on monte la tour cyclotomique, elles sont de ce fait sans incidence sur les paramètres de type ρ ou μ. En d'autres termes les anomalies diophantiennes se décantent le long de la tour pour laisser apparaître l'infrastructure plus simple.

Cela ne veut pas dire cependant que la détermination pratique du paramètre ρ soit pour autant triviale. Nous nous plaçons donc pour ce faire dans le cas, techniquement plus facile, où les corps considérés admettent une conjugaison complexe. Autrement dit, nous supposons dans ce qui suit que K est une extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps K^+ totalement réel.

Introduisons une définition :

Définition 8. *Supposons que le corps K admette une conjugaison complexe τ (fixant un sous-corps K^+ totalement réel). Pour chaque ensemble $S = S_\ell$ de places ℓ-adiques, de complémentaire $\bar{S} = L \setminus S$, nous écrivons $\hat{S} = S \cup S^\tau$ le saturé de S pour la conjugaison et $\check{S} = S \cap S^\tau = L \setminus \widehat{\bar{S}}$ son cosaturé.*

Cela posé, nous avons :

Théorème 9. *Si K admet une conjugaison complexe, l'invariant ρ_S^T est donné pour S et T finis disjoints quelconques par la formule :*

$$\rho_S^T \;=\; \frac{1}{2}\, \delta^{\check{T}_\ell}.$$

En particulier, il est indépendant de S comme de la partie modérée T_0 de T.

Pour établir ce résultat, nous allons relier l'invariant ρ_S^T à la $\mathbb{Z}_\ell$-dimension du ℓ-groupe des T-unités S-infinitésimales. Supposons provisoirement $L \subset (S \cup T)$ et introduisons le *pseudo-radical S-décomposé et T-infinitésimal* (cf. [3]) :

$$_{\ell^{n+1}}\mathfrak{R}_T^S(K_n) = \{\ell^{n+1} \otimes x \in \ell^{-(n+1)}\mathbb{Z}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \otimes \mathcal{R}^S(K_n) \mid x \in \mathcal{J}_T(K_n)\mathcal{J}(K_n)^{\ell^{n+1}}\}.$$

Analoguement au Théorème 4, nous avons :

Proposition 10. *Sous la condition $L \subset (S \cup T)$, les suites exactes de dualité pour les pseudo-radicaux S-décomposés et T-infinitésimaux s'écrivent :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & _{\ell^{n+1}}\mathcal{U}_T & \longrightarrow & _{\ell^{n+1}}\mathfrak{R}_S^T & \longrightarrow & _{\ell^{n+1}}\mathrm{Rad}_S^T & \longrightarrow & 1 \\
 & & & & \Big\| & & & & \\
1 & \longrightarrow & _{\ell^{n+1}}\mathfrak{E}_S^T & \longrightarrow & _{\ell^{n+1}}\mathfrak{R}_S^T & \longrightarrow & _{\ell^{n+1}}\mathcal{C}\ell_S^T & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

Dans celles-ci les sous-groupes de ℓ^{n+1}-torsion des groupes d'unités semi-locales $\mathcal{U}_T$ ont pour paramètres $(0,0,t)$; tandis que ceux des ℓ-groupes de S-classes T-infinitésimales $\mathcal{C}\ell_S^T$ ont pour paramètres $(0, \mu_S^T, \lambda_S^T - \varepsilon_S^T)$, où ε_S^T mesure le degré des facteurs cyclotomiques dans le polynôme caractéristique du sous-module de Λ-torsion de leur limite projective $\mathcal{C}_S^T = \varprojlim \mathcal{C}\ell_S^T(K_n)$.

En particulier les sous-groupes $_{\ell^{n+1}}\mathfrak{E}_S^T = {}^{\ell^{n+1}}\mathcal{E}_S^T$ des $_{\ell^{n+1}}\mathfrak{R}_S^T$ construits sur les S-unités T-infinitésimales sont paramétrés par $(\rho_T^S, 0, s + \varepsilon_S^T)$.

Preuve. Le seul point délicat est le dénombrement des éléments de ℓ^{n+1}-torsion dans $\mathcal{C}\ell_S^T$. On peut d'abord remarquer que les facteurs de type ρ, qui correspondent à la partie Λ-pseudo-libre de la limite projective $\mathcal{C}_S^T$, ne donnent pas de $\mathbb{Z}_\ell$-torsion, donc n'interviennent pas dans $_{\ell^{n+1}}\mathcal{C}\ell_S^T(K_n)$. De même les facteurs cyclotomiques de $\mathcal{C}_S^T$ (i.e. les pseudo-composantes élémentaires du type $\Lambda/(f)$, où f divise un $\omega_n = \gamma^{\ell^n} - 1$) donnent des facteurs $\mathbb{Z}_\ell$-libres dans $\mathcal{C}\ell_S^T$ et viennent donc en déduction du paramètre λ_S^T de $\mathcal{C}_S^T$ dans l'évaluation de la ℓ^{n+1}-torsion de $\mathcal{C}\ell_S^T$. Ce point est d'ailleurs de peu d'importance ici où seul nous intéresse le paramètre ρ. En fin de compte, nous obtenons ainsi pour $_{\ell^{n+1}}\mathfrak{E}_S^T(K_n)$ le paramétrage annoncé, compte tenu des identités du miroir établies plus haut.

Corollaire 11. *L'invariant ρ_S^T est donné pour S et T finis disjoints quelconques par la formule asymptotique :*

$$\rho_S^T\, \ell^n \;\approx\; \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E}^{\overline{T}_\ell}(K_n).$$

Preuve. Observons d'abord que la Proposition entraîne le Corollaire sous la restriction $L \subset (S \cup T)$, puisque nous avons alors d'après ce qui précède :

$$\rho_S^T\ \ell^n\ \approx\ \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E}_T^S(K_n) = \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E}^{S_\ell}(K_n) = \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E}^{\overline{T}_\ell}(K_n),$$

car S_0 (en exposant) et T (en indice) n'ont qu'une incidence bornée sur le $\mathbb{Z}_\ell$-rang. Il reste à voir que cette condition est superflue, par exemple en constatant que la quantité ρ_S^T est indépendante de S. Or cela est clair puisque les sous-groupes de décomposition attachés aux places de S dans $H^T(K_\infty)/K_\infty$ engendrent un sous-module de $\mathbb{Z}_\ell$-rang au plus s du groupe de Galois $\mathcal{C}^T$, de sorte qu'on a banalement $\rho_S^T = \rho^T$.

Preuve du Théorème. Il s'agit d'évaluer, à une quantité bornée près, la dimension du ℓ-module des unités $\overline{T}_\ell$-infinitésimales. Passons donc aux tensorisés $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E}^{\overline{T}_\ell}$ et observons que nous pouvons remplacer $\overline{T}_\ell$ par son saturé $\widehat{\overline{T}}_\ell$, puisque toute unité $\mathfrak{p}_n$-infinitésimale est banalement $\mathfrak{p}_n^\tau$-infinitésimale. Cela fait, comme $\mathcal{E}$ et $\mathcal{U}_{\widehat{T}_\ell}$ sont stables par τ, nous pouvons spécialiser aux composantes réelles l'application de localisation $Loc_{\widehat{T}_\ell} \mid \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E} \mapsto \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{U}_{\widehat{T}_\ell}$ de sorte que $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E}^{\overline{T}_\ell}$ apparaît comme le noyau du morphisme naturel $Loc^+_{\widehat{T}_\ell} \mid \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E} \mapsto (\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{U}_{\widehat{T}_\ell})^+$. Maintenant, puisque le défaut de la conjecture de Leopoldt reste borné dans la tour cyclotomique K_∞/K, l'image naturelle de $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E}$ est de codimension bornée dans

$$(\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{U}_L)^+\ =\ (\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{U}_{\widehat{T}_\ell})^+\ \oplus\ (\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{U}_{\check{T}_\ell})^+\ .$$

En particulier, noyau et conoyau du morphisme de localisation $Loc^+_{\widehat{T}_\ell}$ sont ainsi des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces de dimension stationnaire et il vient donc finalement :

$$\rho_S^T\ \ell^n \approx \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E}^{\overline{T}_\ell} = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E}^{\widehat{\overline{T}}_\ell} \approx \dim_{\mathbb{Q}_\ell} (\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{U}_{\check{T}_\ell})^+ = \frac{1}{2}\ \delta^{\check{T}_\ell}\ \ell^n\ ;$$

ce qui donne bien l'égalité annoncée :

$$\rho_S^T\ =\ \frac{1}{2}\ \delta^{\check{T}_\ell}\ .$$

Remarque. Lorsque les ensembles de places S et T sont stables par conjugaison complexe, il est possible (de façon canonique si ℓ est impair, à un groupe d'ordre au plus 2 près si ℓ vaut 2) de décomposer les ℓ-groupes $\mathcal{C}\ell_S^T$ en une composante réelle $\mathcal{C}\ell_S^{T+}$ et une composante imaginaire $\mathcal{C}\ell_S^{T-}$, donc en particulier d'écrire :

$$\rho_S^T\ =\ \rho_S^{T+}\ +\ \rho_S^{T-}\ .$$

Les considérations qui précédent montrent alors que l'on a :

$$\rho_S^{T+}\ =\ 0\ , \qquad \text{i.e.} \qquad \rho_S^T\ =\ \rho_S^{T-}\ =\ \frac{1}{2}\ \delta^{\check{T}_\ell}\ .$$

4. Application au paramètre μ_S^T

Considérons maintenant les paramètres μ_S^T. La proposition qui suit permet d'en ramener l'étude au seul cas où $S \cup T$ est une partition de L :

Théorème 12. *L'invariant μ_S^T ne dépend que de la partie sauvage T_ℓ de l'ensemble T. Plus précisément, pour tous S et T finis et disjoints, on a :*

$$\mu_S^T\ =\ \mu^{T_\ell}\ =\ \mu_{\overline{T}_\ell}^{T_\ell}\ =\ \mu_{T_\ell}^{\overline{T}_\ell}\ =\ \mu^{\overline{T}_\ell}\ .$$

Preuve. Le paramètre μ_S^T n'est autre, en effet, que l'invariant mu d'Iwasawa associé à la limite projective $\mathcal{C}_S^T = \varprojlim Cl_S^T(K_n)$ des ℓ-groupes de S-classes T-infinitésimales, limite que la théorie du corps de classes interprète comme groupe de Galois de la pro-ℓ-extension abélienne $H_S^T(K_\infty)$ de K_∞ qui est S-décomposée et T-ramifiée. En particulier, $\mathcal{C}_S^T$ étant le quotient de $\mathcal{C}^T$ par le $\mathbb{Z}_\ell$-module de rang fini engendré par les sous-groupes de décomposition des places de S dans l'extension abélienne $H^T(K_\infty)/K_\infty$, les deux Λ-modules $\mathcal{C}_S^T$ et $\mathcal{C}^T$ ont même invariant mu, ce qui nous donne :

$$\mu_S^T \;=\; \mu^T \;.$$

De façon semblable, $\mathcal{C}^{T_\ell}$ est le quotient de $\mathcal{C}^T$ par le $\mathbb{Z}_\ell$-module de rang fini engendré par les sous-groupes d'inertie des places de T_0 dans l'extension abélienne $H^T(K_\infty)/K_\infty$, de sorte que nous avons également :

$$\mu^T \;=\; \mu^{T_\ell} \;.$$

L'identité obtenue $\mu_S^T \;=\; \mu^{T_\ell}$, appliquée avec $S = \overline{T}_\ell$, nous donne alors :

$$\mu^T \;=\; \mu_{\overline{T}_\ell}^{T_\ell} \;;$$

et le Théorème en résulte via les identités du miroir.

Théorème 13. *Pour toute partie T_ℓ de L stable par la conjugaison complexe, l'invariant μ^{T_ℓ} vérifie l'inégalité :*

$$\mu^{T_\ell} \leq \mu = \mu_L \;.$$

En particulier, la conjecture d'Iwasawa $\mu = 0$ entraîne $\mu^{T_\ell} = 0$ pour tout sous-ensemble saturé T_ℓ de L, donc finalement $\mu_S^T = 0$ pour tous S et T finis disjoints dès que T_ℓ est saturé.

Pour établir ce résultat, prenons d'abord une partie quelconque $T = T_\ell$ dans L de complémentaire $\overline{T}_\ell = L \setminus T_\ell$. Pour chaque entier naturel n, notons $H_{T_\ell}^{\overline{T}_\ell}$ la ℓ-extension abélienne maximale de K_n qui est $\overline{T}_\ell$-ramifiée T_ℓ-décomposée et d'exposant ℓ^{n+1}. Écrivons de même $H_{\overline{T}_\ell}^{T_\ell}$ celle qui est T_ℓ-ramifiée $\overline{T}_\ell$-décomposée et d'exposant ℓ^{n+1}. Le compositum $H_{\overline{T}_\ell}^{T_\ell} H_{T_\ell}^{\overline{T}_\ell}$ est alors contenu dans la ℓ-extension H^L abélienne ℓ-ramifiée d'exposant ℓ^{n+1}, tandis que l'intersection $H_{\overline{T}_\ell}^{T_\ell} \cap H_{T_\ell}^{\overline{T}_\ell}$ est la ℓ-extension H_L abélienne non ramifiée et ℓ-décomposée d'exposant ℓ^{n+1} ; d'où le schéma de corps :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & H^L \arrow[d, dash] & \\
 & H_{T_\ell}^{\overline{T}_\ell} H_{\overline{T}_\ell}^{T_\ell} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
H_{T_\ell}^{\overline{T}_\ell} \arrow[dr, dash] & & H_{\overline{T}_\ell}^{T_\ell} \arrow[dl, dash] \\
 & H_L \arrow[d, dash] & \\
 & K_n &
\end{tikzcd}$$

Nous en déduisons en particulier l'égalité entre degrés :

$$[H^L : H_{T_\ell}^{\overline{T}_\ell} H_{\overline{T}_\ell}^{T_\ell}] \;=\; \frac{[H^L : K_n]\;[H_L : K_n]}{[H_{T_\ell}^{\overline{T}_\ell} : K_n][H_{\overline{T}_\ell}^{T_\ell} : K_n]} \;.$$

Et dans la fraction à droite, tous les facteurs sont paramétrés. Compte tenu des résultats obtenus plus haut, nous en concluons immédiatement :

Lemme 14. *La suite de ℓ-groupes abéliens $\mathrm{Gal}(H^L(K_n)/H_{T_\ell}^{\overline{T}_\ell}(K_n)H_{\overline{T}_\ell}^{T_\ell}(K_n))$ a pour paramètres :*

$$\begin{aligned}
&(i)\ \rho^L + \rho_L - \rho_{T_\ell}^{\overline{T}_\ell} - \rho_{\overline{T}_\ell}^{T_\ell} \;=\; c - \tfrac{1}{2}(\delta^{\check{\overline{T}}_\ell} + \delta^{\check{T}_\ell})\,;\\
&(ii)\ \mu^L + \mu_L - \mu_{T_\ell}^{\overline{T}_\ell} - \mu_{\overline{T}_\ell}^{T_\ell} \;=\; 2\ (\mu - \mu^{\overline{T}_\ell})\,;\\
&(iii)\ \lambda^L + \lambda_L - \lambda_{T_\ell}^{\overline{T}_\ell} - \lambda_{\overline{T}_\ell}^{T_\ell} \;=\; 2\ (\lambda_L + t_\ell - \lambda_{\overline{T}_\ell}^{T_\ell}).
\end{aligned}$$

Preuve. C'est une conséquence facile du calcul du paramètre ρ_S^T déjà effectué et des identités du miroir.

Preuve du Théorème. Sous la condition de saturation $T_\ell = \check{T}_\ell$, qui entraîne $\overline{T}_\ell = \check{\overline{T}}_\ell$, la différence $c - \frac{1}{2}(\delta^{\check{\overline{T}}_\ell} + \delta^{\check{T}_\ell})$ est nulle. Le terme dominant dans la formule de paramétrage devant être positif, nous en déduisons l'inégalité attendue.

Les arguments précédents ne permettant pas de conclure lorsque l'ensemble T_ℓ n'est pas stable par conjugaison, disons un mot du cas resté ouvert. Partons d'une partie insaturée T_ℓ de L et écrivons la :

$$T_\ell \;=\; \check{T}_\ell \cup S_\ell,$$

avec $\check{S}_\ell = \emptyset$. Pour chaque entier naturel n, considérons maintenant la ℓ-extension abélienne maximale $H^{T_\ell}(K_n)$ de K_n qui est T_ℓ-ramifiée et d'exposant ℓ^{n+1} et comparons la à sa sous-extension $\check{T}_\ell$-ramifiée $H^{\check{T}_\ell}(K_n)$. D'après le Théorème 9, nous avons :

$$\rho^{T_\ell} \;=\; \frac{1}{2}\,\delta^{\check{T}_\ell} \;= \rho^{\check{T}_\ell}\ ;$$

d'où l'inégalité entre les paramètres dominants :

Proposition 15. *Pour toute partie finie T_ℓ de L, on a l'inégalité :*

$$\mu^{T_\ell} \geq \mu^{\check{T}_\ell}\ .$$

Exemple. Si T est une partie de L qui est stable par la conjugaison complexe τ et $\mathfrak{p}$ une place de K qui est décomposée par cette même conjugaison, il vient ainsi :

$$\mu^{T\cup\{\mathfrak{p}\}} \;=\; \mu^{T\cup\{\mathfrak{p}^\tau\}} \;\geq\; \mu^T\ .$$

Remarque. Nous nous sommes limités dans cette section à l'étude des paramètres μ. Il est possible naturellement de raffiner les arguments avancés pour dénombrer dans chacun des Λ-modules étudiés $\mathcal{C}_S^T$ les pseudo-composantes élémentaires de la forme $\Lambda/\ell^k\Lambda$ pour chaque entier naturel k (par exemple, en considérant les quotients d'exposant ℓ^k des ℓ-groupes de S-classes T-infinitésimales). On obtiendrait de cette façon des inégalités en tous points analogues à celles données ici.

5. Etude du paramètre λ_S^T

Venons en enfin aux paramètres λ_S^T. Une conséquence facile des identités du miroir est l'égalité :

Théorème 16. *Soient S et T deux ensembles finis disjoints de places (finies) de K. On a alors :*

$$\lambda_S^T \;=\; \lambda_{S_\ell}^{T_\ell} + t_0\ ,$$

où t_0 est le cardinal de $T_0 = T \setminus T_\ell$, sauf dans le cas spécial $L \subset T$ & $S = S_0 \neq \emptyset$, où l'on a :

$$\lambda_S^T \;=\; \lambda^L + t_0 - 1 \;=\; \lambda + t_0 + l - 1\ .$$

Pour établir ce résultat, observons d'abord que les places modérées de S n'interviennent qu'exceptionnellement dans l'invariant λ_S^T : en effet, la montée dans la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique ayant épuisé toute possibilité d'inertie aux places modérées, il revient au même de leur demander d'être non ramifiées dans une ℓ-extension donnée de K_∞ ou d'y être complètement décomposées ; en particulier les groupes $\mathcal{C}_S^T$ et $\mathcal{C}_{S_\ell}^T$ coïncident et ils ont de ce fait les mêmes invariants. Or ces invariants sont essentiellement aussi ceux qui paramètrent les groupes $\mathcal{C}\ell_S^T(K_n)$ et $\mathcal{C}\ell_{S_\ell}^T(K_n)$. Plus précisément :

Lemme 17. *Soient S et T comme précédemment. On a $\lambda(\mathcal{C}_S^T) = \lambda(\mathcal{C}_{S_\ell}^T)$ et :*

(i) $\lambda_S^T = \lambda(\mathcal{C}_S^T)$, sauf pour $S = \emptyset$ & $L \subset T$ où l'on a $\lambda_S^T = \lambda(\mathcal{C}_S^T) + 1$;

(ii) $\lambda_{S_\ell}^T = \lambda(\mathcal{C}_{S_\ell}^T)$, sauf pour $S = \emptyset$ & $L \subset T$ où l'on a $\lambda_{S_\ell}^T = \lambda(\mathcal{C}_{S_\ell}^T) + 1$.

Preuve du Théorème. Plaçons nous en dehors du cas spécial et supposons d'abord que nous ayons $L \subset (T \cup S)$. Sous cette hypothèse, les identités du miroir nous donnent successivement :

$$\lambda_S^T = \lambda_{S_\ell}^T = \lambda_T^{S_\ell} + t - s_\ell = \lambda_{T_\ell}^{S_\ell} + t - s_\ell = (\lambda_{S_\ell}^{T_\ell} + s_\ell - t_\ell) + t - s_\ell = \lambda_{S_\ell}^{T_\ell} + t_0 \ ,$$

comme attendu. En termes de théorie d'Iwasawa, cette égalité exprime que les sous-groupes d'inertie des places de T_0 engendrent un sous-module de $\mathbb{Z}_\ell$-rang t_0 du Λ-module $\mathcal{C}_S^T$ regardé comme groupe de Galois de la ℓ-extension abélienne T-ramifiée S-décomposée $H_S^T(K_\infty)$ de K_∞. En d'autres termes, puisque chacun de ces sous-groupes est procyclique et qu'il y en a t_0, cela signifie que les groupes d'inertie des places de T_0 sont en somme directe, autrement dit que la ramification modérée est *déployée* dans $H_S^T(K_\infty)/K_\infty$.

Remplaçons maintenant S par une de ses parties S'. Puisque le groupe $\mathcal{C}_S^T$ est un quotient de $\mathcal{C}_{S'}^T$, la même propriété est *a fortiori* vraie dans l'extension $H_{S'}^T(K_\infty)/K_\infty$. Et l'identité annoncée vaut donc indépendamment de l'hypothèse $L \subset (T \cup S)$.

Scolie 18. *Pour S et T finis disjoints (quelconques), on a toujours l'égalité :*

$$\lambda(\mathcal{C}_S^T) \ = \ \lambda(\mathcal{C}_{S_\ell}^{T_\ell}) + t_0 \ .$$

Références

[1] G. Gras, *Théorèmes de réflexion*, J. Thçor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 399–499.

[2] J.-F. Jaulent, *L'arithmétique des ℓ-extensions (Thèse d'État)*, Pub. Math. Fac. Sci. Besançon Théor. Nombres 1985-86, (1986).

[3] J.-F. Jaulent, *La Théorie de Kummer et le K_2 des corps de nombres* , J. Théor. Nombres Bordeaux **2** (1990), 377-411.

[4] J.-P. Serre , *Classes des corps cyclotomiques (d'après Iwasawa)*, Séminaire Bourbaki, exp. 174 (1958).

Jean-François Jaulent
Université Bordeaux 1
Institut de Mathématiques
351, cours de la Libération
F-33405 TALENCE Cedex
jaulent@math.u-bordeaux.fr

Christian Maire
Université Bordeaux 1
Institut de Mathématiques
351, cours de la Libération
F-33405 TALENCE Cedex
maire@math.u-bordeaux.fr