2-groupe des classes positives d'un corps de nombres et noyau sauvage de la K-théorie*

Version corrigée

Jean-François JAULENT et Florence SORIANO-GAFIUK

Résumé. Nous déterminons le 2-rang du noyau sauvage $WK_2(F)$ d'un corps de nombres F en introduisant un 2-groupe de classes *ad hoc* construit sur les diviseurs logarithmiques signés du corps considéré. Le résultat principal ainsi obtenu peut être regardé comme la généralisation pour $\ell = 2$ de l'isomorphisme canonique ${}_\ell\mu_F \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \simeq {}^\ell WK_2(F)$ établi pour ℓ impair dans un travail précédent (cf. [J$_1$], [JSo]). Le critère général de trivialité du 2-noyau sauvage que nous donnons conduit dans le cas particulier des corps quadratiques à une interprétation logarithmique simples des conditions diophantiennes obtenues par d'autres auteurs.

Abstract. We compute the 2-rank of the wild kernel $WK_2(F)$ of a number field by constructing a 2-class group *ad hoc.* The main result generalizes in the intricate case $\ell = 2$ the canonical isomorphism ${}_\ell\mu_F \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \simeq {}^\ell WK_2(F)$ established for odd primes ℓ under the assumption $\mu_\ell \subset F$ in a previous article (cf. [J$_1$], [JSo]). It involves a criterion of triviality for the 2-part of the wild kernel of Galois fields which, in the particular case of quadratic fields, leads to a logarithmic interpretation of the diophantine conditions obtained by other authors.

Introduction

On sait que si F est un corps de nombres, le noyau $WK_2(F)$ dans $K_2(F)$ des symboles sauvages donnés par la théorie locale du corps de classes est un groupe fini dont l'arithmétique est mystérieusement reliée à celle des groupes de classes. Par exemple, si F contient les racines 2ℓ-ièmes de l'unité, pour un premier donné ℓ, la formule explicite pour le symbole de HILBERT $\left(\frac{\zeta,\, x}{F_\mathfrak{p}}\right)$ donnée dans [J$_1$] montre que le ℓ-rang du groupe $WK_2(F)$ coïncide avec celui du ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$; et, plus précisément, que l'on a un isomorphisme naturel de modules galoisiens :

$$ {}_\ell\mu_F \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \simeq WK_2(F)/WK_2(F)^\ell. $$

Lorsque le corps de nombres F ne contient pas de racine primitive ℓ-ième de l'unité ζ, il est toujours possible, le nombre premier ℓ étant alors impair, d'introduire l'extension relativement abélienne $L = K(\zeta)$ dont le degré $[L : F]$ est étranger à ℓ, et d'utiliser les techniques classiques des algèbres semi-simples pour interpréter le quotient

$$ {}^\ell WK_2(F) = WK_2(F)/WK_2(F)^\ell $$

*J. Number Th. **108** (2004), 187–208.

comme une composante isotypique convenable du groupe de classes logarithmiques ${}^{\ell}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L = \widetilde{\mathcal{C}\ell}_L/\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^{\,\ell}$ relativement à l'action du groupe $\Delta = \mathrm{Gal}(L/F)$, donc ici encore de caractériser la trivialité du ℓ-noyau hilbertien en termes de classes logarithmiques, ainsi qu'il est fait dans [JSo].

Pour $\ell = 2$, en revanche, l'isomorphisme précédent peut être en défaut lorsque le corps F ne contient pas les racines 4-ièmes de l'unité comme l'attestent les calculs menés dans [S_1] pour les corps quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{\pm d})$. Et il n'est pas possible de pallier simplement cette difficulté en introduisant le sur-corps $F[i]$ et en appliquant les mêmes techniques que dans le cas ℓ impair, du fait des phénomènes de capitulation qui apparaissent dans l'extension $F[i]/F$. Il suit que le 2-groupe des classes logarithmiques défini dans [J_2] n'est pas dans ce cas l'invariant de type classe adapté à l'étude du 2-noyau hilbertien.

De fait, si l'on examine attentivement la formule explicite pour le symbole sauvage $\left(\frac{-1,\ x}{F_{\mathfrak{p}}}\right)$ établie dans [J_1], on constate qu'elle est en défaut (en l'absence des racines 4-ièmes de l'unité) aux places 2-adiques qui ne se décomposent pas dans l'extension $F[i]/F$. D'où l'intérêt d'introduire alors une notion différente de celle de *classes logarithmiques*, prise tant au sens *ordinaire* comme dans [J_2] qu'au sens *restreint* comme dans [S_2] (car ces dernières ne tiennent compte de la fonction signe qu'en les seules places réelles) : c'est la notion de *classes logarithmiques positives* basée sur celle de *classes signées* définie dans [J_4].

Le résultat principal de ce travail peut alors se résumer comme suit :

Théorème 0. *Soient F un corps de nombres et $WK_2(F)$ le noyau des symboles sauvages dans $K_2(F)$.*

(i) Si le corps F n'est pas logarithmiquement signé[1], *on a directement :*

$$WK_2(F)/WK_2(F)^2 \;\simeq\; \{\pm1\} \otimes_{\mathbb{Z}_2} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F,$$

où $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ désigne le 2-groupe des classes logarithmiques (au sens ordinaire) de F.

(ii) Si le corps F est logarithmiquement signé, on a semblablement :

$$WK_2(F)/WK_2(F)^2 \;\simeq\; \{\pm1\} \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathcal{C}\ell_F^{pos},$$

où $\mathcal{C}\ell_F^{pos}$ désigne le 2-groupe des classes logarithmiques positives de F.

Dans ce dernier cas, on a canoniquement ${}^2\mathcal{C}\ell_F^{pos} = {}^2\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^{pos}$ si et seulement si le corps F est logarithmiquement primitif.

En particulier, dans tous les cas la trivialité de la 2-partie du noyau sauvage $WK_2(F)$ est donc caractérisée par celle d'un groupe de classes logarithmiques convenable, et son 2-rang peut ainsi être aisément calculé dès que le corps F se prête aux calculs numériques.

[1] Le corps considéré F est *non logarithmiquement signé* lorsque les extensions cyclotomiques locales $F_{\mathfrak{p}}^c[i]/F_{\mathfrak{p}}$ attachées aux places non complexes sont infinies procycliques ; il est *logarithmiquement signé*, en revanche, lorsqu'il admet des places réelles ou encore des places paires (i.e. au-dessus de 2) en lesquelles l'extension locale $F_{\mathfrak{p}}^c[i]/F_{\mathfrak{p}}$ n'est pas infinie procyclique. Dans ce dernier cas, il est *logarithmiquement primitif* lorsqu'une au moins des places paires vérifie la condition précédente *et* ne se décompose pas dans la $\mathbb{Z}_2$-extension F^c/F.

Index des principales notations

Pour la commodité du lecteur, nous rassemblons ci-dessous les principales notations sur les classes logarithmiques introduites dans [J$_2$], [J$_3$] ou [J$_4$], que nous utilisons dans cet article, ainsi que les notions nouvelles définies plus loin.

En particulier, si F est un corps local, complété d'un corps de nombres en une place $\mathfrak{p}$, nous notons :

$\mathcal{R}_\mathfrak{p} = \varprojlim\ F_\mathfrak{p}^\times / F_\mathfrak{p}^{\times 2^n}$: le compactifié 2-adique du groupe multiplicatif $F_\mathfrak{p}^\times$;
$v_\mathfrak{p}(\ )$: la valuation (au sens ordinaire) sur $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_2$;
$\mathcal{U}_\mathfrak{p} = \mathrm{Ker}\ v_\mathfrak{p}$ le sous-groupe unité de $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$;
$\widetilde{v}_\mathfrak{p}(\ )$: la valuation logarithmique sur $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_2$;
$\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p} = \mathrm{Ker}\ \widetilde{v}_\mathfrak{p}$: le sous-groupe des unités logarithmiques dans $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$;
$|\ \ |_\mathfrak{p}$: la valeur absolue 2-adique sur $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_2^\times$;
$\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}^+ = Ker\,|\ \ |_\mathfrak{p}$: le sous-groupe des unités logarithmiques positives de $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$;
$\mathrm{sg}_\mathfrak{p}(\ ) = \varepsilon(|\ |_\mathfrak{p})$: la fonction signe sur $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ à valeurs dans ± 1 ;
$\mathcal{R}_\mathfrak{p}^+ = Ker\ \ \mathrm{sg}_\mathfrak{p}$: le sous-groupe des éléments positifs de $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$.

Et, si F est un corps de nombres, nous notons F^c sa $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique, F^{lc} sa 2-extension abélienne localement cyclotomique maximale, puis :

$\mathcal{J}_F = \prod_\mathfrak{p}^{res} \mathcal{R}_\mathfrak{p}$: le 2-adifié du groupe des idèles de F ;
$\mathcal{R}_F = \mathbb{Z}_2 \otimes_\mathbb{Z} F^\times$: le sous-groupe des idèles principaux ;
$\mathcal{U}_F = \prod_\mathfrak{p} \mathcal{U}_\mathfrak{p}$: le groupe des unités locales ;
$\widetilde{\mathcal{U}}_F = \prod_\mathfrak{p} \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$: le groupe des unités logarithmiques locales ;
$\mathcal{E}_F = \mathcal{R}_F \cap \mathcal{U}_F$: le 2-adifié du groupe des unités globales ;
$\widetilde{\mathcal{E}}_F = \mathcal{R}_F \cap \widetilde{\mathcal{U}}_F$: le groupe des unités logarithmiques globales ;
$\mathcal{D}\ell_F \simeq \mathcal{J}_F / \widetilde{\mathcal{U}}_F$: le groupe des diviseurs logarithmiques (au sens ordinaire) ;
$\widetilde{\mathcal{J}}_F$ le sous-module des éléments de degré nul dans $\mathcal{J}_F$;
$\widetilde{\mathcal{D}\ell}_F = \widetilde{\mathcal{J}}_F / \widetilde{\mathcal{U}}_F$: le groupe des diviseurs logarithmiques de degré nul ;
$\widetilde{\mathcal{P}\ell}_F \simeq \mathcal{R}_F / \widetilde{\mathcal{E}}_F$: le sous-groupe des diviseurs logarithmiques principaux ;
$\mathcal{C}\ell_F = \mathcal{J}_F / \mathcal{U}_F \mathcal{R}_F$: la 2-partie du groupe des classes (au sens habituel) ;
$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F = \widetilde{\mathcal{D}\ell}_F / \widetilde{\mathcal{P}\ell}_F$: le groupe des classes logarithmiques (au sens ordinaire) ;
$\mathcal{J}_F^*$: le noyau dans $\mathcal{J}_F$ de la formule du produit pour les fonctions signes ;
$\widetilde{\mathcal{J}}_F^*$ le sous-module des éléments de degré nul dans $\mathcal{J}_F$;
$\widetilde{\mathcal{U}}_F^* = \widetilde{\mathcal{U}}_F \cap \widetilde{\mathcal{J}}_F^*$: le sous-groupe unité de $\widetilde{\mathcal{J}}_F^*$;
$\mathcal{J}_F^{pos} = \prod_{\mathfrak{p} \in PLS_F^2} \mathcal{R}_\mathfrak{p}^+\ \ \prod_{\mathfrak{p} \notin PLS_F} \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$: les idèles logarithmiquement positifs ;
$\widetilde{\mathcal{U}}_F^+ = \prod \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}^+$: le sous-groupe des unités logarithmiques positives ;
$\mathcal{D}\ell_F^{pos} = \mathcal{J}_F / \mathcal{J}_F^{pos}$: le groupe des diviseurs logarithmiques positifs ;
$\widetilde{\mathcal{D}\ell}_F^{pos}$: le sous-groupe des diviseurs logarithmiques positifs de degré nul ;
$\mathcal{P}\ell_F^{pos}$: le sous-groupe principal de $\mathcal{D}\ell_F^{pos}$ et $\widetilde{\mathcal{P}\ell}_F^{pos}$ celui de $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_F^{pos}$;
$\mathcal{C}\ell_F^{pos} = \mathcal{D}\ell_F^{pos} / \mathcal{P}\ell_F^{pos}$: le groupe des classes positives ;
$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^{pos} = \widetilde{\mathcal{D}\ell}_F^{pos} / \widetilde{\mathcal{P}\ell}_F^{pos}$: le sous-groupe des classes positives de degré nul ;

1. Rappels sur les valuations logarithmiques et les fonctions signes

1.1 Places signées, semi-signées, logarithmiquement signées (cf. [J$_4$])

Le nombre premier ℓ étant désormais égal à 2, notons i une racine quatrième de l'unité puis, pour chaque corps de nombres F, écrivons F^c (respectivement $F^c[i]$) la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique (respectivement la pro-2-extension cyclotomique maximale) de F, puis convenons d'écrire :

Définition 1. Désignons par P_F^{nc} l'ensemble des places non complexes de F ; nous notons :

(i) $PS_F = \{\mathfrak{p} \in P_F^{nc} | \ i \notin F_\mathfrak{p}\}$ l'ensemble des *places signées* c'est à dire le sous-ensemble de P_F^{nc} formé des places qui ne se décomposent pas dans $F[i]/F$;

(ii) $PNS_F = \{\mathfrak{p} \in P_F^{nc} | \ i \in F_\mathfrak{p}\}$ l'ensemble des *places non signées* c'est à dire le sous-ensemble de P_F^{nc} formé de celles qui se décomposent dans $F[i]/F$;

(iii) $PLS_F = \{\mathfrak{p} \in PS_F | \ i \notin F_\mathfrak{p}^c\}$ l'ensemble des *places logarithmiquement signées*[2], c'est à dire le sous-ensemble de PS_F formé des places qui ne se décomposent pas dans l'extension $F^c[i]/F^c$;

(iv) $PSS_F = \{\mathfrak{p} \in PS_F | \ i \in F_\mathfrak{p}^c\}$ l'ensemble des *places semi-signées* c'est à dire le sous-ensemble de PS_F formé de celles qui se décomposent dans $F^c[i]/F^c$.

En d'autres termes, dans la partition

$$P_F^{nc} = PLS_F \cup PSS_F \cup PNS_F,$$

- les places logarithmiquement signées sont les places réelles et les places paires (i.e. au-dessus de 2) qui vérifient $i \notin F_\mathfrak{p}^c$;
- les places semi-signées sont les places (finies) impaires qui vérifient $i \notin F_\mathfrak{p}$ et les places paires (i.e. au-dessus de 2) qui vérifient $i \in F_\mathfrak{p}^c \setminus F_\mathfrak{p}$;
- les places non signées sont les places finies qui vérifient $i \in F_\mathfrak{p}$.

Définition 2. Lorsque l'ensemble PS_F des places signées est non vide, il est alors infini en vertu du théorème de Čebotarev, et cela a lieu si et seulement si le corps F ne contient pas les racines quatrièmes de l'unité. Nous disons alors que F est *signé*.

Lorsque l'ensemble PLS_F des places logarithmiquement signées est non vide, il est commode de dire que le corps F est *logarithmiquement signé*. Cela a lieu si et seulement si i n'est pas localement contenu dans la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique F^c ; en d'autres termes si et seulement si i n'appartient pas à la pro-2-extension abélienne localement cyclotomique maximale F^{lc} de F.

Remarque. Selon K. Hutchinson (cf. [H$_1$], [H$_2$]), le corps F est dit *exceptionnel* lorsque sa $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique F^c ne contient pas les racines quatrièmes de l'unité. La notion de corps *exceptionnel*, caractérisé par $i \notin F^c$, est donc intermédiaire entre celles de corps *signé*, caractérisé par $i \notin F$, et de corps *logarithmiquement signé*, caractérisé par $i \notin F^{lc}$.

[2]Dans la terminologie de K. Hutchinson, ces places sont dites *exceptionnelles*.

1.2 Valuations logarithmiques et fonctions signes

Rappelons qu'en chaque place non complexe $\mathfrak{p}$ d'un corps de nombres F est défini sur le compactifié 2-adique $\mathcal{R}_\mathfrak{p} = \varprojlim F_\mathfrak{p}^\times / F_\mathfrak{p}^{\times 2^n}$ du groupe multiplicatif $F_\mathfrak{p}^\times$ du complété de F en $\mathfrak{p}$ une valeur absolue 2-adique, à valeurs dans $\mathbb{Z}_2^\times = 1+2\mathbb{Z}_2$, donnée par la formule :

$$| \, x \, |_\mathfrak{p} = \begin{cases} \mathrm{sg}_\mathfrak{p}(x) & \text{si } \mathfrak{p} \text{ est réelle,} \\ N\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(x)} & \text{pour } \mathfrak{p} \nmid 2\infty, \\ N_{F_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_2}(x) N\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(x)} & \text{enfin, pour } \mathfrak{p} \mid 2. \end{cases}$$

Dans celle-ci, $\mathrm{sg}_\mathfrak{p}(x)$ est la fonction signe attachée au plongement réel correspondant à la place $\mathfrak{p}$; $N\mathfrak{p}$ est la norme absolue de l'idéal $\mathfrak{p}$; et $v_\mathfrak{p}$ est la valuation $\mathfrak{p}$-adique attachée à $\mathfrak{p}$.

La famille $(| \, . \, |_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ des valeurs absolues 2-adiques, où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des places non complexes de F, peut ainsi être regardée comme un morphisme sur le 2-groupe des idèles $\mathcal{J}_F = \prod_\mathfrak{p}^{res} \mathcal{R}_\mathfrak{p}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_2^\times$; et il est bien connu (cf. [J$_3$], prop. 1.8.) que les idèles principaux, i.e. les éléments du tensorisé 2-adique $\mathcal{R}_F = \mathbb{Z}_2 \otimes_\mathbb{Z} F^\times$ regardé comme sous-groupe de $\mathcal{J}_F$, vérifient la formule du produit :

$$\forall \, x \in \mathcal{R}_F \quad \prod_\mathfrak{p} | \, x \, |_\mathfrak{p} = 1.$$

Maintenant, la décomposition canonique $\mathbb{Z}_2^\times \simeq \{\pm 1\} \times (1 + 4\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ permet d'écrire tout élément x de $\mathbb{Z}_2^\times$ comme produit de son signe $\varepsilon(x) \in \{\pm 1\}$ et de sa composante "positive" $\varepsilon(x)x \in 1 + 4\mathbb{Z}_2$.

Cette décomposition amène alors à associer à chacune des places non complexes du corps F deux applications définies sur le compactifié 2-adique $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ et à valeurs respectivement dans $\mathbb{Z}_2$ et dans $\{\pm 1\}$:

- une $\mathfrak{p}$-*valuation logarithmique* $\widetilde{v}_\mathfrak{p}$ d'une part, donnée par la formule :

$$\widetilde{v}_\mathfrak{p}(\cdot) = -\frac{\mathrm{Log}|\cdot|_\mathfrak{p}}{\deg \mathfrak{p}} \quad \text{(cf. [J}_2\text{], p. 306, déf. 1.3 } (iv)\text{)},$$

où $\deg \mathfrak{p}$ est un facteur de normalisation choisi pour qu'on ait $\widetilde{v}_\mathfrak{p}(\mathcal{R}_F) = \mathbb{Z}_2$;

- une *fonction signe* $\mathrm{sg}_\mathfrak{p}$ d'autre part, dont une expression est :

$$\mathrm{sg}_\mathfrak{p}(\cdot) = \varepsilon(| \cdot |_\mathfrak{p}) \quad \text{(cf. [J}_4\text{], p. 457, déf. 1)},$$

où ε désigne la projection de $\mathbb{Z}_2^\times \simeq \{\pm 1\} \times (1 + 4\mathbb{Z}_2)$ sur $\{\pm 1\}$.

Le noyau $\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$ de la valuation $\widetilde{v}_\mathfrak{p}$ est, par définition, le sous-groupe des *unités logarithmiques* de $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$; celui de la fonction signe $\mathrm{sg}_\mathfrak{p}$ est le sous-groupe des *éléments positifs* $\mathcal{R}_\mathfrak{p}^+$; l'intersection $\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}^+ = \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p} \cap \mathcal{R}_\mathfrak{p}^+$, enfin, est le sous-groupe des *unités logarithmiques positives.*

La place $\mathfrak{p}$ est donc *signée* lorsque la fonction signe $\mathrm{sg}_\mathfrak{p}$ est non triviale, auquel cas le sous-groupe positif $\mathcal{R}_\mathfrak{p}^+$ est d'indice 2 dans $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$; elle est *logarithmiquement signée* lorsque la fonction signe $\mathrm{sg}_\mathfrak{p}$ est non triviale sur le sous-groupe unité $\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$, auquel cas $\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}^+$ est d'indice 2 dans $\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$. Cette dernière éventualité ne se produit qu'aux places réelles et à certaines des places au-dessus de 2.

2. Lien avec le symbole de Hilbert sauvage $\left(\frac{-1,x}{F_{\mathfrak{p}}}\right)$

2.1 Rappels sur le 2-symbole de Hilbert $\left(\frac{x,y}{F_{\mathfrak{p}}}\right)$

Désignons par $m = 2$ l'ordre du groupe μ_F des racines de l'unité dans F (supposé signé) et, pour chaque place non complexe $\mathfrak{p}$ de F notons de même $m_{\mathfrak{p}}$ l'ordre du groupe $\mu_{F_{\mathfrak{p}}}$ des racines de l'unité dans $F_{\mathfrak{p}}$, puis $\zeta_{\mathfrak{p}}$ un générateur de $\mu_{F_{\mathfrak{p}}}$ (de sorte que nous avons $\zeta_{\mathfrak{p}}^{m_{\mathfrak{p}}/2} = -1$) et $\xi_{\mathfrak{p}}$ une racine carrée de $\zeta_{\mathfrak{p}}$ dans $\overline{F}_{\mathfrak{p}}$. Classiquement, le symbole de Hilbert attaché à $\mathfrak{p}$ est défini sur $F_{\mathfrak{p}}^{\times} \times F_{\mathfrak{p}}^{\times}$ par la formule :

$$\left(\frac{x,y}{F_{\mathfrak{p}}}\right) = \sqrt[m_{\mathfrak{p}}]{x}^{\;\omega_{\mathfrak{p}}(y)-1},$$

où $\omega_{\mathfrak{p}}$ est l'application de réciprocité à valeurs dans $\mathrm{Gal}(F_{\mathfrak{p}}^{ab}/F_{\mathfrak{p}})$ donnée par la théorie locale des corps de classes. En particulier il vient :

$$\left(\frac{-1,x}{F_{\mathfrak{p}}}\right) = \xi_{\mathfrak{p}}^{\omega_{\mathfrak{p}}(x)-1} \;;$$

et cette dernière expression vaut aussi bien pour $x \in \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$, si l'on continue à noter $\omega_{\mathfrak{p}}$ l'isomorphisme topologique $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} \simeq \mathrm{Gal}(F_{\mathfrak{p}}^{ab}/F_{\mathfrak{p}})$ donné par la théorie ℓ-adique (pour ℓ=2).

Avant d'établir une formule explicite pour ce dernier symbole, disons un mot sur la formule du produit : il est bien connu qu'il existe une unique relation entre les symboles de Hilbert attachés aux places non complexes de F, qui s'écrit :

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\;,\;}{F_{\mathfrak{p}}}\right)^{m_{\mathfrak{p}}/m} = 1.$$

Introduisons maintenant le noyau sauvage $WK_2(F)$, i.e. le noyau dans $K_2(F)$ des symboles de Hilbert (ou symboles sauvages) attachés aux places non complexes de F. Il est caractérisé par la suite exacte courte (dite de C. Moore)

$$1 \longrightarrow WK_2(F) \longrightarrow K_2(F) \longrightarrow \widetilde{\oplus}_{\mathfrak{p}} \mu_{F_{\mathfrak{p}}} \longrightarrow 1,$$

où le tilde sur la somme directe à droite signifie que l'on se restreint aux familles $(\zeta_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ qui vérifient la formule du produit $\prod \zeta_{\mathfrak{p}}^{m_{\mathfrak{p}}/m} = 1$.

Un résultat fondamental de la K-théorie des corps de nombres nous assure que $WK_2(F)$ est fini. Cela étant, son ℓ-rang coïncide sous certaines hypothèses avec celui du ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$, groupe présumé fini sur la définition duquel nous reviendrons plus loin. Plus précisément, si le corps F contient le groupe des racines 2ℓ-ièmes de l'unité, l'isomorphisme canonique

$${}_{\ell}\mu_F \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \simeq WK_2(F)/WK_2(F)^{\ell}$$

cité dans l'introduction permet de relier le ℓ-quotient ${}^{\ell}WK_2(F)$ à un invariant arithmétique facilement calculable du corps considéré.

Pour obtenir une description analogue avec $\ell = 2$, en l'absence des racines 4-ièmes de l'unité, nous avons besoin d'une expression explicite du 2-symbole sauvage, que nous allons maintenant établir.

2.2 Expression explicite du 2-symbole sauvage $\left(\frac{-1,x}{F_{\mathfrak{p}}}\right)$

Avec les conventions précédentes, il vient :

Théorème 3. *Les symboles de Hilbert* $\left(\frac{-1,\ x}{F_{\mathfrak{p}}}\right)$ *attachés aux places non complexes de* F *sont donnés par la formule :*

$$\left(\frac{-1,\ x}{F_{\mathfrak{p}}}\right) = \mathrm{sg}_{\mathfrak{p}}(x) \ \ \textit{pour}\ \mathfrak{p} \in PS_F\ ; \quad \left(\frac{-1,\ x}{F_{\mathfrak{p}}}\right) = (-1)^{\widetilde{v}_{\mathfrak{p}}(x)} \ \ \textit{pour}\ \mathfrak{p} \notin PLS_F.$$

Et pour $\mathfrak{p} \in PSS_F = PS_F \setminus PLS_F$ *(i.e. pour* $i \in F_{\mathfrak{p}}^c \setminus F_{\mathfrak{p}}$*), on a simultanément :*

$$\left(\frac{-1,x}{F_{\mathfrak{p}}}\right) = \mathrm{sg}_{\mathfrak{p}}(x) = (-1)^{\widetilde{v}_{\mathfrak{p}}(x)}.$$

Preuve du Théorème. Distinguons différents cas suivant la nature de la place $\mathfrak{p}$:

• Si $\mathfrak{p}$ est réelle, nous avons directement $\left(\frac{-1,\ x}{F_{\mathfrak{p}}}\right) = i^{\omega_{\mathfrak{p}}(x)-1} = \mathrm{sg}_{\mathfrak{p}}(x)$, comme attendu, puisque les normes dans l'extension quadratique $\mathbb{C}/\mathbb{R} = \mathbb{R}[i]/\mathbb{R}$ sont les éléments positifs.

• Si $\mathfrak{p}$ est finie et au dessus d'un nombre premier impair p, écrivons $m_{\mathfrak{p}} = p^{r_{\mathfrak{p}}}(N\mathfrak{p}-1)$ et observons que, $p^{r_{\mathfrak{p}}}$ étant lui même impair, le symbole sauvage $\left(\frac{-1,\ x}{F_{\mathfrak{p}}}\right)$ coïncide avec sa puissance $\left(\frac{-1,\ x}{F_{\mathfrak{p}}}\right)^{p^{r_{\mathfrak{p}}}}$ qui n'est autre que le symbole régulier $(-1,x)_{\mathfrak{p}} = (-1)^{v_{\mathfrak{p}}(x)}$. Finalement, comme les $\mathfrak{p}$-valuations $v_{\mathfrak{p}}(\cdot)$ et $\widetilde{v}_{\mathfrak{p}}(\cdot)$ sont égales à un facteur 2-adique inversible près (cf. [J$_3$], p. 306, th. 1.4 (*iii*)), il suit, comme attendu : $\left(\frac{-1,\ x}{F_{\mathfrak{p}}}\right) = (-1)^{\widetilde{v}_{\mathfrak{p}}(x)}$.

• Si $\mathfrak{p}$ est au dessus de 2, écrivons $m_{\mathfrak{p}} = 2^{r_{\mathfrak{p}}}(N\mathfrak{p}-1)$, avec cette fois-ci $(N\mathfrak{p}-1)$ impair.

- Si $\mathfrak{p}$ est signée, $r_{\mathfrak{p}}$ vaut 1 et il vient directement :

$$\left(\frac{-1,\ x}{F_{\mathfrak{p}}}\right) = \left(\frac{-1,\ x}{F_{\mathfrak{p}}}\right)^{N\mathfrak{p}-1} = i^{\omega_{\mathfrak{p}}(x)-1} = \mathrm{sg}_{\mathfrak{p}}(x), \quad \text{comme dans le cas réel.}$$

- Si $\mathfrak{p}$ n'est pas signée enfin, l'hypothèse $i \in F_{\mathfrak{p}}$ permet d'appliquer le théorème 1 de [J$_1$] qui donne la formule explicite :

$$\left(\frac{-1,x}{F_{\mathfrak{p}}}\right) = (-1)^{\widetilde{v}_{\mathfrak{p}}(x)}\ ;$$

ce qui achève la démonstration via la parité simultanée de $\widetilde{v}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}})$ et $\mathrm{sg}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}})$ en les places signées (non logarithmiquement).

Lorsque F est signé, m vaut 2 et la quantité $m_{\mathfrak{p}}/m$ est paire aux places non signées, impaire aux places signées. Il vient donc :

Scolie 4. *Dans un corps signé, la formule du produit pour les symboles* $\left(\frac{-1,\ \cdot}{F_{\mathfrak{p}}}\right)$ *s'écrit tout simplement :*

$$\forall\, x \in \mathcal{R}_F \qquad \prod_{\mathfrak{p}\in PS_F} \left(\frac{-1,\ x}{F_{\mathfrak{p}}}\right) = 1.$$

Proposition 5. *On a :* $\{-1,-1\} \in WK_2(F) \Longleftrightarrow \forall \mathfrak{p} \mid 2\infty \ \ [F_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_p]$ *est pair.*

Preuve. Cela résulte directement des formules explicites du Théorème 3 : Pour $\mathfrak{p}$ non signée, on a immédiatement $\left(\frac{-1,-1}{F_\mathfrak{p}}\right) = 1$. Et pour $\mathfrak{p}$ signée, il vient :

$$\left(\frac{-1,-1}{F_\mathfrak{p}}\right) = \mathrm{sg}_{F_\mathfrak{p}}(-1) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ \mathfrak{p} \nmid 2\infty \ ; \\ N_{F_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_2}(-1) = (-1)^{[F_\mathfrak{p}:\mathbb{Q}_2]} & \text{pour } \mathfrak{p} \mid 2 \ ; \\ -1 & \text{pour } \mathfrak{p} \mid \infty. \end{cases}$$

Il suffit alors d'observer que le degré local $[F_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_2]$ est encore pair pour $\mathfrak{p}$ complexe (car on a $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$) et pour $\mathfrak{p}$ paire non signée (où l'on a $F_\mathfrak{p} \supset \mathbb{Q}_2[i]$).

Bien entendu, lorsque la condition de parité à droite est vérifiée, la proposition 5 ne dit pas si $\{-1,-1\}$ est un élément *non trivial* de $WK_2(F)$. C'est le cas pour $F = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ avec $d \equiv -2$ [mod 16], $d \neq -2$, comme observé dans [Ke] ; mais non pour $i \in F$ ou $\sqrt{-2} \in F$ puisqu'on a $\{-1,-1\} = \{i^2, i^2\} = \{i^4, i\} = 1$ dans $\mathbb{Q}[i]$, et $\{-1,-1\} = \{-1,-2\} = \{-1,\sqrt{-2}\}^2 = 1$ dans $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$.

3. Cas des corps de nombres non logarithmiquement signés

Dans cette section, nous donnons un critère de trivialité de la 2-partie du noyau hilbertien des corps de nombres non logarithmiquement signés. Autrement dit, nous supposons ici que PLS_F est vide.

3.1 Rappel sur les classes logarithmiques (au sens ordinaire)

Le ℓ-groupe des classes logarithmiques d'un corps de nombres est défini par analogie avec le ℓ-groupe des classes d'idéaux au sens ordinaire.

Classiquement, le *ℓ-groupe des idéaux* $\mathcal{I}_F$ de F peut être regardé comme l'image du ℓ-groupe des idèles $\mathcal{J}_F$ de F (i.e. du produit restreint $\mathcal{J}_F = \prod_\mathfrak{p}^{res} \mathcal{R}_\mathfrak{p}$ des compactifiés ℓ-adiques des groupes multiplicatifs des complétés de F) par la famille $v = (v_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\nmid\infty}$ des valuations associées aux places finies ; son *sous-groupe principal* $\mathcal{P}_F$ comme l'image du sous-module $\mathcal{R}_F = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} F^\times$ des idèles principaux ; et le *ℓ-groupe des classes d'idéaux* $\mathcal{C}\ell_F$ comme le quotient :

$$\mathcal{C}\ell_F = \mathcal{I}_F/\mathcal{P}_F.$$

C'est aussi évidemment le ℓ-sous-groupe de Sylow du groupe des classes d'idéaux (au sens ordinaire) du corps F.

Le ℓ-groupe des classes logarithmiques s'obtient naturellement en remplaçant dans la définition précédente la famille $v = (v_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\nmid\infty}$ des valuations au sens habituel par son analogue logarithmique $\widetilde{v} = (\widetilde{v}_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\nmid\infty}$ introduit plus haut et en tenant compte de la formule du produit : le *ℓ-groupe des diviseurs logarithmiques* (de degré nul) $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_F$ est ainsi l'image par $\widetilde{v}$ du noyau $\widetilde{\mathcal{J}}_F$ dans $\mathcal{J}_F$ de la formule du produit pour les valeurs absolues ℓ-adiques ; son *sous-groupe principal* $\widetilde{\mathcal{P}\ell}_F$ est l'image de $\mathcal{R}_F$; et le *ℓ-groupe des classes logarithmiques* est le quotient :

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F = \widetilde{\mathcal{D}\ell}_F/\widetilde{\mathcal{P}\ell}_F.$$

Ces classes logarithmiques ont une arithmétique semblable à celle des classes au sens ordinaire avec toutefois quelques complications.

En particulier, la finitude du groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ est encore conjecturale (c'est la conjecture de Gross généralisée), mais ce point est sans importance ici puisque le groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ n'intervient qu'à travers son quotient fini ${}^\ell\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F = \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F/\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^\ell$.

En revanche, tout comme pour les groupes de classes d'idéaux, l'arithmétique des classes logarithmiques est parfaitement explicite. D'où l'intérêt de l'isomorphisme qui suit, compte tenu des difficultés à calculer de façon effective sur les groupes de K-théorie. Sa démonstration repose essentiellement sur deux arguments (en dehors des résultats de la K-théorie proprement dite) : l'expression explicite des symboles de Hilbert en termes de valuation logarithmique, d'une part ; la décomposition du ℓ-groupe des diviseurs logarithmiques, induite par les valuations, d'autre part :

$$\widetilde{\mathcal{D}\ell}_F \;\simeq\; \widetilde{\oplus}_{\mathfrak{p}\nmid\infty}\, \mathbb{Z}_\ell\, \mathfrak{p}\ .$$

Il est intéressant de noter que pour $\ell = 2$, il vient modulo 2

$${}^2\widetilde{\mathcal{D}\ell}_F \;\simeq\; \widetilde{\oplus}_{\mathfrak{p}\nmid\infty}\, \mathbb{F}_2\, \mathfrak{p},$$

et que, dans cette dernière expression, la formule du produit ne porte en fait que sur les places primitives (i.e. celles dont le degré $\deg\mathfrak{p}$ engendre $\mathbb{Z}_2$).

3.2 L'isomorphisme dans le cas non logarithmiquement signé

Le résultat principal de cette section généralise directement le théorème général établi dans le cas non signé cité dans l'introduction :

Théorème 6. *Si F est un corps de nombres qui n'est pas logarithmiquement signé, il existe un isomorphisme de groupes :*

$$\{\pm1\}\otimes_{\mathbb{Z}_2}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \;\simeq\; WK_2(F)/WK_2(F)^2$$

entre les quotients d'exposant 2 respectifs du 2-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ des classes logarithmiques d'une part et du noyau sauvage $WK_2(F)$ d'autre part.

Remarque. Le Théorème n'affirme pas que l'isomorphisme ${}^2\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \;\simeq\; {}^2WK_2(F)$ est *canonique* ici, comme c'est effectivement le cas en vertu de [J$_1$] lorsque le corps F n'est pas signé. Plus précisément, pour $i \in F^{lc}\setminus F^c$, la formule du produit donne lieu à des normalisations distinctes pour les classes et les noyaux, ce qui introduit une complication supplémentaire par rapport au cas $i \in F^c$.

Supposons donc F signé mais non logarithmiquement signé (autrement dit $i \in F^{lc}\setminus F$) et partons de la suite exacte de Moore. Elevant au carré, et formant le diagramme du Serpent, nous obtenons la suite exacte à six termes :

$${}_2WK_2(F) \hookrightarrow {}_2K_2(F) \to \widetilde{\oplus}_{\mathfrak{p}}\{\pm1\}_{\mathfrak{p}} \to {}^2WK_2(F) \to {}^2K_2(F) \to \widetilde{\oplus}_{\mathfrak{p}}{}^2\mu_{F_{\mathfrak{p}}},$$

la flèche à droite est un isomorphisme d'après un résultat de Tate (cf. [Ta]). Cela étant, nous avons :

Lemme 7. *Sous la condition $i \in F^{lc}\setminus F$, il existe une infinité de places $\mathfrak{q}$ de F à la fois signées (i.e. non décomposées dans l'extension quadratique $F[i]/F$) et primitives (i.e. non décomposées dans la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique F^c/F). Et pour chacune d'elles on a les isomorphismes de $\mathbb{Z}_2$-modules :*

(i) $\bigoplus_{\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}} \{\pm1\}_{\mathfrak{p}} \;\simeq\; \widetilde{\bigoplus}_{\mathfrak{p}} \{\pm1\}_{\mathfrak{p}}$;

(ii) $\bigoplus_{\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}} \mathbb{Z}_2\,\mathfrak{p} \;\simeq\; \widetilde{\bigoplus}_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_2\,\mathfrak{p} \;=\; \widetilde{\mathcal{D}\ell}_F$.

Preuve. Distinguons deux cas suivant que le corps F est exceptionnel ou non :

• Pour $i \in F^c \setminus F$, l'extension quadratique $F[i]/F$ est le premier étage F_1 de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique F^c/F ; les places signées sont donc exactement les places primitives ; et, d'après le théorème de Čebotarev, une place sur deux a alors cette propriété.

• Pour $i \in F^{lc} \setminus F^c$, le compositum $F_1[i]/F$ est biquadratique et le théorème de densité de Čebotarev nous assure donc dans ce cas qu'une place sur quatre du corps F est simultanément signée et primitive.

Les deux isomorphismes annoncés sont alors immédiats : le premier s'obtient en complétant la famille $(\varepsilon_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}}$ par l'élément $\varepsilon_{\mathfrak{q}} = \prod_{\mathfrak{p}\in PS_F\setminus\{\mathfrak{q}\}} \varepsilon_{\mathfrak{p}}$; le second en retranchant à la somme $\sum_{\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}} \nu_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{p}$ le diviseur logarithmique $\nu_{\mathfrak{q}}\,\mathfrak{q}$ défini par $\nu_{\mathfrak{q}} = \sum_{\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}} \frac{\deg \mathfrak{p}}{\deg \mathfrak{q}}\, \nu_{\mathfrak{p}}$.

Nota. L'identité (ii) regardée modulo 2 s'écrit : $\nu_{\mathfrak{q}} \equiv \sum_{\mathfrak{p}\in PP_F\setminus\{\mathfrak{q}\}} \nu_{\mathfrak{p}}\ [mod\ 2]$, si PP_F désigne l'ensemble des places primitives du corps F. La normalisation effectuée en (ii) dans le cas $i \in F^{lc} \setminus F^c$ diffère donc substantiellement de celle utilisée en (i) où la sommation porte sur l'ensemble PS_F des places signées.

Lemme 8. *Sous les mêmes hypothèses, on obtient le diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\{\pm1\}\otimes F^\times \arrow[r, "(\widetilde{v}_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}"] \arrow[d, "\{-1,\,.\,\}"'] & \widetilde{\bigoplus}_{\mathfrak{p}}\mathbb{F}_2\,\mathfrak{p} \arrow[r, "\sim"] & \bigoplus_{\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}}\mathbb{F}_2\,\mathfrak{p} \arrow[d, equal] \\
{}_2K_2(F) \arrow[r, "\left(\frac{-1,\,.}{F_{\mathfrak{p}}}\right)"] & \widetilde{\bigoplus}_{\mathfrak{p}}\{\pm1\}_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\sim"] & \bigoplus_{\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}}\{\pm1\}_{\mathfrak{p}}
\end{tikzcd}$$

Preuve du Théorème. Revenons sur la transformée par le Serpent de la suite exacte de Moore. Les éléments d'ordre 2 dans $K_2(F)$ étant exactement les symboles universels $\{-1, x\}$, pour $x \in F^\times$, les isomorphismes ci-dessus nous donnent finalement le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
{}^2\mathcal{R}_F \arrow[r, "\widetilde{v}"] \arrow[d, "\{-1,\,.\,\}"'] & {}^2\widetilde{\mathcal{D}\ell}_F = \widetilde{\bigoplus}_{\mathfrak{p}}\mathbb{F}_2\,\mathfrak{p} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & {}^2\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & 1 \\
{}_2K_2(F) \arrow[r, "\left(\frac{-1,\,.}{F_{\mathfrak{p}}}\right)"] & \widetilde{\bigoplus}_{\mathfrak{p}}\{\pm1\}_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & {}^2WK_2(F) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Dans celui-ci, le morphisme vertical à gauche est la surjection naturelle ; l'isomorphisme α au centre est donné par le lemme 8 ; et l'application induite entre les quotients à droite est le morphisme bijectif attendu.

Corollaire 9. *La 2-partie du noyau hilbertien d'un corps de nombres F non logarithmiquement signé est triviale si et seulement si le 2-groupe des classes logarithmiques de F est trivial.*

4. Cas des corps de nombres logarithmiquement signés

Venons en maintenant au cas plus délicat des corps logarithmiquement signés.

4.1. Définition du 2-groupe des classes positives

Pour prendre en compte maintenant la contribution des places logarithmiquement signées, il est nécessaire de remplacer le 2-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ par un 2-groupe *ad hoc*, à l'exemple de ce qui est fait usuellement dans le cas des groupes de classes d'idéaux, pour lesquels la notion introduite est celle de classes au sens restreint qui prend en compte la contribution des places réelles.

Dans notre perspective ici les formules explicites données par le Théorème 3 invitent à considérer les fonctions signes attachées aux places logarithmiquement signées, i.e. aux places réelles *et* à certaines places 2-adiques, *mais* à négliger en revanche la contribution logarithmique de ces mêmes places (puisque l'expression du symbole de Hilbert qui leur est attaché fait intervenir la seule fonction signe $\mathrm{sg}_\mathfrak{p}$ et non la valuation logarithmique $\widetilde{v}_\mathfrak{p}$).

Ces considérations amènent à modifier sensiblement la notion de classes logarithmiques signées introduite dans [J$_4$] : désignons par $\mathcal{J}_F^*$ le 2-groupe des idèles globalement positifs, autrement dit le noyau dans $\mathcal{J}_F$ de la formule du produit pour les seules fonctions signes

$$\mathcal{J}_F^* = \{(x_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \mathcal{J}_F \mid \textstyle\prod_\mathfrak{p} \mathrm{sg}_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}) \; = +1\} \;;$$

désignons par $\mathcal{J}_F^{pos}$ le produit des groupes locaux d'idèles positifs aux places paires logarithmiquement signées et logarithmiquement unités ailleurs

$$\mathcal{J}_F^{pos} = \textstyle\prod_{\mathfrak{p}\in PLS_F^2} \mathcal{R}_\mathfrak{p}^+ \; \prod_{\mathfrak{p}\notin PLS_F} \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p} \;;$$

et introduisons enfin le sous groupe des unités logarithmiques positives

$$\widetilde{\mathcal{U}}_F^+ = \textstyle\prod_\mathfrak{p} \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}^+ = \prod_{\mathfrak{p}\in PLS_F^2} \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}^+ \; \prod_{\mathfrak{p}\notin PLS_F} \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p} \;;$$

Nous avons alors banalement $\widetilde{\mathcal{U}}_F^+ \subset \mathcal{J}_F^{pos} \subset \mathcal{J}_F^*$, ce qui nous permet de poser :

Définition 10. Soit F un corps logarithmiquement signé. Nous appelons :

(i) 2-groupe des diviseurs logarithmiques positifs du corps F, le quotient

$$\mathcal{D}\ell_F^{pos} \; = \mathcal{J}_F^*/\mathcal{J}_F^{pos} = \mathcal{J}_F^*/\big(\, \widetilde{\mathcal{U}}_F^+ \textstyle\prod_{\mathfrak{p}\in PLS_F^2} \mathcal{R}_\mathfrak{p}^+\big)$$

du 2-groupe $\mathcal{D}\ell s_F \; = \; \mathcal{J}_F^*/\widetilde{\mathcal{U}}_F^+$ des diviseurs logarithmiques signés globalement positifs par le sous-groupe $\mathcal{J}_F^{pos}/\widetilde{\mathcal{U}}_F^+$ des diviseurs totalement positifs construits sur les places finies logarithmiquement signées ;

(ii) 2-groupe des diviseurs logarithmiques principaux positifs, l'image

$$\mathcal{P}\ell_F^{pos} \; = \big(\mathcal{R}_F\widetilde{\mathcal{U}}_F^+ \textstyle\prod_{\mathfrak{p}\in PLS_F^2} \mathcal{R}_\mathfrak{p}^+\big)/\big(\, \widetilde{\mathcal{U}}_F^+ \prod_{\mathfrak{p}\in PLS_F^2} \mathcal{R}_\mathfrak{p}^+\big)$$

dans $\mathcal{D}\ell_F^{pos}$ du groupe $\mathcal{R}_F$ des idèles principaux ;

(iii) 2-groupe des classes positives enfin, le quotient

$$\mathcal{C}\ell_F^{pos} \; = \; \mathcal{D}\ell_F^{pos}/\mathcal{P}\ell_F^{pos} \; \simeq \; \mathcal{J}_F^*/\mathcal{R}_F\mathcal{J}_F^{pos}$$

du 2-groupe positif $\mathcal{D}\ell_F^{pos}$ par son sous-groupe principal $\mathcal{P}\ell_F^{pos}$.

Remarque. Dans la définition ci-dessus, il n'est imposé *aucune* restriction sur le degré des diviseurs (ou des idèles) au numérateur. En particulier, en l'absence de places 2-adiques logarithmiquement signées, tous les idèles intervenant au dénominateur étant alors de degré nul, le groupe des classes positives est infini.

Scolie 11. *Pour tout corps de nombres F, convenons de noter*
$$\widetilde{\mathcal{D}\ell}{}_F^{pos} \;= \widetilde{\mathcal{J}}{}_F^*/\big(\,\widetilde{\mathcal{U}}{}_F^+\textstyle\prod_{\mathfrak{p}\in PLS_F^2}\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^+\big)$$
le sous-groupe de $\mathcal{D}\ell_F^{pos}$ représenté par des idèles de degré nul et
$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}{}_F^{pos} \;=\; \widetilde{\mathcal{D}\ell}{}_F^{pos}/\widetilde{\mathcal{P}\ell}{}_F^{pos}$$
son image canonique dans le 2-groupe de classes $\mathcal{C}\ell_F^{pos}$. Cela étant :

(i) L'indice $\big(\mathcal{C}\ell_F^{pos} : \widetilde{\mathcal{C}\ell}{}_F^{pos}\big)$ est infini lorsque aucune des places 2-adiques de F n'est logarithmiquement signée[3]*; il est égal au degré $[F^{cd} : F]$ de la plus grande sous-extension F^{cd}/F de F^c/F qui est complètement décomposée en chacune des places 2-adiques logarithmiquement signées, sinon ;*

(ii) Et le groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}{}_F^{pos}$ s'identifie au quotient du 2-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_F$ des classes logarithmiques signées par le sous-groupe engendré par les classes des diviseurs positifs construits sur les places 2-adiques logarithmiquement signées.

Preuve. En effet, $\mathcal{J}_F^*$ est le groupe des normes de l'extension $F[i]/F$ et $\widetilde{\mathcal{J}}{}_F^* = \widetilde{\mathcal{J}}_F \cap \mathcal{J}_F^*$ celui de l'extension composée $F^c[i]/F$. Ainsi, dans l'isomorphisme
$$\mathcal{C}\ell_F^{pos}/\widetilde{\mathcal{C}\ell}{}_F^{pos} \;\simeq\; \mathcal{J}_F^*/\big(\,\widetilde{\mathcal{U}}{}_F^+\textstyle\prod_{\mathfrak{p}\in PLS_F^2}\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^+\big)\mathcal{R}_F\widetilde{\mathcal{J}}{}_F^* \;=\; \mathcal{J}_F^*/\big(\textstyle\prod_{\mathfrak{p}\in PLS_F^2}\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^+\big)\widetilde{\mathcal{J}}{}_F^*,$$
les facteurs $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^+$ correspondent aux sous-groupes de décomposition des places de PLS_F^2 dans l'extension procyclique $F^c[i]/F[i]$; d'où le premier résultat. Le second résulte immédiatement de la définition des classes signées dans [J$_4$] :
$$\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_F = \widetilde{\mathcal{J}}{}_F^*/\widetilde{\mathcal{U}}{}_F^+\mathcal{R}_F.$$

Remarques. Précisons quelques cas particuliers :

(i) Lorsque le corps F n'est pas logarithmiquement signé, le 2-groupe de classes positives $\widetilde{\mathcal{C}\ell}{}_F^{pos}$ coïncide avec le 2-groupe des classes logarithmiques au sens ordinaire $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ et on a banalement : $\mathcal{C}\ell_F^{pos} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \widetilde{\mathcal{C}\ell}{}_F^{pos}$, de sorte que le 2-quotient ${}^2\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \simeq {}^2\widetilde{\mathcal{C}\ell}{}_F^{pos}$ est alors un hyperplan du $\mathbb{F}_2$-espace ${}^2\mathcal{C}\ell_F^{pos}$.

(ii) Plus généralement, si les places 2-adiques du corps F ne sont pas logarithmiquement signées, le 2-groupe de classes positives $\widetilde{\mathcal{C}\ell}{}_F^{pos}$ n'est autre que le 2-groupe des classes logarithmiques au sens restreint $\widetilde{\mathcal{C}\ell}{}_F^{res}$ introduit dans [S$_2$].

(iii) Enfin, lorsque l'une au moins des places 2-adiques du corps F est à la fois logarithmiquement signée et primitive (i.e. non décomposée dans la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique F^c/F), le 2-groupe de classes $\widetilde{\mathcal{C}\ell}{}_F^{pos}$ coïncide avec le 2-groupe des classes logarithmiques positives $\mathcal{C}\ell_F^{pos}$ défini plus haut.

[3]Dans la terminologie de K. Hutchinson [H$_2$], le corps F est dit alors *superexceptionnel*.

4.2. L'isomorphisme dans le cas logarithmiquement signé

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section qui motive l'introduction des groupes de classes positives $\mathcal{C}\ell_F^{pos}$:

Théorème 12. *Dans un corps de nombres logarithmiquement signé, il existe un isomorphisme naturel :*

$$\{\pm 1\} \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathcal{C}\ell_F^{pos} \simeq WK_2(F)/WK_2(F)^2$$

entre les quotients d'exposant 2 respectifs du 2-groupe $\mathcal{C}\ell_F^{pos}$ des classes positives et du noyau sauvage $WK_2(F)$ dans $K_2(F)$.

En particulier, le 2-groupe des classes positives $\mathcal{C}\ell_F^{pos}$ et le 2-noyau sauvage $WK_2(F)$, qui ont donc même 2-rang, sont simultanément triviaux ou non.

Scolie 13. *Soit F un corps de nombres logarithmiquement signé. Alors :*

(i) Si F est logarithmiquement primitif, en ce sens que l'une au moins des places paires de F est à la fois logarithmiquement signée et primitive, on a les identités entre quotients d'exposant 2 :

$$^2\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^{pos} = {}^2\mathcal{C}\ell_F^{pos} \simeq {}^2WK_2(F).$$

(ii) Si, par contre, F est logarithmiquement imprimitif, en ce sens qu'aucune des places paires de F n'est simultanément logarithmiquement signée et primitive[4]*, l'application canonique $^2\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^{pos} \to {}^2\mathcal{C}\ell_F^{pos}$ n'est pas un isomorphisme.*

Preuve. D'après le Scolie 11, en effet, on a : $^2\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^{pos} = {}^2\mathcal{C}\ell_F^{pos}$ dès que l'une au moins des places pair es du corps F est logarithmiquement signée et primitive ; mais $({}^2\mathcal{C}\ell_F^{pos} : {}^2\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^{pos}) = 2$, dans le cas contraire.

Preuve du Théorème. Revenons sur la transformée par le serpent de la suite exacte de Moore. Les formules explicites établies plus haut nous donnent le diagramme commutatif, où la formule du produit est prise, en haut comme en bas, sur l'ensemble PS_F des places signées de F :

$$\begin{array}{ccccccc}
{}^2\mathcal{R}_F & \xrightarrow{(\widetilde{v},\ \mathrm{sg})} & {}^2\mathcal{D}\ell_F^{pos} \simeq \widetilde{\bigoplus}_{\mathfrak{p}}\mathbb{F}_2\ \mathfrak{p} & \longrightarrow & {}^2\mathcal{C}\ell_F^{pos} & \longrightarrow & 1 \\
{\scriptstyle \{-1,\ .\ \}}\downarrow & & {\scriptstyle \alpha_F}\downarrow & & {\scriptstyle \beta_F}\downarrow & & \\
{}_2K_2(F) & \xrightarrow{\left(\frac{-1,\,.}{F_{\mathfrak{p}}}\right)} & \widetilde{\bigoplus}_{\mathfrak{p}}\{\pm 1\}_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & {}^2WK_2(F) & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

Dans celui-ci, le morphisme surjectif à gauche est induit par le symbole universel ; l'isomorphisme α_F au centre est la bijection canonique ; et l'application β_F induite entre les quotients à droite est alors l'isomorphisme attendu.

Remarque. Lorsque le corps considéré n'est pas logarithmiquement signé, on a :

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^{pos} = \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \qquad \& \qquad \mathcal{C}\ell_F^{pos} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F,$$

et l'isomorphisme du Théorème 6 s'écrit : $\{\pm 1\} \otimes_{\mathbb{Z}_2} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^{pos} \simeq {}^2WK_2(F)$.

[4] Dans la terminologie de K. Hutchinson [H$_2$], le corps F est dit alors *extra-exceptionnel*.

5. Etude de la trivialité des 2-noyaux sauvages

Donnons en conclusion quelques conséquences simples sur la trivialité :

5.1. Critères logarithmiques de trivialité

Théorème 14. *La 2-partie du noyau hilbertien $WK_2(F)$ d'un corps de nombres logarithmiquement signé est triviale si et seulement si le 2-groupe des classes positives $\mathcal{C}\ell_F^{pos}$ est lui-même trivial, ce qui a lieu si et seulement si les deux conditions suivantes sont simultanément satisfaites :*

(i) le 2-groupe des classes logarithmiques signées $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_F$ est engendré par les classes des diviseurs construits sur les places finies logarithmiquement signées ;

(ii) l'une au moins des places 2-adiques du corps F est à la fois logarithmiquement signée et primitive.

Corollaire 15. *Lorsque les places 2-adiques du corps F ne sont pas logarithmiquement signées*[5]*, il y a équivalence entre les conditions :*

(i) la 2-partie du noyau hilbertien $WK_2(F)$ est triviale ;

(ii) le 2-groupe des classes logarithmiques au sens ordinaire $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ est trivial et le corps F n'admet aucune place réelle.

Preuve. D'après le Théorème 14, en l'absence de places finies logarithmiquement signées, la 2-partie du noyau sauvage $WK_2(F)$ ne peut être triviale que si F n'est pas logarithmiquement signé. L'équivalence résulte donc du Théorème 6.

Corollaire 16. *Lorsque, au contraire, les places 2-adiques du corps F sont toutes logarithmiquement signées, il y a équivalence entre les conditions :*

(i) la 2-partie du noyau hilbertien $WK_2(F)$ est triviale ;

(ii) le 2-groupe des 2-classes d'idéaux au sens ordinaire $\mathcal{C}\ell_F'^{ord}$ est trivial et F possède des 2-unités (au sens ordinaire) de toutes signatures logarithmiques (à la formule du produit près) ;

(iii) le 2-groupe des 2-classes d'idéaux au sens restreint $\mathcal{C}\ell'_F$ est trivial et F possède des 2-unités au sens restreint de toutes signatures logarithmiques aux places 2-adiques (à la formule du produit près).

Preuve. Si toutes les places paires du corps F sont logarithmiquement signées, F est évidemment logarithmiquement signé et PLS_F est alors l'ensemble des places non complexes $\mathfrak{p}$ de F qui divisent 2∞. Le sous-groupe $\mathcal{J}_F^{pos}$ de $\mathcal{J}_F$ introduit dans la section 4.1 est ainsi :

$$\mathcal{J}_F^{pos} = \prod_{\mathfrak{p}|2} \mathcal{R}_\mathfrak{p}^+ \ \prod_{\mathfrak{p}\nmid 2} \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p} = \prod_{\mathfrak{p}|2} \mathcal{R}_\mathfrak{p}^+ \ \prod_{\mathfrak{p}\nmid 2\infty} \mu_\mathfrak{p} \ ;$$

et il est naturel de le comparer à $\mathcal{J}'_F = \prod_{\mathfrak{p}|2} \mathcal{R}_\mathfrak{p} \ \prod_{\mathfrak{p}\nmid 2\infty} \mu_\mathfrak{p}$.

Considérons donc le morphisme naturel φ du groupe des classes positives $\mathcal{C}\ell_F^{pos} = \mathcal{J}_F^*/\mathcal{J}_F^{pos}\mathcal{R}_F$ dans le 2-groupe $\mathcal{C}\ell'_F = \mathcal{J}_F/\mathcal{J}'_F\mathcal{R}_F$ des 2-classes de diviseurs (ou 2-classes d'idéaux au sens restreint) du corps F.

[5] C'est à dire, dans la terminologies de Hutchinson [H2], lorsque F est superexceptionnel.

D'un côté, il vient $\operatorname{Coker}\varphi = \mathcal{J}_F/\mathcal{J}_F^* \prod_{\mathfrak{p}|2} \mathcal{R}_\mathfrak{p} = 1$, puisque chacune (donc l'une au moins) des places paires vérifie $\mathcal{R}_\mathfrak{p} \not\subset \mathcal{J}_F^*$. D'un autre côté, nous avons :

$$\operatorname{Ker}\varphi = (\mathcal{J}_F^* \cap \mathcal{J}'_F\mathcal{R}_F)/\mathcal{J}_F^{pos}\mathcal{R}_F \simeq (\textstyle\prod_{\mathfrak{p}|2} \mathcal{R}_\mathfrak{p})^*/(\prod_{\mathfrak{p}|2} \mathcal{R}_\mathfrak{p})^* \cap \mathcal{R}_F\mathcal{J}_F^{pos} \ ;$$

c'est à dire, puisque les idèles principaux qui apparaissent au dénominateur sont des 2-unités au sens restreint (i.e. des éléments de $\mathcal{E}'_F = \mathcal{R}_F \cap \mathcal{J}'_F$) :

$$\operatorname{Ker}\varphi \simeq \widetilde{\oplus}_{\mathfrak{p}|2}\{\pm 1\}/\operatorname{sg}_2(\mathcal{E}'_F),$$

où le tilde sur le signe somme correspond à la formule du produit et l'application sg_2 est donnée par les fonctions signes logarithmiques attachées aux places 2-adiques. En d'autres termes, nous avons la suite exacte courte canonique :

$$1 \longrightarrow \widetilde{\oplus}_{\mathfrak{p}|2}\{\pm 1\}/\operatorname{sg}_2(\mathcal{E}'_F) \longrightarrow \mathcal{C}\ell_F^{pos} \longrightarrow \mathcal{C}\ell'_F \longrightarrow 1 \ ;$$

et le terme médian est trivial si et seulement si les termes latéraux le sont ; d'où l'équivalence $(i) \Leftrightarrow (iii)$. L'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$ s'obtient de façon semblable : il suffit, en effet, de remplacer $\mathcal{J}'_F$ par $\mathcal{J}'^{ord}_F = \prod_{\mathfrak{p}|2\infty} \mathcal{R}_\mathfrak{p} \ \prod_{\mathfrak{p}\nmid 2\infty} \mu_\mathfrak{p}$ pour obtenir cette fois la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \widetilde{\oplus}_{\mathfrak{p}|2\infty}\{\pm 1\}/\operatorname{sg}_{2\infty}(\mathcal{E}'^{ord}_F) \longrightarrow \mathcal{C}\ell_F^{pos} \longrightarrow \mathcal{C}\ell'^{ord}_F \longrightarrow 1.$$

La trivialité du 2-noyau hilbertien se lit donc dans ce cas sur les 2-groupes de 2-classes d'idéaux et la signature logarithmique des 2-unités.

Pour illustrer les résultats précédents, nous revenons ci-dessous sur le cas non trivial le plus simple : celui des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}$, déjà étudié dans [BS] et [CK]. Nous allons voir que l'introduction de la signature logarithmique permet de donner une interprétation lumineuse des conditions diophantiennes qui expriment dans ce cas la trivialité du 2-noyau sauvage.

Observons d'abord que, dans un corps F galoisien sur $\mathbb{Q}$, les places 2-adiques sont simultanément logarithmiquement signées ou non ; de sorte que nous pouvons dans ce cas rassembler comme suit les deux derniers corollaires :

Théorème 17. *La 2-partie du noyau hilbertien $WK_2(F)$ d'un corps de nombres absolument galoisien F est triviale si et seulement si l'on est dans l'une des deux situations suivantes :*

(i) ou bien les places 2-adiques du corps F ne sont pas logarithmiquement signées, F est totalement imaginaire et son 2-groupe des classes logarithmiques au sens ordinaire $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ est trivial ;

(ii) ou bien les places 2-adiques du corps F sont toutes logarithmiquement signées, le 2-groupe des 2-classes d'idéaux au sens restreint $\mathcal{C}\ell'_F$ est trivial et F possède des 2-unités (au sens restreint) de toutes signatures logarithmiques aux places 2-adiques (à la formule du produit près).

Scolie 18. *Et il revient au même dans le Théorème de remplacer les conditions portant sur les groupes de 2-classes et de 2-unités au sens restreint par leurs analogues au sens ordinaire en considérant alors les signatures logarithmiques aux places réelles ou 2-adiques (toujours à la formule du produit près).*

5.2 Application aux corps quadratiques $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$

Appliquons maintenant ce résultat avec $F = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ pour un $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$ sans facteur carré. Il nous faut pour cela distinguer suivant que les places 2-adiques sont ou non logarithmiquement signées.

• Le cas où elles ne sont pas logarithmiquement signées se produit lorsque la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique $\mathbb{Q}_2^c[\sqrt{d}]$ du corps local $\mathbb{Q}_2[\sqrt{d}]$ contient la racine quatrième i ; c'est à dire lorsqu'on a : $\sqrt{d} \in \mathbb{Q}_2[\sqrt{-1}, \sqrt{2}] \setminus \mathbb{Q}_2[\sqrt{2}]$, i.e. $d \equiv -1 \mod 8$ ou bien $d \equiv -2 \mod 16$. Dans ce cas, l'assertion (i) du Théorème nous dit que le 2-noyau $WK_2(F)$ est trivial si et seulement si on a $d < 0$ et $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F = 1$. Or les corps quadratiques imaginaires qui ont un 2-groupe des classes logarithmiques trivial ont été déterminés dans [S$_1$] à l'aide de la formule de points fixes établie dans [J$_2$] ; parmi ceux-ci, les seuls qui vérifient les congruences requises sont $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$. Ces corps sont même 2-réguliers et 2-rationnels, ce qui revient à dire que, non seulement leur 2-noyau sauvage $WK_2(F)$ est trivial, mais que leur 2-noyau modéré $R_2(F)$ l'est aussi (cf. [GJ] ou [JN]).

• Le cas où les places 2-adiques sont logarithmiquement signées correspond au système de congruences $d \not\equiv -1 \mod 8$ et $d \not\equiv -2 \mod 16$. Dans ce cas l'assertion (ii) du Théorème nous invite à considérer le 2-groupe des 2-classes (au sens restreint) $\mathcal{C}\ell'_F$ et, lorsque 2 est décomposé, le signe logarithmique aux places 2-adiques des 2-unités (au sens restreint) de F. Or la formule des classes ambiges écrite pour les groupes $\mathcal{C}\ell'_F$ dans l'extension cyclique $F/\mathbb{Q}$ donne ici (cf. [Gr] ou [J$_0$], Th. III.1.9) :

$$|\mathcal{C}\ell'^{\,\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})}_F| = \frac{d_2(F/\mathbb{Q}) \prod_{p \nmid 2\infty} e_p(F/\mathbb{Q})}{[F:\mathbb{Q}](\mathcal{E}'_{\mathbb{Q}} : \mathcal{E}'_{\mathbb{Q}} \cap N_{F/\mathbb{Q}}(\mathcal{R}_F))}$$

où $d_2(F/\mathbb{Q})$ est le degré local en 2 et $e_p(F/\mathbb{Q})$ l'indice de ramification en la place p. Dans notre cas, le groupe $\mathcal{E}'_{\mathbb{Q}}$ des 2-unités au sens restreint est le $\mathbb{Z}_2$-module multiplicatif engendré par 2, de sorte que l'indice normique au dénominateur vaut 1 ou 2. Distinguons donc deux cas suivant la décomposition de la place 2 :

• Pour $d \not\equiv \pm 1 \mod 8$ et $d \not\equiv -2 \mod 16$ nous avons directement :

$${}_2WK_2(F) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{C}\ell'_F = 1 \Leftrightarrow \prod_{p \nmid 2\infty} e_p(F/\mathbb{Q}) = (\mathcal{E}'_{\mathbb{Q}} : \mathcal{E}'_{\mathbb{Q}} \cap N_{F/\mathbb{Q}}(\mathcal{R}_F)) = 1 \text{ ou } 2.$$

Et les corps quadratiques ainsi obtenus qui ont un 2-noyau sauvage trivial sont donc $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ainsi que les $\mathbb{Q}[\sqrt{\pm p}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{\pm 2p}]$, pour les premiers $p \equiv \pm 3 \mod 8$.

• Pour $d \equiv 1 \mod 8$ enfin la trivialité du 2-groupe des 2-classes $\mathcal{C}\ell'_F$ s'écrit :

$$\prod_{p \nmid 2\infty} e_p(F/\mathbb{Q}) = 2(\mathcal{E}'_{\mathbb{Q}} : \mathcal{E}'_{\mathbb{Q}} \cap N_{F/\mathbb{Q}}(\mathcal{R}_F)) = 2 \text{ ou } 4 \;;$$

ce qui donne les corps $\mathbb{Q}[\sqrt{\pm p}]$ avec $p \equiv \mp 1 \mod 8$ et les corps $\mathbb{Q}[\sqrt{\pm pq}]$ avec $p \equiv \pm q \equiv 3 \text{ ou } -3 \mod 8$. Mais il reste à déterminer le signe logarithmique des 2-unités (au sens restreint) en l'une, disons $\mathfrak{l}$, des places 2-adiques. Si F

est imaginaire, -1 est une unité au sens restreint, de signature logarithmique $\mathrm{sg}_{\mathfrak{l}}(-1) = -1$, et il n'y a rien à vérifier. Si F est réel, c'est plus compliqué.

Pour $F = \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ avec $p \equiv 1 \mod 8$, la principalité de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ permet d'écrire le nombre premier p sous la forme :

$$p = u^2 - 2v^2, \text{ avec } u > 0,\ v > 0,\ u \equiv \pm 1 \text{ et } v \equiv 0 \mod 4.$$

On peut ainsi choisir $\sqrt{p}$ dans $F_{\mathfrak{l}} = \mathbb{Q}_2$, de telle sorte qu'on ait :

$$\sqrt{p} \equiv u \mod 16 \quad \text{donc} \quad \mathrm{sg}_{\mathfrak{l}}\left(\tfrac{u+\sqrt{p}}{2}\right) = \mathrm{sg}_{\mathfrak{l}}(u).$$

Comme le 2-groupe de classes d'idéaux de F est alors trivial, -1, qui est norme, est la norme de l'unité fondamentale ε de F et l'image du groupe des 2-unités (au sens restreint) dans le quotient $\mathcal{R}_F/\mathcal{R}_F^2 = F^\times/F^{\times 2}$ est ainsi engendrée par les seules classes des éléments 2 et $(u + \sqrt{p})/2$. En fin de compte, la condition de signature cherchée s'écrit ici :

$$u \equiv -1 \mod 4 \ ;$$

ce qui redonne bien la congruence de [BS].

Pour $F = \mathbb{Q}[\sqrt{pq}]$ avec $p \equiv q \equiv \pm 3 \mod 8$, il est possible de poser $u = (p + q)/2 \equiv p$ et $v = (q - p)/2 \equiv 0 \mod 4$, ce qui donne naturellement $pq = u^2 - v^2$ et permet de choisir $\sqrt{pq}$ dans $F_{\mathfrak{l}} = \mathbb{Q}_2$ de telle sorte qu'on ait :

$$\sqrt{pq} \equiv u \mod 8 \quad \text{donc} \quad \mathrm{sg}_{\mathfrak{l}}\left(u + \sqrt{pq}\right) = \mathrm{sg}_{\mathfrak{l}}(u).$$

Ici encore la formule des classes ambiges montre que le 2-groupe des classes d'idéaux est trivial et deux cas se présentent : pour $p \equiv q \equiv +3 \mod 8$, l'élément -1 n'est pas norme et l'unité fondamentale ε peut être prise totalement positive (aux places réelles) ; l'image des 2-unités (au sens restreint) dans $\mathcal{R}_F/\mathcal{R}_F^2$ est ainsi engendrée par les classes des trois éléments ε, 2 et $u + \sqrt{pq}$; et comme on a alors $u \equiv -1 \mod 4$, la condition de signature requise est bien vérifiée. Pour $p \equiv q \equiv -3 \mod 8$, en revanche, il vient $u \equiv +1 \mod 4$; les deux éléments 2 et $u + \sqrt{pq}$ ont alors une signature logarithmique triviale (c'est à dire qu'ils sont positifs aux places réelles *et* aux places 2-adiques) ; et l'image dans $\mathcal{R}_F/\mathcal{R}_F^2$ du groupe des 2-unités au sens ordinaire E_F^{ord} étant engendrée conjointement par leurs classes respectives et celle de -1, il en résulte que le corps F ne peut alors contenir des 2-unités au sens ordinaire de toutes signatures logarithmiques (à la formule du produit près). En d'autres termes, dans ce dernier cas, il suit que le 2-noyau sauvage $WK_2(F)$ n'est pas trivial.

Compte tenu des résultats de [GJ], qui établissent que seuls sont 2-réguliers parmi les corps précédents ceux qui sont primitivement ramifiés sur $\mathbb{Q}$ (i.e. non ramifiés en dehors éventuellement de 2 et d'un unique premier impair $p \equiv \pm 3 \mod 8$), l'ensemble de la discussion précédente peut se résumer comme suit :

Corollaire 19. *Les corps quadratiques $F = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ dont le 2-noyau régulier $R_2(F)$ (et donc aussi le 2-noyau sauvage $WK_2(F)$) est trivial sont :*

(i) les trois corps 2-ramifiés $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$;

(ii) et les corps $\mathbb{Q}[\sqrt{\pm p}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{\pm 2p}]$, pour les premiers $p \equiv \pm 3 \mod 8$.

Ont en outre un 2-noyau sauvage trivial les corps 2-décomposés suivants :

(iii) les corps imaginaires $\mathbb{Q}[\sqrt{-p}]$ *avec* p *premier,* $p \equiv -1 \mod 8$ *;*

(iv) et les corps $\mathbb{Q}[\sqrt{-pq}]$ *avec* p *et* q *premiers,* $p \equiv -q \equiv \pm 3 \mod 8$ *;*

(v) les corps réels $\mathbb{Q}[\sqrt{pq}]$ *avec* p *et* q *premiers,* $p \equiv q \equiv +3 \mod 8$ *;*

(vi) et les corps $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$*, pour les premiers* p *de la forme* $p = u^2 - 2v^2$ *avec* $u > 0,\ v > 0,\ u \equiv -1$ *et* $v \equiv 0 \mod 4$.

Références

[AJ] B. Anglès & J.-F. Jaulent, *Théorie des genres des corps globaux*, Manuscripta Math. **101** (2000), 513–532.

[BS] J. Browkin & A. Schinzel, *On Sylow 2-subgroups of* $K_2(O_F)$ *for quadratic number fields* F, J. reine angew. Math. **331** (1982), 104–113.

[CK] A. Candiotti & K. Kramer, *On the 2-Sylow subgroup of the Hilbert kernel of* K_2 *of number fields*, Acta Arith. **52** (1989), 49–65.

[FG] L.J. Federer & B.H. Gross, *Regulators and Iwasawa modules*, Inv. Math. **62** (1981), 443–457.

[GJ] G. Gras & J.-F. Jaulent, *Sur les corps de nombres réguliers*, Math. Z. **202** (1989), 343–365.

[Gr] G. Gras, *Classes généralisées invariantes*, J. Math. Soc. Japon **3** (1994), 467–476.

[H_1] K. Hutchinson, *The 2-Sylow subgroup of the wild kernel of exceptional number fields*, J. Number Th. **87** (2001), 222–238.

[H_2] K. Hutchinson, *Exotic Steinberg symbols*, Prépublication.

[J_0] J.-F. Jaulent, *L'arithmétique des* ℓ*-extensions (Thèse d'Etat)*, Pub. Math. Fac. Sci. Besançon Théor. Nombres 1985-86, (1986), vii+348 pp.

[J_1] J.-F. Jaulent, *Sur le noyau sauvage des corps de nombres*, Acta Arith. **67** (1994), 335–348.

[J_2] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 301–325.

[J_3] J.-F. Jaulent, *Théorie* ℓ*-adique du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.

[J_4] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques signées des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **12** (2000), 455–474 ; *Corrigendum à "Classes logarithmiques signées des corps de nombres"*, J. Théor. Nombres Bordeaux **14** (2002), 345–349.

[JN] J.-F. Jaulent & T. Nguyen Quang Do, *Corps p-rationnels, corps p-réguliers et ramification restreinte*, J. Théor. Nombres. Bordeaux **5** (1993), 343–365.

[JSa] J.-F. Jaulent & O. Sauzet, *Extensions quadratiques 2-birationnelles de corps de nombres totalement réels*, Pub. Matemàtiques **44** (2000), 343–353.

[JSo] J.-F. Jaulent & F. Soriano, *Sur le noyau sauvage des corps de nombres et le groupe des classes logarithmiques*, Math. Z. **238** (2001), 335–354.

[Ke] F. Keune, *Quadratics numbers having {-1, -1} as a non-trivial element of their wild kernel*, J. Number Th. **63** (1997), 30–33.

[KM] M. Kolster & A. Movahhedi, *Biquadratic number fields with trivial 2-primary hilbert kernels*, Prépublication.

[S_1] F. Soriano, *Classes logarithmiques ambiges des corps quadratiques*, Acta Arith. **78** (1997), 201–219.

[S_2] F. Soriano, *Classes logarithmiques au sens restreint*, Manuscripta Math. **93** (1997), 409–420.

[S_3] F. Soriano, *Classes logarithmiques généralisées ambiges*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **68** (1998), 329–338.

[Ta] J. Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology*, Invent. Math. **36** (1976), 257–274.

[Th] H. Thomas, *Trivialité du 2-rang du noyau hilbertien*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 301–325.

Jean-François Jaulent
Université Bordeaux 1
Institut de Mathématiques
351, cours de la Libération
F-33405 TALENCE Cedex
jaulent@math.u-bordeaux.fr

Florence Soriano-Gafiuk
Département de Mathématiques
Université de Metz
Ile du Saulcy
F-57045 METZ Cedex
soriano@poncelet.univ-metz.fr