Généralisation d'un théorème de Greenberg*

Jean-François JAULENT

Résumé. Nous formulons une conjecture générale sur le polynôme caractéristique des modules d'Iwasawa S-décomposés T-ramifiés au-dessus de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique d'un corps de nombres. Nous montrons qu'elle est en fait équivalente à la conjonction des conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min. Nous étendons ainsi un théorème de semi-simplicité de Greenberg et, au passage, un isomorphisme de Kuz'min.

Abstract. We formulate a general conjecture on the characteristic polynomials of S-decomposed T-ramified Iwasawa modules over the cyclotomic $\mathbb{Z}_\ell$-extension of a number field. We show that this conjecture is equivalent to the conjunctions of the classical conjectures of Leopoldt and of Gross-Kuz'min. We so extend a result of semi-simplicity of Greenberg and, by the way, an isomorphism of Kuz'min.

Introduction

Soit ℓ un nombre premier arbitraire, K un corps de nombres, K_∞ sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique et $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma - 1]]$ l'algèbre d'Iwasawa du groupe $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K) = \gamma_\ell^{\mathbb{Z}}$.

Un théorème de Greenberg (cf. [3]) affirme que, si K est abélien, le polynôme caractéristique du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{cd}}/K_\infty)$ de la plus grande pro-ℓ-extension abélienne non ramifiée et ℓ-décomposée K_∞^{cd} de K_∞, regardé comme Λ-module, n'est pas divisible par $(\gamma - 1)$.

L'objet de cette note est d'introduire une conjecture générale, pour tout corps de nombres K et tout nombre premier ℓ, faisant intervenir deux ensembles finis disjoints S et T de places finies du corps K, qui généralise la situation considérée par Greenberg. Plus précisément, nous postulons que le groupe de Galois $\mathcal{C}_S^T = \mathrm{Gal}(H_S^T(K_\infty)/K_\infty)$ attaché à la pro-ℓ-extension abélienne maximale $H_S^T(K_\infty)$ de K_∞ qui est S-décomposée et T-ramifiée (i.e. complètement décomposée aux places au-dessus de S et non-ramifiée en dehors des places au-dessus de T) est encore un Λ-module (non nécessairement de torsion) dont le polynôme caractéristique n'est pas divisible par $(\gamma - 1)$ dès lors que la réunion $S \cup T$ contient l'ensemble Pl_ℓ des places au-dessus de ℓ.

Sans surprise, cette conjecture contient de fait les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min (cf. e.g. [10]), qui correspondent respectivement aux cas $(S, T) = (\emptyset, Pl_\ell)$ et $(S, T) = (Pl_\ell, \emptyset)$, cette dernière situation étant précisément celle considérée par Greenberg. Le résultat principal de notre étude (Th. 5) est que la réciproque est vraie : si K est totalement réel, ou si K est un corps à conjugaison complexe extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps totalement réel, la conjecture cyclotomique que nous avançons est vraie dès lors que K vérifie à la fois la conjecture de Leopoldt et celle de Gross-Kuz'min. En d'autres termes, la conjecture cyclotomique est équivalente à la conjonction des conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min. Elle est de ce fait satisfaite par les corps abéliens (ce qui généralise le résultat de Greenberg) et quelques autres, notamment les corps logarithmiquement principaux, dont on sait qu'ils vérifient les conjectures de Gross-Kuz'min et de Leopoldt en présence des racines 2ℓ-ièmes de l'unité (cf. e.g. [5]).

Nota. Pendant la rédaction de ce travail, nous avons eu connaissance d'une pré-publication de Lee et Seo [14] qui redémontre (sans y référer explicitement) quelques-uns des résultats de [6] et propose une conjecture voisine de la nôtre (mais *de facto* équivalente) dans une formulation plus compliquée en l'absence de l'hypothèse $Pl_\ell \subset S \cup T$ (cf. la remarque *in fine* de la présente note).

*Arch. Math. **111** (2008), 569–578

1 Le ℓ-groupe des S-classes T-infinitésimales d'un corps de nombres

Rappelons succinctement quelques éléments de la Théorie ℓ-adique du corps de classes telle qu'exposée dans [8] : Le nombre premier ℓ étant supposé fixé, pour chaque place $\mathfrak{p}$ du corps de nombres K nous notons $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} = \varprojlim K_\mathfrak{p}^\times / K_\mathfrak{p}^{\times \ell^n}$ le ℓ-adifié du groupe multiplicatif du complété $K_\mathfrak{p}$ de K en $\mathfrak{p}$; par $\mathcal{U}_{K_\mathfrak{p}}$ son sous-groupe unité (au sens habituel) ; et par $\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}$ le groupe des unités logarithmiques, i.e. le sous-groupe de normes attaché à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $K_\mathfrak{p}^c$ de $K_\mathfrak{p}$.

Le ℓ-adifié du groupe des idèles du corps K est le produit restreint $\mathcal{J}(K) = \prod_\mathfrak{p}^{\text{res}} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ formé des familles $(x_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ dont presque tous les éléments sont des unités. Son sous-groupe unité est le produit $\mathcal{U}(K) = \prod_\mathfrak{p} \mathcal{U}_{K_\mathfrak{p}}$; et celui des unités logarithmiques est le produit $\widetilde{\mathcal{U}}(K) = \prod_\mathfrak{p} \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}$. Le sous-groupe des idèles principaux est le tensorisé $\mathcal{R}(K) = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} K^\times$ du groupe multiplicatif de K ; il se plonge canoniquement dans $\mathcal{J}(K)$ et définit un quotient compact que la Théorie identifie au groupe de Galois $\mathcal{G}(K) = \mathrm{Gal}(K^{\text{ab}}/K)$ de la pro-ℓ-extension abélienne maximale de K.

Cela étant, pour tout couple (S,T) d'ensembles finis disjoints de places de K nous notons $\mathcal{R}_S(K) = \prod_{\mathfrak{p}\in S} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ et $\mathcal{J}^T(K) = \prod_{\mathfrak{p}\notin T}^{\text{res}} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$; puis $\mathcal{U}_S(K) = \prod_{\mathfrak{p}\in S} \mathcal{U}_{K_\mathfrak{p}}$ et $\mathcal{U}^T(K) = \prod_{\mathfrak{p}\notin T} \mathcal{U}_{K_\mathfrak{p}}$. Et la Théorie ℓ-adique du corps de classes identifie le groupe de Galois $\mathcal{G}_S^T(K) = \mathrm{Gal}(H_S^T(K)/K)$ de la pro-ℓ-extension abélienne S-décomposée T-ramifiée maximale $H_S^T(K)$ de K au quotient :

$$\mathcal{J}(K)/\mathcal{J}_S^T(K)\mathcal{R}(K), \text{ avec } \mathcal{J}_S^T(K) = \mathcal{R}_S(K)\mathcal{U}^T(K) = \textstyle\prod_{\mathfrak{p}\in S} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{p}\notin T} \mathcal{U}_{K_\mathfrak{p}}.$$

Celui-ci s'interprète alors comme groupe de classes de diviseurs de la façon suivante :

Définition 1. *Soient S et T deux ensembles finis disjoints de places d'un corps de nombres K.*
- *Le ℓ-groupe des S-diviseurs étrangers à T est le quotient $\mathcal{D}_S^T(K) = \mathcal{J}^T(K)/\mathcal{J}_S^T(K)$.*
- *Son sous-groupe principal T-infinitésimal est l'image $\mathcal{P}_S^T(K) = \mathcal{R}^T(K)\mathcal{J}_S^T(K)/\mathcal{J}_S^T(K)$ du groupe des idèles principaux T-infinitésimaux $\mathcal{R}^T(K) = \mathcal{R}(K) \cap \mathcal{J}^T(K)$.*
- *Et nous disons que le quotient $\mathcal{C}\ell_S^T(K) = \mathcal{D}_S^T(K)/\mathcal{P}_S^T(K) \simeq \mathcal{G}_S^T(K)$ est le ℓ-groupe des S-classes T-infinitésimales du corps K.*

Bien entendu, c'est le théorème d'approximation simultanée qui permet de représenter chaque classe de $\mathcal{J}(K)/\mathcal{R}(K)$ par un élément de $\mathcal{J}^T(K)$. On tombe alors sur la description du groupe $\mathcal{C}\ell_S^T(K)$ donnée dans [6] (pp. 148–150), à l'inversion près de S et de T ; ce qui permet de le traiter comme un groupe de classes d'idéaux et donc de lui appliquer en particulier les calculs de classes invariantes à la Chevalley qui conduisent à une généralisation naturelle de la suite exacte des classes ambiges dans ce nouveau contexte (cf. [6], Th. II.2.33). En particulier, il vient :

Proposition 2. *Dans une ℓ-extension cyclique N/K de corps de nombres, le quotient du ℓ-groupe des S-classes T-infinitésimales ambiges par le sous-groupe des classes des S-diviseurs ambiges étrangers à T est donné par l'isomorphisme :*

$$\mathcal{C}\ell_S^T(N)^\Gamma / cl_S^T\big(\mathcal{D}_S^T(N)^\Gamma\big) \simeq \big(\mathcal{E}_S^T(K) \cap N_{N/K}(\mathcal{R}(N))\big)/N_{N/K}(\mathcal{E}_S^T(N)).$$

Ici $\mathcal{E}_S^T(K) \cap N_{N/K}(\mathcal{R}(N))$ est le pro-ℓ-groupe des S-unités T-infinitésimales du corps K qui sont normes dans N/K et $N_{L/K}(\mathcal{E}_S^T(N))$ est le sous-groupe des normes de S-unités T-infinitésimales.

Preuve. Pour la commodité du lecteur, plutôt que de renvoyer aux arguments cohomologiques développés dans [6], expliquons simplement comment ce résultat s'explicite dans le cas cyclique : tout comme dans la preuve historique de Chevalley pour les classes d'idéaux prenons un générateur arbitraire γ du ℓ-groupe cyclique $\Gamma = \mathrm{Gal}(N/K)$ et partons d'une classe invariante $cl_S^T(\mathfrak{A}_N) \in \mathcal{C}\ell_S^T(N)$, représentée par un S-diviseur étranger à T. Par hypothèse, le S-diviseur $\mathfrak{A}_N^{\gamma-1}$ est alors principal, engendré par un élément T-infinitésimal $\alpha_N \in \mathcal{R}^T(N)$ défini modulo une S-unité T-infinitésimale. Sa norme $\varepsilon_K = N_{N/K}(\alpha_N)$ est ainsi une S-unité T-infinitésimale de K (i.e. un élément de $\mathcal{E}_S^T(K) = \mathcal{R}^T(K) \cap \mathcal{J}_S^T(K)$), définie modulo la norme d'une S-unité T-infinitésimale de N. On obtient par là un morphisme de $\mathcal{C}\ell_S^T(N)^\Gamma$ vers $\big(\mathcal{E}_S^T(K) \cap N_{N/K}(\mathcal{R}(N))\big)/N_{N/K}(\mathcal{E}_S^T(N))$ dont le noyau est clairement $cl_S^T\big(\mathcal{D}_S^T(N)^\Gamma\big)$ et qui est surjectif en vertu du théorème 90 de Hilbert appliqué aux groupes des S-diviseurs étrangers à T (cf. e.g. [6], Lem. II.2.32).

2 Module d'Iwasawa S-décomposé T-ramifié d'un corps surcirculaire

Montons maintenant la $\mathbb{Z}_\ell$-tour cyclotomique $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au-dessus de K et considérons le corps surcirculaire $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Désignons par S et T deux ensembles finis disjoints de places finies de K ; puis, pour toute extension N de K continuons à noter (en l'absence d'ambiguïté) par S et T les ensembles respectifs de places de N au-dessus des précédentes.

Faisons choix d'un générateur topologique γ du groupe procyclique $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ et écrivons $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma - 1]]$ l'algèbre d'Iwasawa attachée à Γ.

Le groupe de Galois $\mathcal{C}_S^T(K_\infty) = \mathrm{Gal}(H_S^T(K_\infty)/K_\infty)$ de la pro-ℓ-extension abélienne maximale $H_S^T(K_\infty)$ de K_∞ qui est S-décomposée et T-ramifiée s'identifie à la limite projective

$$\mathcal{C}_S^T(K_\infty) = \varprojlim \mathcal{C}\ell_S^T(K_n)$$

des pro-ℓ-groupes de S-classes T-infinitésimales des corps K_n pour les applications normes. Il est bien connu que c'est un Λ-module noethérien, pseudo-isomorphe comme tel à la somme directe

$$\mathcal{C}_S^T(K_\infty) \sim \Lambda^{\rho_S^T} \oplus (\oplus_{i=1}^h \Lambda/P_i\Lambda)$$

d'un Λ-module libre de dimension finie et d'un nombre fini de quotients monogènes dont les annulateurs respectifs sont engendrés par des polynômes non nuls P_i ordonnés par divisibilité. Chaque P_i s'écrit comme produit $\ell^{\mu_i}\widetilde{\mathcal{P}}_i$ d'une puissance de ℓ et d'un polynôme distingué de degré λ_i. Le produit $\chi_S^T = \prod P_i$ est le polynôme caractéristique du module d'Iwasawa $\mathcal{C}_S^T(K_\infty)$; et les entiers naturels ρ_S^T, $\mu_S^T = \sum \mu_i = \nu_\ell(\chi_S^T)$ et $\lambda_S^T = \sum \lambda_i = \deg(\chi_S^T)$ sont ses invariants structurels.

Le calcul de l'invariant ρ_S^T est effectué dans [11] (Th. 9). Il est conjecturé que l'invariant μ_S^T est toujours nul, ce qui revient à postuler que le polynôme caractéristique χ_S^T n'est pas divisible par ℓ. C'est effectivement le cas pour K abélien, lorsque T est vide et que S est l'ensemble Pl_ℓ des places au-dessus de ℓ (autrement dit lorsque $H_S^T(K_\infty)$ est la pro-ℓ-extension abélienne non ramifiée ℓ-décomposée maximale de K_∞), en vertu d'un théorème de Ferrero et Washington ; et ce résultat vaut encore, sous des conditions moins restrictives sur les ensembles S et T (cf. [11], Th. 13).

Enfin, toujours pour K abélien, Greenberg [3] a montré que $\chi_{Pl_\ell}^\emptyset$ n'est pas non plus divisible par $\omega = \gamma - 1$. Dans ce même contexte abélien, nous allons démontrer la conjecture suivante :

Conjecture cyclotomique. *Soient ℓ un nombre premier arbitraire ; K un corps de nombres ; et $K_\infty = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique ; soit $Pl_\ell = S \sqcup T$ une partition arbitraire de l'ensemble Pl_ℓ des places au-dessus de ℓ.*

Alors le polynôme caractéristique du Λ-module $\mathcal{C}_S^T(K_\infty) = \mathrm{Gal}(H_S^T(K_\infty)/K_\infty)$ attaché à la pro-ℓ-extension abélienne maximale $H_S^T(K_\infty)$ de K_∞ qui est S-décomposée et T-ramifiée n'est pas divisible par $\omega = \gamma - 1$. En d'autres termes, son sous-module des points fixes $\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma$ est fini :

$$\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma \sim 1.$$

Proposition 3. *La Conjecture cyclotomique contient celles de Gross-Kuz'min et de Leopoldt.*

Preuve. Prenons $S = Pl_\ell$ et $T = \emptyset$. Le pro-ℓ-groupe $\mathcal{C}_{Pl_\ell}^\emptyset(K_\infty)$ n'est alors autre que le module de Kuz'min-Tate $\mathcal{T}(K_\infty)$ (cf. [10], §2), i.e. le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{cd}}/K_\infty)$ de la pro-ℓ-extension abélienne maximale de K_∞ qui est complètement décomposée en toutes les places (car la montée dans la tour cyclotomique K_∞/K a épuisé toute possibilité d'inertie aux places étrangères à ℓ). Cela étant, comme $\mathcal{T}(K_\infty)$ est un Λ-module de torsion, la finitude de son sous-groupe invariant $\mathcal{T}(K_\infty)^\Gamma$ équivaut à celle de son quotient des genres ${}^\Gamma\mathcal{T}(K_\infty) = \mathcal{T}(K_\infty)/\mathcal{T}(K_\infty)^{\gamma-1}$, lequel est le ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}(K)$ dont la conjecture de Gross-Kuz'min pour K postule précisément la finitude (cf. e.g. [10], Th. 5). La Conjecture implique donc celle de Gross-Kuz'min.

Penons maintenant $S = \emptyset$ et $T = Pl_\ell$. Le pro-ℓ-groupe $\mathcal{C}_\emptyset^{Pl_\ell}(K_\infty)$ est alors le groupe de Galois $\mathcal{X}(K_\infty) = \mathrm{Gal}(K_\infty^{\ell\mathrm{r}}/K_\infty)$ de la pro-ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale de K_∞. Et il est bien connu depuis Iwasawa [4] que $\mathcal{X}(K_\infty)$ est un Λ-module qui a pour dimension $\rho_\emptyset^{Pl_\ell}$ le nombre c_K de places complexes du corps K. La finitude du sous-groupe invariant $\mathcal{X}(K_\infty)^\Gamma$ s'écrit donc aussi bien ${}^\Gamma\mathcal{T}(K_\infty) \simeq \mathbb{Z}_\ell^{c_K} \oplus \mathcal{T}(K)$, pour un certain module fini $\mathcal{T}(K)$. Or, ${}^\Gamma\mathcal{T}(K_\infty)$ n'est autre que le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{\ell\mathrm{r}}/K_\infty)$ attaché à la pro-ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale de K. La finitude de $\mathcal{T}(K)$ exprime donc l'existence d'exactement $(c_K + 1)$ $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de K linéairement indépendantes, ce qui est précisément la conjecture de Leopoldt (cf. e.g. [10], Th. 12).

3 Équivalence avec les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min

Regardons d'abord le cas totalement réel (déjà étudié dans [9] §3 via la théorie des genres) :

Théorème 4. *Pour K totalement réel, la Conjecture cyclotomique résulte de celle de Leopoldt.*

Preuve. La conjecture de Leopoldt affirme qu'un corps totalement réel K possède une unique $\mathbb{Z}_\ell$-extension, autrement dit que sa pro-ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale $K^{\ell\mathrm{r}}$ est de degré fini sur la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $K^{\mathrm{c}} = K_\infty$. Considérons alors le quotient des genres :

$$^{\Gamma}\mathcal{C}_S^T(K_\infty) = \mathcal{C}_S^T(K_\infty)/\big(\mathcal{C}_S^T(K_\infty)\big)^{\gamma-1}$$

du groupe $\mathcal{C}_S^T(K_\infty)$. Par construction, c'est le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(H_S^T(K_\infty/K)/K_\infty)$ de la plus grande sous-extension $H_S^T(K_\infty/K)$ de $H_S^T(K_\infty)$ qui est abélienne sur K. Or, celle-ci est T-ramifiée sur K_∞, donc ℓ-ramifiée sur K, i.e. contenue dans $K^{\ell\mathrm{r}}$. Ainsi $^{\Gamma}\mathcal{C}_S^T(K_\infty)$ est fini ; de même $\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma$.

Supposons maintenant que K soit une extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps totalement réel K^+. Notons τ la conjugaison complexe et $\Delta = \mathrm{Gal}(K/K^+) = \{1, \tau\}$.

— Si ℓ est impair, les idempotents orthogonaux $e_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \tau)$ permettent de décomposer canoniquement chaque $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module M comme somme directe de ses composantes réelle $M^+ = M^{e_+}$ et imaginaire $M^- = M^{e_-}$. On a ainsi : $M = M^+ \oplus M^-$.

— Si ℓ vaut 2 et que M est $\mathbb{Z}_2$-noethérien, confondre le noyau de $(1 \pm \tau)$ avec l'image de $(1 \mp \tau)$ donne lieu à une erreur finie. On peut donc continuer à définir composantes réelle et imaginaire de M comme image et noyau respectifs de $(1 + \tau)$ et écrire à un fini près : $$M \sim M^+ \oplus M^-.$$

Avec ces conventions, le *Théorème principal* de cette note s'énonce comme suit :

Théorème 5. *Soient K une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps totalement réel K^+ et $S \sqcup T$ une partition de l'ensemble Pl_ℓ des places de K^+ au-dessus de ℓ. Décomposons $\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma$ (à un fini près pour $\ell = 2$) en ses composantes réelle et imaginaire. Alors :*

(i) La finitude de $(\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma)^+$ résulte de la conjecture de Leopoldt pour K.

(ii) La finitude de $(\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma)^-$ résulte de la conjecture de Gross-Kuz'min pour K.

En d'autres termes, la Conjecture cyclotomique pour le corps K, i.e. la finitude de $\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma$, est équivalente à la réunion des conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min pour ce même corps.

Preuve. Examinons successivement les deux assertions :

(i) provient directement du cas totalement réel traité ci-dessus, la composante réelle du groupe $\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma$ correspondant (à un fini près pour $\ell = 2$) au même groupe $\mathcal{C}_S^T(K_\infty^+)^\Gamma$ pour le corps K^+.

(ii) résulte de la généralisation suivante d'un théorème de Kuz'min (cf. [13], Prop. 7.5 et [10], Th. 17) et du fait que, sous la conjecture de Gross-Kuz'min dans K, la composante imaginaire du ℓ-groupe des unités logarithmiques $\widetilde{\mathcal{E}}(K)$ se réduit au ℓ-groupe des racines de l'unité (cf. [7], §3) :

Théorème 6. *Étant donnés deux ensembles finis disjoints S et T de places d'un corps de nombres K, si $S \cup T$ contient l'ensemble Pl_ℓ des places au-dessus de ℓ, on a un isomorphisme naturel :*

$$\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma \simeq \big(\mathcal{E}_S^T(K) \cap \widetilde{\mathcal{E}}(K)\big)/\mathcal{E}_S^T(K)^\nu,$$

où $\mathcal{E}_S^T(K) \cap \widetilde{\mathcal{E}}(K)$ est l'intersection du groupe $\mathcal{E}_S^T(K)$ des S-unités T-infinitésimales de K avec le groupe $\widetilde{\mathcal{E}}(K)$ des unités logarithmiques ; et $\mathcal{E}_S^T(K)^\nu = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_{K_n/K}(\mathcal{E}_S^T(K_n))$ est le sous-groupe (dit universel) formé des éléments qui sont normes de S-unités T-infinitésimales à tous les étages.

Preuve. Partons de l'isomorphisme donné par la Proposition 2 et passons à la limite projective pour les applications normes. Côté diviseurs à gauche, la réunion $S \cup T$ contenant par hypothèse l'ensemble des places ramifiées dans la tour K_∞/K, les S-diviseurs ambiges et étrangers à T de chacun des corps K_n se réduisent aux seul diviseurs provenant de K. On a donc tout simplement :

$$\varprojlim \big(\mathcal{C}\ell_S^T(K_n)^\Gamma / cl_S^T\big(\mathcal{D}_S^T(K_n)^\Gamma\big)\big) = \varprojlim \mathcal{C}\ell_S^T(K_n)^\Gamma = \mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma.$$

Côté unités à droite, l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_{K_n/K}(\mathcal{R}(K_n))$ caractérise précisément le sous-groupe $\widetilde{\mathcal{E}}(K)$ des unités logarithmiques dans $\mathcal{R}(K)$ (cf. [7], Prop. 3.2 ou [10], §1). D'où le résultat.

4 Conséquences du Théorème principal

Il résulte du Théorème 5 que la Conjecture cyclotomique vaut pour tous les corps K réels ou à conjugaison complexe (avec, dans ce cas, S et T stables par la conjugaison) et les premiers ℓ pour lesquels sont simultanément satisfaites les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min. Ainsi :

Corollaire 7. *La Conjecture cyclotomique est satisfaite en particulier par :*

— *les corps de nombres abéliens K, pour n'importe quel premier ℓ ;*

— *les extensions quadratiques totalement imaginaires K d'un corps totalement réel qui contiennent les racines 2ℓ-ièmes de l'unité et sont ℓ-logarithmiquement principales (i.e. dont le ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}(K)$ est trivial), pour ce même premier ℓ.*

Dans chacun de ces deux cas, la Conjecture est alors vérifiée par chacun des étages finis K_n de la $\mathbb{Z}_\ell$-tour cyclotomique K_∞ ; et le polynôme caractéristique χ_S^T du Λ-module d'Iwasawa $\mathcal{C}_S^T(K_\infty)$ n'est donc divisible par aucun des polynômes cyclotomiques $\omega_n = (\gamma^{\ell^n} - 1)/(\gamma^{\ell^{n-1}} - 1)$.

Preuve. Le premier cas résulte du fait que les corps abéliens satisfont les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min pour tous les nombres premiers ℓ en vertu du théorème d'indépendance de logarithmes de nombres algébriques de Baker-Brumer. Le second cas provient du fait que les corps ℓ-logarithmiquement principaux vérifient banalement la conjecture de Gross-Kuz'min (qui postule la finitude du groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}(K)$ pour le nombre premier ℓ) ; et qu'ils vérifient en outre celle de Leopoldt s'ils contiennent les racines 2ℓ-ièmes de l'unité (cf. e.g. [5] ou [8]).

Enfin, si K est abélien, tous les K_n le sont. Et s'il est à conjugaison complexe et ℓ-logarithmiquement principal, tous les K_n le sont aussi ; d'où le résultat annoncé.

Soient maintenant S et T deux ensembles finis disjoints arbitraires de places du corps K. Notons $S_\ell = S \cap Pl_\ell$ la partie *sauvage* de S et $S_\circ = S \setminus S_\ell$ sa partie *modérée*. Écrivons de même $T = T_\ell \cup T_\circ$. Notons toujours $\mathcal{C}_S^T(K_\infty) = \mathrm{Gal}(H_S^T(K_\infty)/K_\infty)$ le groupe de Galois de la pro-ℓ-extension abélienne maximale $H_S^T(K_\infty)$ de K_∞ qui est S-décomposée et T-ramifiée.

Scolie 8. *Avec ces conventions, il vient :*

(i) Le groupe $\mathcal{C}_S^T(K_\infty)$ est indépendant de $S_\circ$; autrement dit, on a : $\mathcal{C}_S^T(K_\infty) = \mathcal{C}_{S_\ell}^T(K_\infty)$.

(ii) Les groupes $\mathcal{C}_S^T(K_\infty)$ et $\mathcal{C}_S^{T_\ell}(K_\infty)$ ont même dimension comme Λ-modules et leurs quotients des genres sont pseudo-isomorphes : ${}^\Gamma\mathcal{C}_S^T(K_\infty) \sim {}^\Gamma\mathcal{C}_S^{T_\ell}(K_\infty)$.

Il en résulte un pseudo-isomorphisme entre sous-groupes invariants : $\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma \sim \mathcal{C}_{S_\ell}^{T_\ell}(K_\infty)^\Gamma$. Et la Conjecture cyclotomique revient donc à postuler la finitude de $\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma$ pour $Pl_\ell \subset S_\ell \cup T_\ell$.

Preuve. Les places modérées sont presque totalement inertes dans la $\mathbb{Z}_\ell$-tour cyclotomique K_∞/K.

(i) De ce fait, la montée dans la tour ayant épuisé toute possibilité d'inertie, une place modérée non-ramifiée au-dessus de K_∞ est donc complètement décomposée. Il suit de là que $H_S^T(K_\infty)$ coïncide avec $H_{S_\ell}^T(K_\infty)$ et $\mathcal{C}_S^T(K_\infty) = \mathrm{Gal}(H_{S_\ell}^T(K_\infty)/K_\infty)$ avec $\mathcal{C}_{S_\ell}^T(K_\infty) = \mathrm{Gal}(H_{S_\ell}^T(K_\infty)/K_\infty)$.

(ii) Le cas de T est plus compliqué :

– D'un côté, puisque les places de $T_\circ$ sont finiment décomposées dans la tour cyclotomique, les groupes finis d'unités semi-locales $\mathcal{U}_{T_\circ}(K_n) = \prod_{\mathfrak{p}_n \in T_\circ} \mathcal{U}_{K_{\mathfrak{p}_n}}$ sont de rang borné. Pour toute pro-ℓ-extension abélienne donnée H_∞ de K_∞ le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(H_\infty/K_\infty)$ engendré par les sous-groupes d'inertie attachés aux places de $T_\circ$ est ainsi un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini et donc un Λ-module de torsion. En particulier $\mathcal{C}_S^T(K_\infty)$ et $\mathcal{C}_S^{T_\ell}(K_\infty)$ ont même dimension comme Λ-modules.

– D'un autre côté, le groupe semi-local $\mathcal{U}_{T_\circ}(K) = \prod_{\mathfrak{p} \in T_\circ} \mathcal{U}_{K_\mathfrak{p}}$ étant fini, son image dans le groupe de Galois ${}^\Gamma\mathcal{C}_S^T(K_\infty) = \mathrm{Gal}(H_S^T(K_\infty/K)/K_\infty)$ attaché à la plus grande sous-extension $H_S^T(K_\infty/K)$ de $H_S^T(K_\infty)$ qui est abélienne sur K l'est aussi ; et les quotients ${}^\Gamma\mathcal{C}_S^T(K_\infty)$ et ${}^\Gamma\mathcal{C}_S^{T_\ell}(K_\infty)$ sont donc pseudo-isomorphes.

– Réunissant ces résultats, on conclut que les sous-groupes invariants $\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma$ et $\mathcal{C}_S^{T_\ell}(K_\infty)^\Gamma$ sont eux-mêmes pseudo-isomorphes.

Remarque. Sauf à compliquer la Conjecture (à l'instar de [14]), la condition $Pl_\ell \subset S_\ell \cup T_\ell$ reste, en revanche, incontournable : cf. e.g. [6], Th. IV.2.9, pour un contre-exemple.

Commentaires bibliographiques

Les ℓ-groupes de S-classes T-infinitésimales sont étudiés dans [6] (Ch. II, §2). On y trouve notamment la suite exacte des classes ambiges évoquée dans la section 1.

Les ℓ-groupes de classes logarithmiques ont été introduits dans [7]. Leur calcul est maintenant implanté dans PARI (cf. [1]).

Les principaux résultats de la Théorie ℓ-adique du corps de classes introduite dans [6] sont présentés dans [8]. On peut aussi se reporter au livre de Gras [2].

Enfin, le calcul des invariants d'Iwasawa attachés aux ℓ-groupes de S-classes T-infinitésimales est développé dans [9, 11, 12] en liaison avec les identités de dualité de Gras.

Références

[1] K. Belabas, J.-F. Jaulent, *The logarithmic class group package in PARI/GP*, Pub. Math. Besançon (2016).

[2] G. Gras, *Class Field Theory : from theory to practice*, Springer Monographs in Mathematics (2005).

[3] R. Greenberg, *On a certain ℓ-adic representation*, Invent. Math. **21** (1973), 117–124.

[4] K. Iwasawa, *On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of number fields,* Ann. of Math. **98** (1973), 257–274.

[5] J.-F. Jaulent, *Sur les conjectures de Leopoldt et de Gross*, Actes des Journées Arithmétiques de Besançon, Astérisque **147-148** (1987), 107–120.

[6] J.-F. Jaulent, *L'arithmétique des ℓ-extension* (Thèse de doctorat d'État), Pub. Math. Besançon (1986) ; http://pmb.univ-fcomte.fr/1986.html.

[7] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 301–325.

[8] J.-F. Jaulent, *Théorie ℓ-adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.

[9] J.-F. Jaulent, *Généralisation d'un théorème d'Iwasawa*, J. Théor. Nombres Bordeaux **17** (2005), 527-553

[10] J.-F. Jaulent, *Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min*, Annales Math. Québec **41** (2017), 119–140.

[11] J.-F. Jaulent & C. Maire, *Sur les invariants d'Iwasawa des tours cyclotomiques*, Canadian Math. Bull. **46** (2003), 178–190.

[12] J.-F. Jaulent, C. Maire, G. Perbet, *Sur les formules asymptotiques le long des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions*, Annales Math. Québec **37** (2013), 63–78.

[13] L. V. Kuz'min, *The Tate module of algebraic number fields*, Izv. Akad. Nauk SSSR **36** (1972), 267-327.

[14] W. Lee & S. Seo *On arithmetic of modified idele class groups*, Preprint (2018).

Institut de Mathématiques de Bordeaux
Université de Bordeaux & CNRS
351 cours de la libération
F-33405 Talence Cedex
courriel : Jean-Francois.Jaulent@math.u-bordeaux.fr
https://www.math.u-bordeaux.fr/~jjaulent/