Sur la trivialité de certains modules d'Iwasawa

Jean-François Jaulent

Résumé. Nous étudions la trivialité de certains modules d'Iwasawa classiques en liaison avec la notion de ℓ-rationalité pour les corps de nombres totalement ℓ-adiques.

Abstract. We discuss the triviality of some classical Iwasawa modules in connection with the notion of ℓ-rationality for totally ℓ-adic number fields.

Mathematics Subject Classification : Primary 11R23 ; Secondary 11R37.
Keywords : Iwasawa modules, rational fields, genus theory, Greenberg conjecture

Table des matières

Introduction et définitions de base

Plusieurs des conjectures classiques sur les corps de nombres reviennent à postuler, sous certaines hypothèses, la finitude (ou la pseudo-nullité) d'un module d'Iwasawa convenable.

La *conjecture de Greenberg* (cf. [10, 11]) affirme ainsi que, si K est un corps de nombres totalement réel qui vérifie la conjecture de Leopoldt pour le nombre premier ℓ (autrement dit qui admet une unique $\mathbb{Z}_\ell$-extension $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$), la limite projective $\mathcal{C}_{K_\infty} = \varprojlim \mathcal{C}\ell_{K_n}$ des ℓ-groupes de classes d'idéaux attachés aux divers étages de la tour K_∞/K est un groupe fini. Et, sous sa forme généralisée, elle affirme que, si K est un corps de nombres arbitraire vérifiant la conjecture de Leopoldt pour le premier ℓ , i.e. admettant exactement $d = c_K + 1$ $\mathbb{Z}_\ell$-extensions linéairement indépendantes (où c_K désigne le nombre de places complexes de K), la même limite projective $\mathcal{C}_{\bar{K}}$ prise dans le compositum $\bar{K}$ de ces $\mathbb{Z}_\ell$-extensions est un module pseudo-nul sur l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda_d = \mathbb{Z}_\ell[[\mathrm{Gal}(\bar{K}/K]] \simeq \mathbb{Z}_\ell[[T_1, \dots, T_d]]$.

Or, plus généralement encore, on a :

Lemme 1. *Tout corps de nombres K ayant exactement r_K places réelles et c_K places complexes possède une pro-ℓ-extension abélienne* canonique *Z de groupe de Galois* $\mathrm{Gal}(Z/K) \simeq \mathbb{Z}_\ell^{c_K+1}$.

Preuve. Sous la conjecture de Leopoldt, Z est simplement le compositum des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions. Mais, indépendamment de toute conjecture, on peut caractériser Z comme suit : soient K_∞ la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de K, puis $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell}$ le groupe procyclique $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ et M_∞ la pro-ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale de K_∞. Soit alors $\mathcal{T}_\infty$ le sous-module de Λ-torsion du groupe de Galois $\mathcal{X}_\infty = \mathrm{Gal}(M_\infty/K_\infty)$. On sait par la théorie d'Iwasawa (cf. e.g. [28]) que le quotient $\mathcal{X}_\infty/\mathcal{T}_\infty$ s'injecte avec un indice fini dans un Λ-module libre de dimension c_K. Alors Z est le sous-corps de M_∞ fixé par la racine dans $\mathcal{X}_\infty$ du sous-module $\mathcal{T}_\infty\mathcal{X}_\infty^{\gamma-1}$. En d'autres termes, Z est le compositum des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de K contenues dans le sous-corps de M_∞ fixé par $\mathcal{T}_\infty\mathcal{X}_\infty^{\gamma-1}$.

On peut ainsi étendre inconditionnellement la conjecture de Greenberg en postulant :

Conjecture 2 (Conjecture de Greenberg étendue)**.** *Soient K un corps de nombres arbitraire ayant $r_{\scriptscriptstyle K}$ places réelles et $c_{\scriptscriptstyle K}$ places complexes, Z sa pro-ℓ-extension abélienne canonique de groupe de Galois $\mathrm{Gal}(Z/K) \simeq \mathbb{Z}_\ell{}^{c_{\scriptscriptstyle K}+1}$ et $\mathcal{C}_Z = \varprojlim \mathcal{C}\ell_L$ la limite projective (pour les applications normes) des ℓ-groupes de classes d'idéaux attachés aux sous-corps L de Z de degré fini sur K. Le groupe $\mathcal{C}_Z$ est alors pseudo-nul comme module sur l'algèbre d'Iwasawa $\mathbb{Z}_\ell[[\mathrm{Gal}(Z/K]] \simeq \Lambda_{c_{\scriptscriptstyle K}+1}$.*

Le but de cette note est d'étudier la trivialité du module $\mathcal{C}_Z$, lorsque le corps K est *totalement ℓ-adique* au sens de [16], i.e. lorsque ses complétés aux places au-dessus de ℓ sont tous de degré 1 :

Définition 3. *Étant donné un nombre premier ℓ, un corps de nombres K est dit totalement ℓ-adique lorsque ses complétés aux places au-dessus de ℓ sont tous de degré 1 sur $\mathbb{Q}_\ell$, autrement dit lorsque la place ℓ est complètement décomposée dans l'extension $K/\mathbb{Q}$.*

L'intérêt de cette restriction est le lemme de ramification suivant, plus ou moins bien connu, qui joue un rôle essentiel dans notre étude en excluant toute ramification abélienne sauvage au-dessus de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique d'un tel corps :

Lemme 4. *Soient ℓ un nombre premier impair, K un corps de nombres totalement ℓ-adique, K_∞ sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique et N_∞ une pro-ℓ-extension de K_∞. Si N_∞ est localement abélienne sur K aux places au-dessus de ℓ (par exemple si N_∞ est une pro-ℓ-extension abélienne de K), elle est modérément ramifiée sur K_∞ (i.e. non-ramifiée aux places au-dessus de ℓ).*

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la théorie ℓ-adique du corps de classes (cf. e.g. [15], §2.1) : le groupe de Galois de la pro-ℓ-extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}_\ell$ s'identifie à la limite projective $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_\ell} = \varprojlim \mathbb{Q}_\ell{}^\times/\mathbb{Q}_\ell{}^{\times\ell^n} = (1+\ell)^{\mathbb{Z}_\ell}\ell^{\mathbb{Z}_\ell}$ et le sous-groupe d'inertie au groupe procyclique $(1+\ell)^{\mathbb{Z}_\ell}$. Les places au-dessus de ℓ étant totalement ramifiées dans la tour K_∞/K, elles ne peuvent plus se ramifier dans N_∞/K_∞ dès lors que N_∞ est localement abélienne sur K.

Les deux résultats principaux de cette étude (Th. 6, dans le cas totalement réel ; Th. 10, dans le cas CM) mettent en avant la ℓ-rationalité. Rappelons ce dont il s'agit :

Définition 5. *Un corps de nombres K possédant exactement $c_{\scriptscriptstyle K}$ places complexes est dit ℓ-rationnel pour un nombre premier arbitraire ℓ lorsque le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(M/K)$ de sa pro-ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée ∞-décomposée (i.e. non-ramifiée en dehors de ℓ et complètement décomposée aux places à l'infini) maximale M est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de dimension $c_{\scriptscriptstyle K}+1$.*

La notion de ℓ-rationalité d'un corps de nombres K, déjà rencontrée par I.R. Shafarevich dans [26], a été formellement introduite par A. Movahhedi dans [21] [1] et étudiée en collaboration avec T. Nguyen Quang Do dans [22] parallèlement à la notion voisine de ℓ-régularité introduite par G. Gras et l'auteur dans [9] suite aux travaux de [5]. Les deux notions coïncident lorsque K contient le sous-corps réel du corps cyclotomique $\mathbb{Q}[\zeta_\ell]$ et donnent lieu au même théorème de montée (cf. [20] pour une synthèse des deux points de vue ou [6] pour plus de détails).

Le théorème de Chebotarev permet ainsi de construire étage par étage des pro-ℓ-tours infinies de corps ℓ-rationnels en imposant à chaque étape la primitivité de la ramification modérée.

Dans le cas CM, intervient également la notion de corps logarithmiquement principal (pour le premier donné ℓ). Le ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ a été introduit dans [14] et son calcul effectif, aujourd'hui implanté directement dans PARI, est exposé dans [1] et [3]. Il se présente comme un analogue du ℓ-groupe des classes au sens ordinaire et sa finitude est équivalente à la conjecture de Gross-Kuz'min (cf. e.g. [6, 14, 15, 17]).

Remarque. Les corps K qui vérifient simultanément la conjecture de Leopoldt et celle de Gross-Kuz'min satisfont plus généralement la conjecture cyclotomique exposée dans [19].

1. En fait, dans sa thèse de doctorat, *Sur les p-extensions des corps p-rationnels*, Paris (1988).

1 Trivialité dans la tour cyclotomique

Intéressons-nous pour commencer au module d'Iwasawa classique attaché à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique d'un corps de nombres.

Théorème 6. *Soient ℓ un nombre premier impair, K un corps de nombres totalement ℓ-adique, $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique et $\mathcal{C}_{K_\infty} = \varprojlim \mathcal{C}\ell_{K_n}$ la limite projective (pour la norme) des ℓ-groupes de classes d'idéaux attachés aux divers étages de la tour K_∞/K.*

On a alors $\mathcal{C}_{K_\infty} = 1$ si et seulement si le corps K est ℓ-rationnel et totalement réel, auquel cas il vérifie banalement les conjectures de Greenberg, de Leopoldt et de Gross-Kuz'min.

Preuve. Conformément au Lemme 4, le corps K étant pris totalement ℓ-adique, sa pro-ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale M est non-ramifiée sur K_∞.

L'égalité $\mathcal{C}_{K_\infty} = 1$ entraîne donc $M = K_\infty$. Ainsi K_∞ est alors l'unique $\mathbb{Z}_\ell$-extension de K, de sorte que K est totalement réel et vérifie la conjecture de Leopoldt (donc aussi celle de Gross-Kuz'min). Enfin la trivialité de $Gal(M/K_\infty)$ traduit précisément la ℓ-rationalité de K.

Inversement, si K est totalement réel et ℓ-rationnel, on a $M = K_\infty$; et, plus généralement, $M_n = K_\infty$ si M_n désigne la pro-ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée de K_n, puisque chacun des K_n est encore totalement réel et ℓ-rationnel en vertu du théorème de propagation de la ℓ-rationalité donné dans [6, 9, 20, 21, 22]. Or, la $\mathbb{Z}_\ell$-extension K_∞/K étant totalement ramifiée (puisque K est pris totalement ℓ-adique), pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$ le ℓ-corps de classes de Hilbert H_n de K_n est linéairement disjoint de K_∞ sur K_n et on a donc : $\mathcal{C}\ell_{K_n} \simeq \mathrm{Gal}(H_n/K_n) \simeq \mathrm{Gal}(K_\infty H_n/K_\infty) = 1$, puisque $K_\infty H_n$ est contenu dans M_n. D'où l'égalité : $\mathcal{C}_{K_\infty} = 1$.

Remarque. Dans [7] G. Gras a montré que la condition $\mathcal{C}_{K_\infty} = 1$, qui affirme de façon générale la trivialité des ℓ-goupes de classes $\mathcal{C}\ell_{K_n}$ des étages finis K_n de la tour cyclotomique K_∞/K pour tout n assez grand, est vérifiée dès lors qu'elle a lieu pour $n = 1$, sous réserve que les places au-dessus de ℓ soient totalement ramifiées dans la tour, auquel cas elle a lieu pour tout $n \geq 1$. En particulier, la condition $\mathcal{C}_{K_\infty} = 1$, qui équivaut alors à l'égalité $\mathcal{C}\ell_{K_1} = 1$, se lit de ce fait dans K_1.

Le Théorème 6 ci-dessus montre que, sous la condition plus forte de complète décomposition de ℓ dans $K/\mathbb{Q}$, elle se lit directement dans K.

Le théorème de propagation de la ℓ-rationalité par ℓ-extension fournit alors un critère nécessaire et suffisant de propagation de la condition de trivialité $\mathcal{C}_{K_\infty} = 1$ par ℓ-extension ℓ-décomposée :

Corollaire 7. *Soit L/K une ℓ-extension de corps totalement ℓ-adiques, $K_\infty = \bigcup K_n$ et $L_\infty = \bigcup L_n$ leurs $\mathbb{Z}_\ell$-extensions cyclotomiques respectives. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

(i) Le groupe de Galois $\mathcal{C}_{L_\infty} = \varprojlim \mathcal{C}\ell_{L_n}$ est trivial.

(ii) Le groupe $\mathcal{C}_{K_\infty} = \varprojlim \mathcal{C}\ell_{K_n}$ est trivial et l'extension L/K est primitivement ramifiée.

Preuve. C'est la transposition directe, via le Théorème 6, du théorème de propagation donné dans [9, 21, 20] et [6]. Rappelons qu'une ℓ-extension L/K est dite *primitivement ramifiée* lorsque les logarithmes de Gras (i.e. les images dans le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(Z/K)$ du compositum Z des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de K) des places *modérément* ramifiées dans L/K peuvent être complétées en une $\mathbb{Z}_\ell$-base de $\mathrm{Gal}(Z/K)$.

Scolie 8. *Sous les hypothèses du Théorème 6, soit $\mathcal{C}'_{K_\infty} = \varprojlim \mathcal{C}\ell'_{K_n}$ la limite projective (pour la norme) des ℓ-groupes de ℓ-classes des corps K_n (i.e. des quotients respectifs des ℓ-groupes $\mathcal{C}\ell_{K_n}$ par leurs sous-groupes engendrés par les classes des idéaux au-dessus de ℓ).*

On a alors $\mathcal{C}'_{K_\infty} = 1$ si et seulement si le corps K est logarithmiquement principal : $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = 1$.

Preuve. En effet, le ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ s'interprète par la théorie ℓ-adique du corps de classes comme groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{lc}}/K_\infty)$ attaché à la pro-ℓ-extension abélienne de K localement cyclotomique (i.e. complètement décomposée sur K_∞ en chaque place) maximale K^{lc}. Or, celui-ci n'est autre que le quotient des genres ${}^{\Gamma}\mathcal{C}'_{K_\infty}$ de $\mathcal{C}'_{K_\infty}$ relativement au groupe procyclique $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ (cf. [14, 15] ou [6]).

2 Trivialité dans le compositum des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions

Soit maintenant K un corps totalement ℓ-adique de degré $2c_{\scriptscriptstyle K}$, extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps K^+ totalement réel. Notons M^+ la pro-ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale de K^+ et Z la $\mathbb{Z}_\ell^{c_K+1}$-extension canonique de K (cf. Lemme 1).

Rappelons que, ℓ étant impair, si $\bar\tau$ désigne la conjugaison complexe, tout $\mathbb{Z}_\ell[\langle\bar\tau\rangle]$-module $\mathcal{X}$ est somme directe de ses composantes réelle et imaginaire $\mathcal{X}^{\pm} = \mathcal{X}^{e_\pm}$, avec $e_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \bar\tau)$. Ainsi :

Lemme 9. *Le $\mathbb{Z}_\ell[\langle\bar\tau\rangle]$-module imaginaire $\mathcal{D}_{K_\infty}^{[\ell]-}$ construit sur les idéaux premiers de K_∞ au-dessus de ℓ est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace de dimension $c_{\scriptscriptstyle K}$. Et le sous-module $\mathcal{P}_{K_\infty}^{[\ell]-}$ construit sur les idéaux principaux est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de même dimension. Il suit : $\mathcal{C}\ell_{K_\infty}^{[\ell]-} \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{c_K}$.*

Preuve. Ce résultat est essentiellement bien connu : D'un côté les idéaux premiers au-dessus de ℓ étant totalement ramifiés dans la tour cyclotomique, on a : $\mathcal{D}_{K_n}^{[\ell]-} = (\mathcal{D}_K^{[\ell]-})^{\ell^{-n}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$; d'où, à la limite : $\mathcal{D}_{K_\infty}^{[\ell]-} \simeq \mathbb{Q}_\ell{}^{c_K}$. D'un autre côté, les ℓ-unités imaginaires de K_∞ provenant directement de K, on a, en revanche $\mathcal{P}_{K_n}^{[\ell]-} = \mathcal{P}_K^{[\ell]-} \simeq \mathbb{Z}_\ell{}^{c_K}$. D'où : $\mathcal{C}\ell_{K_\infty}^{[\ell]-} = \mathcal{D}_{K_\infty}^{[\ell]-}/\mathcal{P}_{K_\infty}^{[\ell]-} \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{c_K}$.

Théorème 10. *Soient ℓ un nombre premier impair, K un corps de nombres totalement ℓ-adique, extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps K^+ totalement réel et Z la $\mathbb{Z}_\ell^{c_K+1}$-extension canonique de K. Si le groupe de Galois $\mathcal{C}_Z = \mathrm{Gal}(H_Z/Z)$ de la pro-ℓ-extension abélienne non-ramifiée maximale H_Z de de Z est trivial, on a les conséquences suivantes :*
(i) Le corps réel K^+ est ℓ-rationnel et au plus de degré 3.
(ii) Le ℓ-groupe des classes logarithmiques de K est trivial : $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = 1$.

Preuve. Supposons $\mathcal{C}_Z = 1$, introduisons la pro-ℓ-extension non-ramifiée maximale $\bar H_Z$ de Z et notons $\mathcal{G}_Z$ son groupe de Galois. Son abélianisé $\mathcal{C}_Z$ étant trivial par hypothèse, il en va de même de $\mathcal{G}_Z$. Ainsi $\bar H_Z$ coïncide avec Z. Or, Z étant non-ramifiée sur la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K_∞ de K en vertu du Lemme 4, par construction $\bar H_Z$ est encore la pro-ℓ-extension non-ramifiée maximale de K_∞. En fin de compte Z est donc la réunion $H_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ des ℓ-corps de classes de Hilbert respectifs des étages finis K_n de la tour K_∞. Il suit : $\mathcal{C}_{K_\infty} = \mathrm{Gal}(H_\infty/K_\infty) = \mathrm{Gal}(Z/K_\infty)$.

Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(Z/K_\infty)$ étant imaginaire, prenant les composantes réelles, on conclut : $\mathcal{C}_{K_\infty^+} = \mathcal{C}_{K_\infty}^+ = 1$; et K^+ est ℓ-rationnel en vertu de Théorème 6. Il suit : $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^+ = \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K^+} = 1$.

Regardons maintenant les composantes imaginaires. Par surjectivité de la norme $\mathcal{C}_{K_\infty} \to \mathcal{C}\ell_{K_n}$, nous avons $\mathrm{rg}_\ell\, \mathcal{C}\ell_{K_n}^- \le c_{\scriptscriptstyle K}$ pour tout $n \ge 1$, donc $\mathrm{rg}_\ell\, \mathcal{C}\ell_{K_n}^- = c_{\scriptscriptstyle K}$ pour $n \ge 1$, en vertu du Lemme. Il en résulte que $\mathcal{C}\ell_{K_\infty}^- \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{c_K}$ est engendré par les classes des idéaux au-dessus de ℓ.

En particulier le ℓ-groupe des ℓ-classes $\mathcal{C}\ell'^-_{K_\infty}$ est trivial ; et, comme il n'y a pas de capitulation pour les ℓ-classes dans la tour puisque les ℓ-unités imaginaires sont contenues dans K, ce résultat vaut à tous les étages finis : $\mathcal{C}\ell'^-_{K_n} = 1$. On conclut : $\mathcal{C}'^-_{K_\infty} = \varprojlim \mathcal{C}\ell'^-_{K_n} = 1$; puis : $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^- = 1$.

Intéressons-nous enfin aux groupes des nœuds respectifs $\mathcal{K}_n$ des ℓ-extensions abéliennes H_n/K_n (cf. DProp. 14 infra). D'après ce qui précède, les ℓ-corps de classes de Hilbert respectifs H'_n des corps H_n sont tous contenus dans $H_\infty = Z$. Ils sont donc abéliens sur K et l'on a identiquement $H'_n = H_n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Il suit de là que les ℓ-corps des classes centrales $H^{\mathrm{cen}}_{H_n/K_n}$ comme les ℓ-corps des genres $H^{\mathrm{gen}}_{H_n/K_n}$ coïncident avec les H_n ; de sorte que dans la suite exacte (i) de la Proposition 14 le terme de droite $\mathrm{Gal}(H^{\mathrm{cen}}_{H_n/K_n}/H^{\mathrm{gen}}_{H_n/K_n})$ est trivial ; d'où par (ii) l'isomorphisme :

$$E_{K_n}/E_{K_n} \cap N_{H_n/K_n}(H_n^\times) \simeq \mathcal{K}_n \simeq \mathcal{C}\ell_{K_n} \wedge \mathcal{C}\ell_{K_n},$$

puisque l'on a ici : $\mathrm{Gal}(H_n/K_n) \simeq \mathcal{C}\ell_{K_n}$ via le corps de classes. Prenant alors les limites projectives pour les applications normes dans la tour cyclotomique K_∞/K, on obtient tout comme dans [4], Lem. 3.9, un morphisme surjectif de $\overleftarrow{\mathcal{E}}_{K_\infty} = \varprojlim E_{K_n}$ sur $\mathcal{C}_{K_\infty} \wedge \mathcal{C}_{K_\infty}$ qui se factorise modulo $\overleftarrow{\mathcal{E}}_{K_\infty}^{\gamma-1}$, puisque $\mathcal{C}_{K_\infty}$ (et donc son carré alterné) est invariant par $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell} = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$.

Or, $\overleftarrow{\mathcal{E}}_{K_\infty}/\overleftarrow{\mathcal{E}}_{K_\infty}^{\gamma-1}$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de rang essentiel $c_{\scriptscriptstyle K}$ (cf. e.g. [4] §3) ; et $\mathcal{C}_{K_\infty} \wedge \mathcal{C}_{K_\infty}$ est $\mathbb{Z}_\ell$-libre de dimension $\frac{1}{2}c_{\scriptscriptstyle K}(c_{\scriptscriptstyle K}-1)$, puisque $\mathcal{C}_{K_\infty} \simeq \mathrm{Gal}(Z/K_\infty)$ est $\mathbb{Z}_\ell$-libre de dimension $c_{\scriptscriptstyle K}$. Il suit :

$$c_{\scriptscriptstyle K} \ge \tfrac{1}{2}c_{\scriptscriptstyle K}(c_{\scriptscriptstyle K}-1), \text{ i.e. } [K^+ : \mathbb{Q}] = c_{\scriptscriptstyle K} \le 3, \text{ comme annoncé.}$$

3 Exemple des corps quadratiques totalement ℓ-adiques

Pour illustrer les résultats précédents, regardons plus attentivement le cas non-trivial le plus simple : celui des corps quadratiques totalement ℓ-adiques.

Partons donc d'un corps quadratique $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, notons $G = \{1, \tau\}$ le groupe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, prenons un nombre premier impair ℓ complètement décomposé dans K ; écrivons $(\ell) = \mathfrak{l}\mathfrak{l}'$ dans K et, plus généralement $(\ell) = \mathfrak{l}_n\mathfrak{l}'_n$ à chaque étage fini K_n de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K_n ; notons M la pro-ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée et Z le compositum des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de K, puis $\mathcal{T}_K = \mathrm{Gal}(M/Z)$ et $\mathcal{C}_Z$ la limite projective des ℓ-groupes $\mathcal{C}\ell_L$ pour L/K de degré fini dans Z/K.

Écrivons $\mathcal{U}_{K_\ell} = \mathcal{U}_{K_\mathfrak{l}}\mathcal{U}_{K_{\mathfrak{l}'}}$ le groupe des unités semi-locales attaché aux places ℓ-adiques, puis $\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\ell} = \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{l}}\widetilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{l}'}}$ son analogue logarithmique, $\mathcal{E}_K$ et $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ les groupes d'unités globales correspondants. Notons enfin $\mathcal{U}^*_{K_\ell} = \mathcal{U}^{1-\tau}_{K_\ell}$ le noyau de la norme dans $\mathcal{U}_{K_\ell}$. Avec ces notations :

Proposition 11. *Pour K quadratique réel totalement ℓ-adique, il y a équivalence entre :*
(i) Le pro-ℓ-groupe $\mathcal{C}_Z = \mathcal{C}_{K_\infty}$ est trivial : $\mathcal{C}_Z = 1$.
(ii) Le corps K est ℓ-rationnel : $\mathcal{T}_K = 1$.
(iii) On a $\mathcal{C}\ell_K = 1$ et l'application de semi-localisation envoie $\mathcal{E}_K$ sur $\mathcal{U}^*_{K_\ell}$.
(iv) On a $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = 1$ et l'application de semi-localisation envoie $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ sur $\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\ell}$.

Preuve. Le corps quadratique réel K admettant pour unique $\mathbb{Z}_\ell$-extension $Z = K_\infty$, le Théorème 6 nous assure l'équivalence des deux premières assertions. Il reste simplement à vérifier que la trivialité de $\mathcal{T}_K$ se lit sur les groupes de classes et d'unités au sens ordinaire comme logaritmique.

Or, d'un côté le ℓ-corps de classes de Hilbert H de K est linéairement disjoint de K_∞, puisque K_∞/K est ici totalement ramifiée, de sorte qu'on a : $\mathcal{C}\ell_K \simeq \mathrm{Gal}(H/K) \simeq \mathrm{Gal}(HK_\infty/K_\infty)$. De façon semblable, le ℓ-groupe des classes logarithmiques vérifie : $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \simeq \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{lc}}/K_\infty)$, où K^{lc} désigne la pro-ℓ-extension abélienne localement cyclotomique maximale de K. Ainsi, comme HK_∞ et K^{lc} sont toutes deux contenues dans M, on a l'implication : $\mathcal{T}_K = 1 \Rightarrow \mathcal{C}\ell_K = 1$ et $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = 1$.

D'un autre côté, la théorie ℓ-adique du corps de classes (cf. [15] et, plus spécifiquement, [18] §2.3) nous donne ici les isomorphismes $\mathrm{Gal}(M/HK_\infty) \simeq \mathcal{U}^*_\ell/s_\ell(\mathcal{E}_K)$ et $\mathrm{Gal}(M/K^{\mathrm{lc}}) \simeq \widetilde{\mathcal{U}}_\ell/s_\ell(\widetilde{\mathcal{E}}_K)$. D'où l'équivalence de (ii) avec (iii) comme avec (iv).

Remarque. La condition $\mathcal{C}\ell_K = 1$ est vérifiée par presque tous les ℓ pour K fixé. Il est conjecturé dans [17] que c'est également le cas de la condition $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = 1$ pour K quadratique réel. La Proposition est donc cohérente avec les heuristiques de Gras qui suggèrent que K est ℓ-rationnel pour presque tout ℓ, de sorte que $\mathcal{C}_{K_\infty}$ serait ainsi presque toujours trivial ici. Pour ℓ fixé, en revanche, il résulte de [8], §6 qu'il existe une infinité de corps quadratiques réels K avec $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \neq 1$.

Proposition 12. *Pour K quadratique imaginaire totalement ℓ-adique, le pro-ℓ-groupe $\mathcal{C}_Z$ est trivial si et seulement si K est ℓ-logarithmiquement principal :*

$$\mathcal{C}_Z = 1 \Leftrightarrow \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = 1.$$

Preuve. Le Théorème 10 donne l'implication : $\mathcal{C}_Z = 1 \Rightarrow \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = 1$. Reste à vérifier la réciproque. Supposons donc $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = 1$. Comme $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ est le quotient des genres de la limite projective des ℓ-groupes de ℓ-classes $\mathcal{C}'_{K_\infty} = \varprojlim \mathcal{C}\ell'_{K_n}$, cette hypothèse entraîne $\mathcal{C}'_{K_\infty} = 1$, donc finalement $\mathcal{C}\ell'_{K_n} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En d'autres termes les ℓ-groupes de classes $\mathcal{C}\ell_{K_n}$ sont engendrés par les classes des premiers au-dessus de ℓ. Plus précisément, puisque sa composante unité $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{Q}_n}$, qui correspond à l'idempotent $\frac{1}{2}(1+\tau)$, est triviale, $\mathcal{C}\ell_{K_n}$ est engendré par la classe de l'idéal $\mathfrak{l}_n/\mathfrak{l}'_n$ (ou, si l'on préfère, par l'image de la classe $[\mathfrak{l}_n]$ par l'idempotent $\frac{1}{2}(1-\tau)$) et le ℓ-corps de classes de Hilbert H_n de K_n est ainsi une ℓ-extension cyclique de groupe $G_n \simeq \mathcal{C}\ell_{K_n}$. Notons H'_n le ℓ-corps de classes de Hilbert de H_n. La formule des classes ambiges de Chevalley (cf. [2]) appliquée à l'extension H_n/K_n s'écrit $|\mathcal{C}\ell_{H_n}^{G_n}| = |\mathcal{C}\ell_{K_n}|/[H_n : K_n] = 1$ et donne $\mathcal{C}\ell_{H_n} = 1$, i.e. $H'_n = H_n$. Ainsi H_n est la pro-ℓ-extension non-ramifiée maximale de K_n et $H_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ est celle de K_∞. Maintenant, par le Lemme 4, le compositum Z des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de K est contenu dans H_∞. Et , comme on a $\mathrm{Gal}(H_\infty/K_\infty) \simeq \varprojlim \mathcal{C}\ell_{K_n} \simeq \mathbb{Z}_\ell \simeq \mathrm{Gal}(Z/K_\infty)$, l'identité des rangs donne l'égalité $Z = H_\infty$. Il suit $\mathcal{C}_Z = 1$, comme attendu.

Appendice : Groupe des nœuds, genres et classes centrales

Pour la commodité du lecteur, nous rassemblons ci-dessous quelques résultats classiques sur les relations entre groupe des nœuds et théorie des genres. Pour plus de détails, cf. e.g. [13], III.2.1.

Pour chaque corps de nombres K, nous notons J_K le groupe des idèles, U_K le sous-groupe des idèles unités et $C_K = J_L/K^\times$ le groupe des classes d'idèles. Le corps de classes de Hilbert H_K de K, i.e. son extension abélienne non-ramifiée ∞-décomposée maximale, est ainsi associé au groupe d'idèles $U_K K^\times$ ou, si l'on préfère, au groupe de classes d'idèles $U_K K^\times/K^\times$.

Définition & Proposition 13. *Soit L/K une extension arbitraire de corps de nombres. Alors :*

(i) Le compositum LH_K de L avec le corps de classes de Hilbert de K est l'extension abélienne non-ramifiée de L associée au sous-groupe du groupe d'idèles de L défini par :

$$J^*_{L/K} = \{\mathfrak{x} \in J_L \mid N_{L/K}(\mathfrak{x}) \in U_K K^\times\}.$$

(ii) Le corps des genres $H^{\mathrm{gen}}_{L/K}$ est la plus grande extension non-ramifiée de L qui provient d'une extension abélienne de K. Le sous-groupe d'idèles qui lui correspond est ainsi :

$$J^{\mathrm{gen}}_{L/K} = \{\mathfrak{x} \in J_L \mid N_{L/K}(\mathfrak{x}) \in N_{L/K}(U_L)K^\times\}.$$

(iii) Le corps des classes centrales $H^{\mathrm{cen}}_{L/K}$ est, lui, l'extension abélienne de L fixée par :

$$J^{\mathrm{cen}}_{L/K} = \{\mathfrak{x} \in J_L \mid N_{L/K}(\mathfrak{x}) \in N_{L/K}(U_L L^\times)\} = {}_N J_L U_L L^\times.$$

Lorsque L/K est galoisienne, $H^{\mathrm{cen}}_{L/K}$ est la plus grande extension abélienne non-ramifiée M de L, galoisienne sur K et telle que $\mathrm{Gal}(M/L)$ *soit contenu dans le centre de* $\mathrm{Gal}(M/K)$.

(iv) Tous sont contenus dans le corps de classes de Hilbert H_L de L fixé par $U_L L^\times$.

Définition & Proposition 14. *Le groupe des nœuds de L/K est le quotient du groupe des normes locales modulo les normes globales : $\mathcal{K}_{L/K} = (K^\times \cap N_{L/K}(J_L))/N_{L/K}(L^\times)$.*

(i) De façon générale, $\mathcal{K}_{L/K}$ est relié au groupe de Galois $\mathrm{Gal}(H^{\mathrm{cen}}_{L/K}/H^{\mathrm{gen}}_{L/K})$ *par la suite exacte :*

$$1 \to E_K \cap N_{L/K}(J_L)/E_K \cap N_{L/K}(L^\times) \to (K^\times \cap N_{L/K}(J_L))/N_{L/K}(L^\times) \to \mathrm{Gal}(H^{\mathrm{cen}}_{L/K}/H^{\mathrm{gen}}_{L/K}) \to 1.$$

(ii) Et pour L/K abélienne, il s'identifie au quotient du carré alterné de $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ par l'image des carrés alternés des sous-groupes de décomposition G_v des places de K :

$$\mathcal{K}_{L/K} \simeq (G \wedge G)/\textstyle\sum_v \phi_v(G_v \wedge G_v).$$

La suite exacte (i) résulte directement des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned}\mathrm{Gal}(H^{\mathrm{cen}}_{L/K}/H^{\mathrm{gen}}_{L/K}) &\simeq {}^{-1}N(N(U_L)K^\times/{}_N J_L U_L L^\times \simeq (N(J_L) \cap N(U_L)K^\times)/N(U_L L^\times)\\ &\simeq (K^\times \cap N(J_L))/(K^\times \cap N(U_L L^\times)) \simeq (K^\times \cap N(J_L))/N(L^\times)(E_K \cap N(U_L)).\end{aligned}$$

Par ailleurs, lorsque l'extension L/K est galoisienne, J. Tate a donné dans [27] une interprétation homologique du groupe $\mathcal{K}_{L/K}$: la suite exacte de cohomologie associée à la suite courte qui définit le groupe des classes d'idèles $1 \to L^\times \to J_L \to C_L \to 1$ fait apparaître la séquence

$$\cdots \to \hat{H}^{-1}(G, J_L) \xrightarrow{g} \hat{H}^{-1}(G, C_L) \to \hat{H}^0(G, L^\times) \xrightarrow{f} \hat{H}^0(G, J_L) \to \cdots$$

avec $\mathcal{K}_{L/K} = \mathrm{Ker}\, f \simeq \mathrm{Coker}\, g$. Or ce dernier groupe s'interprète via les isomorphismes du corps de classes $\hat{H}^{-1}(G, C_L) \simeq \hat{H}^{-3}(G, \mathbb{Z}) \simeq H_2(G, \mathbb{Z})$ et $\hat{H}^{-1}(G, J_L) \simeq \bigoplus_v \hat{H}^{-3}(G_v, \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_v H_2(G_v, \mathbb{Z})$, où, pour chaque place non complexe v de K, on désigne par G_v le sous-groupe de décomposition de l'une des places de L au-dessus de v. Cela étant, comme observé par Razar [25], lorsque G est abélien, le groupe d'homologie $H_2(G, \mathbb{Z})$ s'identifie au carré alterné $G \wedge G$ de G et les groupes locaux $H_2(G_v, \mathbb{Z})$ aux carrés alternés $G_v \wedge G_v$ des sous-groupes G_v. D'où l'isomorphisme (ii).

Remarques. Dans l'isomorphisme (ii), les places v non-ramifiées dans L/K n'interviennent pas, puisque leurs sous-groupes de décomposition G_v sont cycliques, donc de carrés alternés triviaux.

Enfin, si L/K est une extension galoisienne de corps de nombres, K' une extension de K et $L' = K'L$ l'extension composée, alors dans la description du corps de classes la norme idélique $N_{K'/K}$ correspond à la restriction pour les groupes de Galois (cf. Tate [27] ou encore Ozaki [24]).

Références

[1] K. Belabas, J.-F. Jaulent, *The logarithmic class group package in PARI/GP*, Pub. Math. Besançon (2016).

[2] C. Chevalley *Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux* J. fac. Sci. Tokyo 2 (1933), 365–476.

[3] F. Diaz y Diaz, J.-F. Jaulent, S. Pauli, M. Pohst, *A new algoritm for the Computation of logarithmic ℓ-class-groups of number fields*, Experimental Math. **14** (2005), 67–76.

[4] S. Fujii *Reports on families of imaginary abelian fields with pseudo-null Iwasawa modules*, New York J. Math. **28** (2022), 523–533.

[5] G. Gras, *Remarks on K_2 of number fields*, J. Number Th. **23**, (1986), 322–335

[6] G. Gras, *Class Field Theory : from theory to practice*, Springer Monographs in Mathematics (2005).

[7] G. Gras, *On the λ-stability of p-class groups along cyclic p-towers of a number field*, Int. J. Number Th.

[8] G. Gras, *Unlimited list of fundamental units of quadratic fields – Applications*, Prépublication.

[9] G. Gras & J.-F. Jaulent, *Sur les corps de nombres réguliers*, Math. Z. **202** (1989), 343–365.

[10] R. Greenberg, *On a certain ℓ-adic representation*, Invent. Math. **21** (1973), 117–124.

[11] R. Greenberg, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields*, Amer. J. Math. **98** (1976), 263–284.

[12] C. Greither, *Sur les normes universelles dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 205–220.

[13] J.-F. Jaulent, *L'arithmétique des ℓ-extensions*, (Thèse d'État), Pub. Math. Fac. Sci. Besançon Théor. Nombres 1985–86 (1986).

[14] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 301–325.

[15] J.-F. Jaulent *Théorie ℓ-adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.

[16] J.-F. Jaulent *Plongements ℓ-adiques et ℓ-nombres de Weil*, J. Théor. Nombres Bordeaux **20** (2008), 335–351.

[17] J.-F. Jaulent, *Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min*, Annales Math. Québec **41** (2017), 119–140.

[18] J.-F. Jaulent, *Note sur la conjecture de Greenberg*, J. Ramanujan Math. Soc **34** (2019) 59–80.

[19] J.-F. Jaulent, *Généralisation d'un théorème de Greenberg*, Archiv der Math. **111** (2018), 569–578.

[20] J.-F. Jaulent & T. Nguyen Quang Do, *Corps p-réguliers, corps p-rationnels et ramification restreinte*, J. Théor. Nombres Bordeaux **5** (1993), 343–363.

[21] A. Movahhedi, *Sur les p-extensions des corps p-rationnels*, Math. Nachr. **149** (1990) 163–176.

[22] A. Movahhedi & T. Nguyen Quang Do, *Sur l'arithmétique des corps de nombres p-rationnels*, Sém. Th. Nombres Paris (1987/1988), Prog. in Math. **89** (1990), 155–200.

[23] T. Nguyen Quang Do, *Formules de genres et conjecture de Greenberg*, Ann. Math. Québec. **42** (1990), 155–200., Sém. Th. Nombres Paris (1987/1988), Prog. in Math. **89** (2018), 267–2800.

[24] M. Ozaki, *Non-abelian Iwasawa theory of $\mathbb{Z}_p$-extensions*, J. reine angew. Math **602** (2007), 59–94.

[25] M. Razar, *Central and genus class fields and the Hasse norm theorem*, Compositio Math. **35** (1977), 281–298.

[26] I.R. Shafarevich, *Extensions with prescribed ramification points*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **18** (1964), 295–319 ; Trans. Am. Math. Soc. **59** (1966), 128–149.

[27] J.T. Tate, *Global Class Field Theory*, in *Algebraic Number Theory*, J.W.S Cassel & A. Frohlich editors, Academic Press, London & New York (1967).

[28] L. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, second edition, Springer-Verlag (1997).

[29] G. Yamamoto, *On the vanishing of Iwasawa invariants of absolutely abelian p-extensions*, Acta Arith. **94** (2000), 365–371.

Institut de Mathématiques de Bordeaux
Université de Bordeaux & CNRS
351 cours de la libération
F-33405 Talence Cedex
courriel : Jean-Francois.Jaulent@math.u-bordeaux.fr
https://www.math.u-bordeaux.fr/~jjaulent/