Conjecture cyclotomique et semi-simplicité des modules d'Iwasawa

Jean-François JAULENT

Résumé. Nous montrons que la conjecture cyclotomique sur les modules d'Iwasawa S-décomposés T-ramifiés, introduite dans un article antérieur et vérifiée par les corps abéliens, gouverne le $\mathbb{Z}_\ell$-rang du sous-module des points fixes et du quotient des genres pour tous ensembles finis disjoints de places (S, T).

Finalement, en cas de conjugaison complexe nous montrons que la forme forte de la conjecture est, tout comme la forme faible, équivalente à la conjonction des conjectures de Leopodt et de Gross-Kuz'min.

Abstract. We show that the cyclotomic conjecture on the characteristic polynomial of T-ramified S-split Iwasawa modules, introduced in a previous paper and satisfied by abelian fields, governs the $\mathbb{Z}_\ell$-rank of the submodule of fixed points for all finite disjoint sets S and T of places.

Last, in the CM-case we prove that the weak and the strong versions of the cyclotomic conjecture are both equivalent to the conjunction of the classical conjectures of Leopoldt and Gross-Kuz'min.

Mathematics Subject Classification : Primary 11R23 ; Secondary 11R37.
Keywords : cyclotomic conjecture, Iwasawa modules, Leopoldt conjecture, Gross-Kuz'min conjecture

Table des matières

Introduction

Pour chaque nombre premier ℓ, il est avancé dans [15] la conjecture générale suivante :

Conjecture 1 (Conjecture cyclotomique forte). *Soient K un corps de nombres arbitraire ; $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique ; Λ l'algèbre d'Iwasawa de $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K) = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell}$; et $Pl_K^\ell = S_K \sqcup T_K$ une partition de l'ensemble Pl_K^ℓ des places de K au-dessus de ℓ.*

Alors le polynôme caractéristique du Λ-module $\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}(K_\infty) = \mathrm{Gal}(H_{S_K}^{T_K}(K_\infty)/K_\infty)$ attaché à la pro-ℓ-extension abélienne maximale $H_{S_K}^{T_K}(K_\infty)$ de K_∞ qui est S_K-décomposée et T_K-ramifiée n'est pas divisible par $\omega = \gamma - 1$. Autrement dit, son sous-module des points fixes $\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}(K_\infty)^\Gamma$ est fini :

$$\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}(K_\infty)^\Gamma \sim 1.$$

Cette conjecture cyclotomique contient celles de Leopoldt et de Gross-Kuz'min (cf. e.g. [14]), qui correspondent respectivement aux cas $(S_K, T_K) = (\emptyset, Pl_K^\ell)$ et $(S_K, T_K) = (Pl_K^\ell, \emptyset)$ et réciproquement : si K est totalement réel, ou encore si K est un corps à conjugaison complexe extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps totalement réel, la conjecture cyclotomique ci-dessus est vraie dès lors que les ensembles S_K et T_K sont stables par conjugaison complexe et que K vérifie à la fois la conjecture de Leopoldt et celle de Gross-Kuz'min ([15], Th. 5). En résumé, *restreinte aux seules partitions* $Pl_K^\ell = S_K \sqcup T_K$ *stables par conjugaison complexe*, elle est équivalente à la conjonction des conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min.

Pour prendre en compte cette restriction sur la stabilité par conjugaison des ensembles S_K et T_K, restée ambiguë dans [15], introduisons la forme affaiblie ci-après de la conjecture :

Conjecture 2 (**Conjecture cyclotomique faible**). *Nous disons qu'un corps de nombres K à conjugaison complexe (i.e. extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps totalement réel K^+) satisfait la conjecture cyclotomique faible pour un nombre premier ℓ, lorsqu'il vérifie la conjecture cyclotomique pour toute partition $Pl_K^\ell = S_K \sqcup T_K$ stable par la conjugaison complexe.*

Avec ces conventions le Théorème 5 de [15] affirme alors qu'un tel K vérifie la Conjecture cyclotomique *faible* pour ℓ si et seulement s'il vérifie simultanément la conjecture de Leopoldt et celle de Gross-Kuz'min pour ce même ℓ ; ce qui est toujours le cas pour K abélien.

Le but de la présente note est de déterminer le $\mathbb{Z}_\ell$-rang du module des points fixes $\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}(K_\infty)^\Gamma$, sous l'une ou l'autre des conjectures cyclotomiques ci-dessus, pour tout couple (S_K, T_K) d'ensembles finis disjoints de places de K, lors même que la condition $Pl_K^\ell \subset S_K \cup T_K$ n'est pas satisfaite, et d'en tirer quelques conséquences sur les modules d'Iwasawa $\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}(K_\infty)$ pour K à conjugaison complexe en liaison avec les résultats de [13, 16, 17]. Nous procédons pour cela en trois temps :

– Dans le cadre de la conjecture faible d'abord, qui permet de traiter le cas où S_K et T_K sont stables par la conjugaison complexe. La formule de rang que nous obtenons (Th. 3), qui est donc vérifiée dans le cas abélien, peut être regardée comme une généralisation de la classique conjecture de Coates et Lichtenbaum démontrée par Greenberg dans ce même contexte (cf. [2, 6]).

– Dans le cadre de la conjecture forte ensuite qui ouvre sur le cas plus général où n'est pas fait d'hypothèse de stabilité. Pour cela, nous commençons par tirer quelques conséquences algébriques de la Conjecture cyclotomique généralisant le résultat de semi-simplicité de Greenberg (cf. [6]) qui prouve que, pour un corps abélien K, le polynôme minimal du Λ-module $\mathrm{Gal}(H_{Pl_K^\ell}(K_\infty)/K_\infty)$ de la plus grande pro-ℓ-extension abélienne non ramifiée et ℓ-décomposée $H_{Pl_K^\ell}(K_\infty)$ de K_∞, n'est pas divisible par $(\gamma - 1)$. Il en résulte une formule de rang qui étend la précédente (Th. 7).

– Cela fait, nous abordons la comparaison des formes faible et forte de la conjecture et montrons qu'elles sont en fait équivalentes (Th. 10). L'idée centrale est la suivante : on s'intéresse à un $\mathbb{Z}_\ell$-module qui n'est pas *a priori* stable par conjugaison complexe, mais qui est canoniquement l'image d'un autre module stable par conjugaison, dont on peut donc définir les composantes réelle et imaginaire. Sous la conjecture de Leopoldt, il se trouve que sa composante réelle est pseudo-nulle. Quotientant donc le module de départ par l'image de celle-ci, on obtient un module pseudo-isomorphe au module de départ lequel est, lui, purement imaginaire.

Enfin ans la dernière partie de cette note nous abordons directement le calcul du $\mathbb{Z}_\ell$-rang à l'aide de la théorie ℓ-adique du corps de classes. La preuve alternative particulièrement concise que nous en donnons (Cor. 13) redonne immédiatement l'équivalence établie plus haut.

Signalons pour finir qu'au cours de l'élaboration de ce résultat nous avons eu connaissance d'un travail indépendant de Lee et Yu [21] complétant l'étude antérieure de Lee et Seo [20] sur une forme équivalente de la conjecture cyclotomique. Avec celles données dans la présente note, on dispose de ce fait de trois façons différentes de déterminer le $\mathbb{Z}_\ell$-rang du module $\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}(K_\infty)^\Gamma$, en présence d'une conjugaison complexe sous les conjectures équivalentes ci-dessus.

Remarque. Comme expliqué dans [15], Scolie 8, les places étrangères à ℓ étant sans incidence sur le $\mathbb{Z}_\ell$-rang de $\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}(K_\infty)^\Gamma$, il est toujours possible de supposer $S_K \cup T_K \subset Pl_K^\ell$ dans les démonstrations, sans restreindre aucunement la généralité.

1 Théorème Principal sous la conjecture faible

Supposons maintenant que K soit une extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps totalement réel K^+. Notons τ la conjugaison complexe et $\Delta = \mathrm{Gal}(K/K^+) = \{1, \tau\}$.

Rappelons que, pour ℓ impair, chaque $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module M s'écrit comme somme directe de ses composantes réelle $M^+ = M^{e_+}$ et imaginaire $M^- = M^{e_-}$ via les idempotents $e_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \tau)$. Et, si ℓ vaut 2 et si M est $\mathbb{Z}_2$-noethérien, confondre le noyau de $(1 \pm \tau)$ avec l'image de $(1 \mp \tau)$ donne lieu à une erreur finie. On peut donc dans tous les cas définir composantes réelle et imaginaire de M comme image et noyau respectifs de $(1+\tau)$ et écrire à un fini près : $M \sim M^+ \oplus M^-$.

Pour chaque ensemble de places S de K^+, notons de même S^- le sous-ensemble de celles qui sont décomposées par la conjugaison complexe et S^+ son complémentaire.

Avec ces conventions, sous la conjecture faible le *Théorème principal* s'énonce comme suit :

Théorème 3. *Soient ℓ un nombre premier ; K une extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps K^+ totalement réel ; S_{K^+} et T_{K^+} deux ensembles finis disjoints de places de K^+ ; $R_{K^+} = Pl^\ell_{K^+} \setminus (S_{K^+} \cup T_{K^+})$ l'ensemble des places au-dessus de ℓ qui ne sont ni dans S_{K^+} ni dans T_{K^+}.*

Soient enfin $\mathcal{C}_S^T(K_\infty) = \mathrm{Gal}(H_S^T(K_\infty)/K_\infty)$ le groupe de Galois attaché à la pro-ℓ-extension abélienne maximale $H_S^T(K_\infty)$ de K_∞ qui est S-décomposée et T-ramifiée ; et $\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma$ le sous-module de $\mathcal{C}_S^T(K_\infty)$ fixé par $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. Sous la conjecture cyclotomique faible, il vient :

- *(i) La composante réelle du groupe $\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma$ est finie : $\big(\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma\big)^+ \sim \mathcal{C}_S^T(K_\infty^+)^\Gamma \sim 1$.*
- *(ii) Sa composante imaginaire est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de rang : $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_\ell}\big(\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma\big)^- = |R^-|$, où $|R^-|$ désigne le nombre de places de R qui sont décomposées par la conjugaison complexe.*

Preuve. Comme rappelé plus haut, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $R \sqcup S \sqcup T$ et une partition de Pl^ℓ. De plus, côté réel, nous avons immédiatement : $\big(\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma\big)^+ \sim \mathcal{C}_S^T(K_\infty^+)^\Gamma$, puisque l'opérateur $1+\tau$ correspond à la norme N_{K/K^+}.

Considérons alors le quotient des genres ${}^\Gamma\mathcal{C}_S^T(K_\infty^+) = \mathrm{Gal}(H_S^T(K_\infty^+/K^+)/K_\infty^+)$, où $H_S^T(K_\infty^+/K^+)$ désigne la plus grande sous-extension de $H_S^T(K_\infty^+)$ qui est abélienne sur K^+. Par construction, $H_S^T(K_\infty^+/K^+)$ est ℓ-ramifiée sur K_∞^+, donc sur K^+ et, par conséquent, de degré fini sur K_∞^+ sous la conjecture de Leopoldt (qui est vérifiée ici, puisque la conjecture cyclotomique est supposée l'être). En résumé, il vient : ${}^\Gamma\mathcal{C}_S^T(K_\infty^+) \sim 1$; donc, a fortiori : $\mathcal{C}_S^T(K_\infty^+)^\Gamma \sim 1$.

Regardons maintenant la composante imaginaire. D'après la Proposition 2 de [15] appliquée aux étages finis K_n/K de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de K, l'isomorphisme de modules galoisiens

$$\mathcal{C}\ell_S^T(K_n)^\Gamma / cl_S^T\big(\mathcal{D}_S^T(K_n)^\Gamma\big) \simeq \big(\mathcal{E}_S^T(K) \cap N_{K_n/K}(\mathcal{R}(K_n))\big)/N_{K_n/K}(\mathcal{E}_S^T(K_n))$$

identifie le quotient du pro-ℓ-groupe des S-classes T-infinitésimales ambiges de K_n par le sous-groupe des classes des S-diviseurs T-infinitésimaux ambiges à un certain quotient du groupe des S-unités T-infinitésimales ; ce qui donne, par passage à la limite projective pour la norme :

$$\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma / \varprojlim cl_S^T\big(\mathcal{D}_S^T(K_n)^\Gamma\big) \simeq \big(\mathcal{E}_S^T(K) \cap \widetilde{\mathcal{E}}(K)\big)/\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_{K_n/K}(\mathcal{E}_S^T(K_n)\big).$$

Le point essentiel ici est que, sous la conjecture de Gross-Kuz'min (donc ici encore sous la conjecture cyclotomique), la composante imaginaire du groupe $\widetilde{\mathcal{E}}(K) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_{K_n/K}(\mathcal{R}(K_n))$ des unités logarithmiques se réduit au ℓ-sous-groupe des racines de l'unité (cf. e.g. [11]). Il suit :

$$\big(\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma\big)^- \sim \varprojlim cl_S^T\big(\mathcal{D}_S^T(K_n)^\Gamma\big)^-.$$

Or, le pro-ℓ-groupe $\big(\mathcal{D}_S^T(K_n)^\Gamma\big)^-$ des S-diviseurs étrangers à T, qui sont ambiges et imaginaires, est engendré par le sous-groupe $\mathcal{D}_S^T(K)^-$ étendu de K (donc sans incidence sur la limite projective) et le sous-groupe $\mathcal{D}_S^T(K_n)^{[R]-}$ construit sur les produits $\mathfrak{a}_n(\mathfrak{p}) = \prod_{\mathfrak{p}_n|\mathfrak{p}} \mathfrak{p}_n$, pour $\mathfrak{p} \in R^-$, lesquels satisfont les identités normiques $N_{K_m/K_n}(\mathfrak{a}_m(\mathfrak{p})) = \mathfrak{a}_n(\mathfrak{p})$, pour $m \geq n \gg 0$. Son sous-groupe principal $\mathcal{P}_S^T(K_n)^{[R]-}$ étant ultimement constant, puisque les S-unités imaginaires T-infinitésimales des K_n proviennent d'un K_{n_0} aux racines de l'unité près, il vient bien finalement :

$$\big(\mathcal{C}_S^T(K_\infty)^\Gamma\big)^- \sim \varprojlim cl_S^T(\mathcal{D}_S^T(K_n)^{[R]-}) \sim \varprojlim \mathcal{D}_S^T(K_n)^{[R]-} \simeq \mathbb{Z}_\ell^{|R^-|}.$$

2 Semi-simplicité des modules d'Iwasawa $\mathcal{C}_S^T(K_\infty)$

Avant d'énoncer le Théorème Principal dans le cadre plus général de la conjecture forte, commençons par préciser quelques conséquences algébriques de celle-ci.

Notons γ un générateur topologique du groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ et $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]]$ l'algèbre d'Iwasawa attachée à Γ. Le point essentiel est que les facteurs cyclotomiques du polynôme minimal $\Pi_{S_K}^{T_K}(\gamma-1)$ du sous-module de Λ-torsion $\mathcal{T}_{S_K}^{T_K}(K_\infty)$ de $\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}(K_\infty)$ sont de multiplicité 1 :

Proposition 4. *Etant donné un corps de nombres K qui satisfait la conjecture cyclotomique forte pour ℓ, soient $K_\infty = \bigcup K_n$ sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique ; S_K et T_K deux ensembles finis disjoints quelconques de places finies de K ; puis $R_K = Pl_K^\ell \setminus (S_K \cup T_K)$ le sous-ensemble des places de K au-dessus de ℓ qui ne sont ni dans S_K ni dans T_K. Soient enfin $\mathcal{C}_{S_K}^{T_K} = \mathcal{C}_{S_K}^{T_K}(K_\infty)$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(H_{S_K}^{T_K}(K_\infty)/K_\infty)$ de la pro-ℓ-extension abélienne S_K-décomposée T_K-ramifiée maximale de K_∞ et $\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}[R_K]$ engendré par les sous-groupes de décomposition des places de R_K.*

(i) Le sous-module de $\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}$ fixé par $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ contient $\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}[R_K]^\Gamma$ avec un indice fini :

$$\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}[R_K]^\Gamma \sim (\mathcal{C}_{S_K}^{T_K})^\Gamma.$$

(ii) Et celui du quotient $\mathcal{C}_{R_K S_K}^{T_K} = \mathcal{C}_{S_K}^{T_K}/\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}[R_K]$ est fini : $(\mathcal{C}_{R_K S_K}^{T_K})^\Gamma \sim 1$.

En particulier, le polynôme minimal $\Pi_{S_K}^{T_K}(\gamma-1)$ du sous-module de Λ-torsion $\mathcal{T}_{S_K}^{T_K}$ de $\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}$ n'est pas divisible par $\Phi_1(\gamma)^2 = (\gamma-1)^2$. Plus généralement, sous la conjecture cyclotomique dans K_∞, le polynôme $\Pi_{S_K}^{T_K}(\gamma-1)$ n'est divisible par aucun carré de la forme $\Phi_{\ell^n}(\gamma)^2 = ((\gamma^{\ell^n}-1)/(\gamma^{\ell^{n-1}}-1))^2$.

Preuve. Prenant les points fixes par Γ dans la suite exacte courte qui définit $\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}[R_K]$,

$$1 \to \mathcal{C}_{S_K}^{T_K}[R_K] \to \mathcal{C}_{S_K}^{T_K} \to \mathcal{C}_{R_K S_K}^{T_K} \to 1,$$

nous obtenons la suite :

$$1 \to (\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}[R_K])^\Gamma \to (\mathcal{C}_{S_K}^{T_K})^\Gamma \to (\mathcal{C}_{R_K S_K}^{T_K})^\Gamma ;$$

et la conjecture cyclotomique appliquée avec $R_K \cup S_K$ et T_K nous donne : $(\mathcal{C}_{R_K S_K}^{T_K})^\Gamma \sim 1$. Les deux assertions (i) et (ii) en résultent immédiatement.

Il suit de là que $(\gamma-1)$ et $(\gamma-1)^2$ ont même noyau dans $\mathcal{T}_{S_K}^{T_K}$, i.e. que $\Phi_1(\gamma) = \gamma - 1$ apparait dans $\Pi_{S_K}^{T_K}(\gamma-1)$ avec une multiplicité au plus 1 ; et, sous la conjecture cyclotomique dans K_n, qu'il en va de même des $\Phi_{\ell^m}(\gamma)$ pour $m \le n$.

Corollaire 5. *Sous la conjecture forte le sous-module des points fixes $(\mathcal{C}_{S_K}^{T_K})^\Gamma = (\mathcal{T}_{S_K}^{T_K})^\Gamma$ de $\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}$ est un pseudo-facteur direct du sous-module de Λ-torsion $\mathcal{T}_{S_K}^{T_K}$ de $\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}$.*

Preuve. Le quotient $\bar{\Pi}_{S_K}^{T_K}(\gamma-1) = \Pi_{S_K}^{T_K}(\gamma-1)/(\gamma-1)$ étant étranger à $\gamma-1$ dans l'anneau $\mathbb{Q}_\ell[\gamma-1]$, le produit de leurs noyaux respectifs dans $\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}$ est d'indice fini dans $\mathcal{T}_{S_K}^{T_K}$ et pseudo-direct (en ce sens que leur intersection $\mathrm{Ker}\,\bar{\Pi}_S^T(\gamma-1) \cap \mathrm{Ker}(\gamma-1)$ est finie) : $\mathrm{Ker}\,\bar{\Pi}_{S_K}^{T_K}(\gamma-1) \times \mathrm{Ker}(\gamma-1) \sim \mathcal{T}_S^T$.

Corollaire 6. *Soient $S'_K \subset S_K$ et $T'_K \supset T_K$ deux autres ensembles finis disjoints de places de K. Sous la conjecture cyclotomique forte, si $\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}$ et $\mathcal{C}_{S'_K}^{T'_K}$ ont même Λ-rang, la surjection canonique f de $\mathcal{C}_{S'_K}^{T'_K}$ sur $\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}$ induit un pseudo-épimorphisme de $(\mathcal{C}_{S'_K}^{T'_K})^\Gamma$ vers $(\mathcal{C}_{S_K}^{T_K})^\Gamma$.*

Preuve. Notons $\mathcal{T}_S^T$ le sous-module de Λ-torsion de $\mathcal{C}_S^T$ et $\mathcal{T}_{S'}^{T'}$ celui de $\mathcal{C}_{S'}^{T'}$. La surjection canonique f envoie $(\mathcal{C}_{S'}^{T'})^\Gamma = (\mathcal{T}_{S'}^{T'})^\Gamma$ vers $(\mathcal{C}_S^T)^\Gamma = (\mathcal{T}_S^T)^\Gamma$. Et l'identité des Λ-rangs $\mathrm{rg}_\Lambda\,\mathcal{C}_{S'}^{T'} = \mathrm{rg}_\Lambda\,\mathcal{C}_S^T$ nous assure que f envoie $\mathcal{T}_{S'}^{T'}$ *sur* $\mathcal{T}_S^T$. En particulier, le polynôme minimal $\Pi(\gamma-1)$ de $\mathcal{T}_S^T$ divise donc le polynôme minimal $\Pi'(\gamma-1)$ de $\mathcal{T}_{S'}^{T'}$. Cela étant :

— Si $\gamma - 1$ ne divise pas $\Pi'(\gamma-1)$, le sous-module $(\mathcal{C}_S^T)^\Gamma$ est fini ; et il n'y a rien à démontrer.

— Sinon, soit $\bar{\Pi}'(\gamma-1) = \Pi'(\gamma-1)/(\gamma-1)$, avec $\bar{\Pi}'(\gamma-1)$ et $\gamma-1$ copremiers. Il vient :

$$(\mathcal{C}_S^T)^\Gamma = (\mathcal{T}_S^T)^\Gamma \sim (\mathcal{T}_S^T)^{\bar{\Pi}'(\gamma-1)} = f((\mathcal{T}_{S'}^{T'})^{\bar{\Pi}'(\gamma)} \sim f((\mathcal{T}_{S'}^{T'})^\Gamma) = f((\mathcal{C}_{S'}^{T'})^\Gamma).$$

3 Théorème principal sous la conjecture forte

Dans le Théorème 3, les ensembles respectifs de places de K au-dessus de S et T sont, du fait même de leur construction, stables par la conjugaison complexe τ. Mais il est facile de s'affranchir de cette restriction, ce qui donne le résultat de Lee et Yu obtenu (pour ℓ impair) dans [21] :

Théorème 7. *Soient ℓ un nombre premier et K une extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps K^+ totalement réel, supposée satisfaire la Conjecture cyclotomique forte pour ℓ. Étant donnés deux ensembles finis disjoints S_K et T_K de places de K, notons $\hat{S}_K = S_K \cup S_K^\tau$ et $\check{T}_K = T_K \cap T_K^\tau$ leurs saturés respectivement supérieur et inférieur pour la conjugaison complexe τ ; désignons par $\hat{S}_{K^+}$ et $\check{T}_{K^+}$ les ensembles de places de K^+ au-dessous de $\hat{S}_K$ et $\check{T}_K$; et notons enfin $\bar{R}_{K^+} = Pl^\ell_{K^+} \setminus (\hat{S}_{K^+} \cup \check{T}_{K^+})$ l'ensemble des places de K^+ au-dessus de ℓ qui ne sont ni dans $\hat{S}_{K^+}$ ni dans $\check{T}_{K^+}$. Alors le $\mathbb{Z}_\ell$-rang du sous-module ambige $\mathcal{C}^{T_K}_{S_K}(K_\infty)^\Gamma$ du groupe de Galois $\mathcal{C}^{T_K}_{S_K}(K_\infty)$ attaché à la pro-ℓ-extension abélienne $H^{T_K}_{S_K}(K_\infty)$ S_K-décomposée T_K-ramifiée maximale sur K_∞ est :*

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_\ell}\, \mathcal{C}^{T_K}_{S_K}(K_\infty)^\Gamma = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_\ell}\, \mathcal{C}^{\check{T}_K}_{\hat{S}_K}(K_\infty)^\Gamma = |\bar{R}^-_{K^+}|,$$

où $|\bar{R}^-_{K^+}|$ désigne le nombre de places de $\bar{R}_{K^+}$ qui sont décomposées par la conjugaison complexe.

Pour établir ce dernier résultat, nous allons nous appuyer sur l'égalité des rangs :

Lemme 8. *Les Λ-modules $\mathcal{C}^{T_K}_{S_K}(K_\infty)$ et $\mathcal{C}^{\check{T}_K}_{\hat{S}_K}(K_\infty)$ ont inconditionnellement même Λ-rang :*

$$\rho^T_S = \mathrm{rg}_\Lambda\, \mathcal{C}^{T_K}_{S_K}(K_\infty) = \mathrm{rg}_\Lambda\, \mathcal{C}^{\check{T}_K}_{\hat{S}_K}(K_\infty) = \deg_\ell \check{T}_K,$$

où $\deg_\ell \check{T}_K = \sum_{\mathfrak{l}\in(\mathcal{P}\ell^\ell_K\cap\check{T}_K)}[K^+_{\mathfrak{l}} : \mathbb{Q}_\ell]$ désigne le degré en ℓ de l'ensemble de places $\check{T}_K$.

Preuve. Si K contient une racine ℓ-ième primitive de l'unité ζ_ℓ, c'est le Théorème 9 de [16]. Sinon, écrivant $K = K^+[\sqrt{\delta}]$ avec δ totalement négatif, on peut remplacer K^+ par $K^+[\zeta_\ell+\bar{\zeta}_\ell, \sqrt{\delta}(\zeta_\ell-\bar{\zeta}_\ell)]$ et K par $K' = K[\zeta_\ell]$; appliquer le Théorème 2.7 de [13] à K' ; et redescendre le résultat dans K.

Preuve du Théorème. Comme précédemment, nous pouvons supposer sans perte de généralité S_K et T_K contenus dans l'ensemble Pl^ℓ_K des places de K au-dessus de ℓ. Cela étant, les sous-ensembles

$$S_K = \check{S}_K \sqcup (T_K \cap S^\tau_K) \sqcup S^\circ_K; \quad T_K = \check{T}_K \sqcup (S_K \cap T^\tau_K) \sqcup T^\circ_K; \quad R_K = \check{R}_K \sqcup S^{\circ\,\tau}_K \sqcup T^{\circ\,\tau}_K.$$

forment alors une partition de Pl^ℓ_K. Il vient : $\bar{R}_K = \check{R}_K \sqcup (T^\circ_K \sqcup T^{\circ\,\tau}_K)$ puis $\bar{R}^-_K = \check{R}^-_K \sqcup (T^\circ_K \sqcup T^{\circ\,\tau}_K)$.

Procédons par minoration et majoration.

(i) Le Corollaire 6, nous donne directement la minoration : $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_\ell}\, \mathcal{C}^{T_K}_{S_K}(K_\infty)^\Gamma \geq \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_\ell}\, \mathcal{C}^{\check{T}_K}_{\hat{S}_K}(K_\infty)^\Gamma$. Et ce dernier est donné par le Théorème 3 : $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_\ell}\, \mathcal{C}^{\check{T}_K}_{\hat{S}_K}(K_\infty)^\Gamma = |(\bar{R}^-_{K^+}|$.

(ii) D'autre part, par la Proposition 4, les classes invariantes de $\mathcal{C}^{T_K}_{S_K}(K_\infty)^\Gamma$ proviennent des familles projectives $\mathfrak{a}_n(\mathfrak{p})$ pour $\mathfrak{p} \in R_K = \check{R}_K \sqcup S^{\circ\,\tau}_K \sqcup T^{\circ\,\tau}_K$. Or, par le Théorème 3 :

— pour $\mathfrak{p} \in \check{R}_K$, on a : $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})\mathfrak{a}(\mathfrak{p}^\tau) = \mathfrak{a}(\mathfrak{p}\mathfrak{p}^\tau) \sim 1$ dans $\mathcal{C}^{\hat{T}_K}(K_\infty)$ donc, a fortiori, dans $\mathcal{C}^{T_K}_{S_K}(K_\infty)$;

— pour $\mathfrak{p} \in S^{\circ\,\tau}_K$, on a de même : $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})\mathfrak{a}(\mathfrak{p}^\tau) = \mathfrak{a}(\mathfrak{p}\mathfrak{p}^\tau) \sim 1$ dans $\mathcal{C}^{\hat{T}_K}(K_\infty)$ donc dans $\mathcal{C}^{T_K}(K_\infty)$; et finalement : $\mathfrak{a}(\mathfrak{p}) \sim \mathfrak{a}(\mathfrak{p}^{-\tau}) \sim 1$ dans $\mathcal{C}^{T_K}_{S_K}(K_\infty)$.

Il vient donc : $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_\ell}\, \mathcal{C}^{T_K}_{S_K}(K_\infty)^\Gamma \leq \frac{1}{2}|\check{R}^-_K| + |T^{\circ\,\tau}_K| = |\bar{R}^-_{K^+}|$.

En fin de compte, les deux inégalités réunies nous donnent l'égalité attendue.

Corollaire 9. *Sous les hypothèses du Théorème, le $\mathbb{Z}_\ell$-rang du quotient des genres est donné par :*

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_\ell}\, {}^\Gamma\mathcal{C}^{T_K}_{S_K}(K_\infty) = \deg_\ell \check{T}K + |\bar{R}^-_{K^+}|.$$

Preuve. Écrivant la pseudo-décomposition $\mathcal{C}^S_T(K_\infty) \sim \Lambda^{\rho^S_T} \oplus \mathcal{T}^S_T(K_\infty)$, nous avons immédiatement :

$${}^\Gamma\mathcal{C}^{T_K}_{S_K}(K_\infty) \sim \mathbb{Z}_\ell{}^{\rho^T_S} \oplus {}^\Gamma\mathcal{T}^{T_K}_{S_K}(K_\infty) \sim \mathbb{Z}_\ell{}^{\rho^T_S} \oplus \mathcal{T}^{T_K}_{S_K}(K_\infty)^\Gamma = \mathbb{Z}_\ell{}^{\rho^T_S} \oplus \mathcal{C}^{T_K}_{S_K}(K_\infty)^\Gamma,$$

avec $\rho^S_T = \deg_\ell \check{T}_K$ et $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_\ell}\, \mathcal{C}^{\check{T}_K}_{\hat{S}_K}(K_\infty)^\Gamma = |\bar{R}^-_{K^+}|$.

4 Équivalence des conjectures faible et forte

Supposons encore K extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps K^+ totalement réel ; mais partons cette fois d'une partition arbitraire $S_K \sqcup T_K$ de Pl_K^ℓ. Notons toujours τ la conjugaison complexe et posons : $\hat{S}_K = S_K \cup S_K^\tau$ et $\check{S}_K = S_K \cap S_K^\tau$, comme dans le Théorème 7 ; et écrivons de même : $\hat{T}_K = T_K \cup T_K^\tau$ et $\check{T}_K = T_K \cap T_K^\tau$ en omettant l'indice K dans ce qui suit.

Observons que $\hat{S}_K \sqcup \check{T}_K$ et $\check{S}_K \sqcup \hat{T}_K$ forment des partitions de P_K^ℓ stables par la conjugaison τ.

Considérons alors la surjection canonique $f_T^s : \mathcal{C}_{\hat{T}}^{\check{S}}(K_\infty) \to \mathcal{C}_T^S(K_\infty)$. Son noyau $\operatorname{Ker} f_T^s$ est engendré conjointement par les sous-groupes de décomposition $\mathcal{D}_\mathfrak{l}$ des places $\mathfrak{l}$ de $S \setminus \check{S}$ et par les sous-groupes d'inertie $\mathcal{I}_\mathfrak{l}$ des places $\mathfrak{l}$ de $\hat{T} \setminus T$ dans $\mathcal{C}_{\hat{T}}^{\check{S}}(K_\infty)$. Regardons l'image par f_T^s du sous-module réel $\mathcal{C}_{\hat{T}}^{\check{S}}(K_\infty)^+ = \mathcal{C}_{\hat{T}}^{\check{S}}(K_\infty)^{1+\tau} \sim \mathcal{C}_{\hat{T}}^{\check{S}}(K_\infty^+)$. Nous avons :

$$\mathcal{C}_T^S(K_\infty)/f_T^s(\mathcal{C}_{\hat{T}}^{\check{S}}(K_\infty)^+) \simeq \mathcal{C}_{\hat{T}}^{\check{S}}(K_\infty)/\big(\operatorname{Ker} f_T^s\ \mathcal{C}_{\hat{T}}^{\check{S}}(K_\infty)^+\big).$$

Or, par construction, le quotient à droite est annulé par $1+\tau$. Ainsi, puisque les $\mathcal{D}_\mathfrak{l}$ (pour $\mathfrak{l} \in S \setminus \check{S}$) et les $\mathcal{I}_\mathfrak{l}$ (pour $\mathfrak{l} \in \hat{T} \setminus T$) y ont une image triviale, il en est de même de leurs conjugués respectifs $\mathcal{D}_\mathfrak{l}^\tau = \mathcal{D}_{\mathfrak{l}^\tau}$ et $\mathcal{I}_\mathfrak{l}^\tau = \mathcal{I}_{\mathfrak{l}^\tau}$. Et il vient donc :

$$\mathcal{C}_{\hat{T}}^{\check{S}}(K_\infty)/\big(\operatorname{Ker} f_T^s\,.\,\mathcal{C}_{\hat{T}}^{\check{S}}(K_\infty)^+\big) \simeq \mathcal{C}_{\check{T}}^{\hat{S}}(K_\infty)^-,$$

où $\mathcal{C}_{\check{T}}^{\hat{S}}(K_\infty)^-$ désigne le plus grand quotient de $\mathcal{C}_{\check{T}}^{\hat{S}}(K_\infty)$ annulé par $1+\tau$.

En résumé, nous avons la suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow \mathcal{F}_{\hat{T}}^{\check{S}}(K_\infty)^+ \longrightarrow \mathcal{C}_T^S(K_\infty) \longrightarrow \mathcal{C}_{\check{T}}^{\hat{S}}(K_\infty)^- \longrightarrow 1,$$

avec $\mathcal{F}_{\hat{T}}^{\check{S}}(K_\infty)^+ = \mathcal{C}_{\hat{T}}^{\check{S}}(K_\infty)^+/\big(\mathcal{C}_{\hat{T}}^{\check{S}}(K_\infty)^+ \cap \operatorname{Ker} f_T^S\big)$; puis, en prenant les points fixes par Γ :

$$1 \longrightarrow \mathcal{F}_{\hat{T}}^{\check{S}}(K_\infty)^{\Gamma\,+} \longrightarrow \mathcal{C}_T^S(K_\infty)^\Gamma \longrightarrow \mathcal{C}_{\check{T}}^{\hat{S}}(K_\infty)^{\Gamma\,-}.$$

Supposons maintenant que K satisfasse la conjecture cyclotomique *faible*, c'est à dire, comme établi dans [14], à la fois la conjecture de Leopoldt et celle de Gross-Kuz'min pour ℓ.

— À gauche, la conjecture de Leopoldt assure la finitude de $\mathcal{C}_{\hat{T}}^{\check{S}}(K_\infty)^+$, donc de $\mathcal{F}_{\hat{T}}^{\check{S}}(K_\infty)^+$; et finalement celle du sous-module des points fixes $\mathcal{F}_{\hat{T}}^{\check{S}}(K_\infty)^{\Gamma\,+}$.

— À droite, la conjecture cyclotomique *faible* (en fait la conjecture de Gross-Kuz'min) assure celle de $\mathcal{C}_{\check{T}}^{\hat{S}}(K_\infty)^{\Gamma\,-}$.

Il suit de là que le groupe médian $\mathcal{C}_T^S(K_\infty)^\Gamma$ est lui-même fini ; autrement dit que K vérifie la conjecture cyclotomique *forte* pour ℓ. Ainsi :

Théorème 10 (Équivalence des conjectures). *Pour tout corps de nombres K à conjugaison complexe et tout nombre premier ℓ fixé, les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

— *K vérifie les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min.*

— *K vérifie la conjecture cyclotomique faible.*

— *K vérifie la conjecture cyclotomique forte.*

Comme vu dans les sections précédentes, la conjecture faible entraîne la validité de la formule des rangs pour les partitions $R \sqcup S \sqcup T$ de Pl^ℓ stables par conjugaison ; et la conjecture forte l'entraîne indépendamment de cette restriction. Inversement la formule écrite pour les seules partitions vérifiant $R = \emptyset$ exprime précisément ces mêmes conjectures.

Avec les notations de Théorèmes 3 et 7, il vient ainsi :

Scolie 11. *Sont encore équivalentes aux précédentes chacune des deux assertions suivantes :*

— *Pour toute partition stable par conjugaison complexe $P_K^\ell = R_K \sqcup S_K \sqcup T_K$ de l'ensemble Pl_K^ℓ, on a les identités de rang :*

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_\ell}\ \mathcal{C}_{S_K}^{T_K}(K_\infty^+)^\Gamma = 0 \qquad \& \qquad \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_\ell}\ \mathcal{C}_{S_K}^{T_K}(K_\infty)^\Gamma = |R_{K^+}^-|.$$

— *Pour toute partition $Pl_K^\ell = R_K \sqcup S_K \sqcup T_K$ de l'ensemble des places au-dessus de ℓ, on a les identités de rang :*

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_\ell}\ \mathcal{C}_{\hat{S}_K}^{\check{T}_K}(K_\infty^+)^\Gamma = 0 \qquad \& \qquad \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_\ell}\ \mathcal{C}_{S_K}^{T_K}(K_\infty)^\Gamma = |\bar{R}_{K^+}^-|.$$

5 Interprétation par le corps de classes ℓ-adique

Regardons maintenant le groupe ${}^{\Gamma}\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}(K_\infty)$ par la théorie ℓ-adique du corps de classes, telle qu'exposée dans [12] : le nombre premier ℓ et le corps K étant supposés fixés, pour chaque place non complexe $\mathfrak{p}$ de K notons $\mathcal{U}_\mathfrak{p}$ et $\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$ les sous-groupes unités, respectivement au sens habituel et logarithmique, du ℓ-adifié $\mathcal{R}_\mathfrak{p} = \varprojlim K_\mathfrak{p}^\times/K_\mathfrak{p}^{\times\ell^n}$ du groupe multiplicatif du complété $K_\mathfrak{p}$. Écrivons de même $\mathcal{J} = \prod_\mathfrak{p}^{\text{res}} \mathcal{R}_\mathfrak{p}$ le ℓ-adifié du groupe des idèles ; $\mathcal{U} = \prod_\mathfrak{p} \mathcal{U}_\mathfrak{p}$ et $\widetilde{\mathcal{U}} = \prod_\mathfrak{p} \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$ ses sous-groupes unités (au sens habituel et logarithmique) ; et $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} K^\times$ le sous-groupe principal de $\mathcal{J}$.

Pour tout $P \subset Pl_K$, notons $\mathcal{R}_P = \prod_{\mathfrak{p}\in P} \mathcal{R}_\mathfrak{p}$; puis $\mathcal{U}_P = \prod_{\mathfrak{p}\in P} \mathcal{U}_\mathfrak{p}$ et $\mathcal{U}^P = \prod_{\mathfrak{p}\notin P} \mathcal{U}_\mathfrak{p}$. Écrivons de même $\widetilde{\mathcal{U}}_P = \prod_{\mathfrak{p}\in P} \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$ et $\widetilde{\mathcal{U}}^P = \prod_{\mathfrak{p}\notin P} \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$. Soient enfin $\mathcal{D}_P = \mathcal{R}_P/\mathcal{U}_P$ et $\widetilde{\mathcal{D}}_P = \mathcal{R}_P/\widetilde{\mathcal{U}}_P$ les groupes de diviseurs (respectivement aux sens habituel et logarithmique). Cela étant, il vient :

Théorème 12. *Soient K un corps de nombres et $R \sqcup S \sqcup T$ une partition de l'ensemble L des places de K au-dessus de ℓ. Avec les notations précédentes le groupe de Galois $\mathcal{G}_S^T = \mathrm{Gal}(H_S^T(K_\infty/K)/K)$ de la pro-ℓ-extension S-décomposée T-ramifiée maximale de K_∞ qui est abélienne sur K est donné à un fini près par le pseudo-isomorphisme :*

$$\mathcal{G}_S^T \sim \widetilde{\mathcal{D}}_R \widetilde{\mathcal{D}}_S \mathcal{U}_T/(\widetilde{\nu}_{RS} \times p_T)(\mathcal{E}_S),$$

où $\mathcal{E}_S$ est le ℓ-adifié du groupe des S-unités de K ; $\widetilde{\nu}_{RS} = (\widetilde{\nu}_\mathfrak{l})_{\mathfrak{l}\in R\cup S}$ est la famille des valuations logarithmiques aux places de $R \sqcup S$; et p_T est le morphisme de semi-localisation aux places de T.

Preuve. Rappelons que $\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$ est le groupe de normes attaché à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de $K_\mathfrak{p}$ et qu'on a $\mathcal{U}_\mathfrak{p} = \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$, pour $\mathfrak{p} \nmid \ell$. Posons $\bar{\mathcal{U}}_\mathfrak{p} = \mathcal{U}_\mathfrak{p} \cap \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$. Comme $\mathcal{R}_S\mathcal{U}^S\mathcal{R} = \mathcal{R}_S\mathcal{U}_R\mathcal{U}_T\mathcal{U}^L\mathcal{R}$ est d'indice fini dans $\mathcal{J}$, puisque $\mathcal{J}/\mathcal{R}_S\mathcal{U}^S\mathcal{R}$ s'identifie au ℓ-groupe des S-classes d'idéaux, il vient :

$$\mathcal{G}_S^T = \mathcal{J}/\widetilde{\mathcal{U}}_S\bar{\mathcal{U}}^T\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_S\mathcal{U}_R\mathcal{U}_T\mathcal{U}^L\mathcal{R}/\widetilde{\mathcal{U}}_S\bar{\mathcal{U}}_R\mathcal{U}^L\mathcal{R} \simeq \mathcal{R}_S\mathcal{U}_R\mathcal{U}_T/\widetilde{\mathcal{U}}_S\bar{\mathcal{U}}_R(\mathcal{R}_S\mathcal{U}_R\mathcal{U}_T \cap \mathcal{U}^L\mathcal{R})\,;$$

ce qui donne la formule annoncée, puisque les idèles principaux qui interviennent au dénominateur sont les S-unités, et que l'on a, par ailleurs : $\mathcal{R}_S/\widetilde{\mathcal{U}}_S \simeq \widetilde{\mathcal{D}}_S$ et $\mathcal{U}_R/\bar{\mathcal{U}}_R \sim \mathcal{R}_R/\widetilde{\mathcal{U}}_R \simeq \widetilde{\mathcal{D}}_R$.

Corollaire 13. *Lorsque K est extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps K^+ totalement réel, sous les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min, le pseudo-isomorphisme*

$${}^{\Gamma}\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}(K_\infty) \sim \mathcal{G}_{\hat{S}_K}^{\check{T}_K\,-} \sim \widetilde{\mathcal{D}}_{\bar{R}_K}^- \times \mathcal{U}_{\check{T}_K}^- \quad \textit{donne directement :} \quad \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_\ell}\, {}^{\Gamma}\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}(K_\infty) = \deg_\ell \check{T}_{K^+} + |\bar{R}_{K^+}^-|,$$

avec $\bar{R}_K = L_K \setminus (\check{T}_K \sqcup \hat{S}_K)$ pour toute partition $R_K \sqcup S_K \sqcup T_K$ de $L_K = Pl_K^\ell$.

Preuve. Reprenons le schéma de démonstration du Théorème 10 en partant cette fois de la surjection canonique $g_{S_K}^{T_K} : \mathcal{G}_{\hat{S}_K}^{\check{T}_K} \to \mathcal{G}_{S_K}^{T_K}$. Nous obtenons alors la suite pseudo-exacte courte :

$$1 \longrightarrow \big(\mathcal{G}_{\check{S}_K}^{\hat{T}_K}\big)^+/\big(\mathcal{G}_{\check{S}_K}^{\hat{T}_K} \cap \mathrm{Ker}\, g_{S_K}^{T_K}\big)^+ \longrightarrow \mathcal{G}_{S_K}^{T_K} \longrightarrow \big(\mathcal{G}_{\hat{S}_K}^{\check{T}_K}\big)^- \longrightarrow 1,$$

où apparaissent les composantes réelles ou imaginaires des modules de droite et de gauche, ce qui permet de définir partie réelle et partie imaginaire du groupe $\mathcal{G}_{S_K}^{T_K}$ alors même qu'il n'est pas *a priori* stable par conjugaison.

— Côté réel, la conjecture de Leopoldt nous donne immédiatement : $\big(\mathcal{G}_{\check{S}_K}^{\hat{T}_K}\big)^+ \sim \Gamma \simeq \mathbb{Z}_\ell$; i.e. ${}^{\Gamma}\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}(K_\infty)^+ \sim 1$; et finalement : ${}^{\Gamma}\mathcal{C}_{S_K}^{T_K}(K_\infty) \sim \big(\mathcal{G}_{\hat{S}_K}^{\check{T}_K}\big)^-$.

— Côté imaginaire, il vient, d'après le Théorème 12 : $\mathcal{G}_{\hat{S}_K}^{\check{T}_K\,-} \sim \widetilde{\mathcal{D}}_{\bar{R}_K}^- \widetilde{\mathcal{D}}_{\hat{S}_K}^- \mathcal{U}_{\check{T}_K}^-/(\widetilde{\nu}_{\bar{R}\hat{S}} \times p_{\check{T}})(\mathcal{E}_{\hat{S}_K}^-)$. Or, sous la conjecture de Gross-Kuz'min, le $\mathbb{Z}_\ell$-module des $\hat{S}_K$-unités imaginaires s'envoie pseudo-injectivement dans $\widetilde{\mathcal{D}}_{\hat{S}_K}^-$, puisque les unités logarithmiques sont réelles. Il suit donc : $\mathcal{E}_{\hat{S}_K}^- \sim \widetilde{\mathcal{D}}_{\hat{S}_K}^-$; puis $\mathcal{G}_{\hat{S}_K}^{\check{T}_K\,-} \sim \widetilde{\mathcal{D}}_{\bar{R}_K}^- \mathcal{U}_{\check{T}_K}^-$, comme annoncé.

On retrouve ainsi très simplement l'expression du $\mathbb{Z}_\ell$-rang donnée par le Théorème 7, ce qui fournit une démonstration alternative du Théorème d'équivalence 10.

Commentaires bibliographiques

Il est formulé dans [8] une conjecture générale sur l'indépendance ℓ-adique de nombres algébriques, vérifiée dans les corps abéliens, qui implique en particulier les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min et en factorise les preuves transcendantes (partielles) classiques.

Les ℓ-groupes de S-classes T-infinitésimales sont étudiés dans [10] (Ch. II, §2). On y trouve notamment la suite exacte des classes ambiges évoquée dans la section 1.

Les ℓ-groupes de classes logarithmiques ont été introduits dans [11]. Leur calcul est maintenant implanté dans PARI (cf. [1]). L'interprétation logarithmique de la conjecture de Gross-Kuz'min est donnée dans [11] sous l'appellation initiale de conjecture de Gross généralisée.

Une formulation équivalente de la conjecture cyclotomique en termes de points fixes de (S,T)-modules d'Iwasawa a été avancée dans [20] par Lee et Seo. Lee et Yu en ont tiré dans [21] pour ℓ impair un calcul du rang analogue à celui donné ici. Leur démonstration indépendante est plus laborieuse en l'absence des simplifications apportées par l'introduction des unités logarithmiques.

Les principaux résultats de la Théorie ℓ-adique du corps de classes introduite dans [10] sont présentés dans [12]. On peut aussi se reporter au livre de Gras [5]. La semi-simplicité du module d'Iwasawa standard dans une $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomiquement ramifiée est discutée dans [18].

Enfin, le calcul des invariants d'Iwasawa attachés aux ℓ-groupes de S-classes T-infinitésimales est développé dans [13, 16, 17] en liaison avec les identités de dualité de Gras. L'article [16] contient une erreur, reproduite dans [13] mais corrigée dans [17], qui ne concerne heureusement que l'invariant λ_T^S. Elle est sans incidence sur les résultats présentés ici.

Références

[1] K. Belabas, J.-F. Jaulent, *The logarithmic class group package in PARI/GP*, Pub. Math. Besançon (2016).

[2] J. Coates, S. Lichtenbaum, *On l-adic zeta functions*, Annals of Math. **98** (1973), 498–550.

[3] L.J. Federer, B.H. Gross (with an appendix by W. Sinnott), *Regulators and Iwasawa modules*, Invent. Math. **62** (1981), 443–457.

[4] G. Gras, *Théorèmes de réflexion*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 399–499.

[5] G. Gras, *Class Field Theory : from theory to practice*, Springer Monographs in Mathematics (2005).

[6] R. Greenberg, *On a certain ℓ-adic representation*, Invent. Math. **21** (1973), 117–124.

[7] K. Iwasawa, *On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of number fields,* Ann. of Math. **98** (1973), 257–274.

[8] J.-F. Jaulent, *Sur l'indépendance ℓ-adique de nombres algébriques*, J. Numb. Th. **20** (1985), 149–158.

[9] J.-F. Jaulent, *Sur les conjectures de Leopoldt et de Gross*, Actes des Journées Arithmétiques de Besançon, Astérisque **147-148** (1987), 107–120.

[10] J.-F. Jaulent, *L'arithmétique des ℓ-extension* (Thèse de doctorat d'État), Pub. Math. Besançon (1986) ; http://pmb.univ-fcomte.fr/1986.html.

[11] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 301–325.

[12] J.-F. Jaulent, *Théorie ℓ-adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.

[13] J.-F. Jaulent, *Généralisation d'un théorème d'Iwasawa*, J. Théor. Nombres Bordeaux **17** (2005), 527-553

[14] J.-F. Jaulent, *Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min*, Annales Math. Québec **41** (2017), 119–140.

[15] J.-F. Jaulent, *Généralisation d'un théorème de Greenberg*, Archiv der Math. **111** (2008), 569–578.

[16] J.-F. Jaulent & C. Maire, *Sur les invariants d'Iwasawa des tours cyclotomiques*, Canadian Math. Bull. **46** (2003), 178–190.

[17] J.-F. Jaulent, C. Maire, G. Perbet, *Sur les formules asymptotiques le long des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions*, Annales Math. Québec **37** (2013), 63–78.

[18] J.-F. Jaulent & J. Sands, *Sur quelques modules d'Iwasawa semi-simples*, Compositio Math. **99** (1995), 325–341.

[19] L. V. Kuz'min, *The Tate module of algebraic number fields*, Izv. Akad. Nauk SSSR **36** (1972), 267-327.

[20] W. Lee & S. Seo, *On arithmetic of modified idele class groups*, Izvestiya : Mathematics **84** (2020), 545–591.

[21] W. Lee & M. Yu, *On characteristic polynomials of certain Iwasawa modules*, Pré-publication.

Institut de Mathématiques de Bordeaux
Université de Bordeaux & CNRS
351 cours de la libération
F-33405 Talence Cedex
courriel : Jean-Francois.Jaulent@math.u-bordeaux.fr
https://www.math.u-bordeaux.fr/~jjaulent/