Classes logarithmiques et capitulation II

Jean-François JAULENT

Résumé. Nous établissons un analogue du Théorème d'Artin-Furtwängler sur la capitulation en transposant aux classes logarithmiques la preuve algébrique classique du Théorème de l'idéal principal.

Abstract. We establish a logarithmic version of the classical result of Artin-Furwängler on the principalization of ideal classes in the Hilbert class-field by applying the group theoretic description of the transfert map.

Mathematics Subject Classification : Primary 11R37 ; Secondary 11R23.

Keywords : Principalization, Capitulation, logarithmic classes, Gross-Kuz'min conjecture, logarithmic ramification

1 Introduction

L'objet de cette note est d'établir pour les groupes de classes logarithmiques de degré nul $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ des corps de nombres un analogue du Théorème d'Artin-Furwängler de 1930 (cf. e.g. [1, 2, 4]), lequel affirme que le groupe des classes d'idéaux Cl_K d'un tel corps K capitule dans son corps des classes de Hilbert $L = H_K$; en d'autres termes que les idéaux de K se principalisent dans son extension abélienne non ramifiée maximale L.

Ce résultat célèbre, qui relève essentiellement de la Théorie du corps de classes, trouve son origine dans le Théorème 94 de Hilbert [8] qui dit que dans une extension cyclique non-ramifiée de degré premier L/K il existe une classe non-triviale de Cl_K qui se capitule dans Cl_L.

Or, comme exposé dans une étude précédente sur cette question [12], ce dernier théorème est en défaut pour les groupes de classes logarithmiques, puisque les calculs de K. Belabas effectués à l'aide du logiciel PARI [3] fournissent des exemples de corps quadratiques K ayant un 3-groupe de classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ d'ordre 3 mais admettant des extensions cycliques logarithmiquement non-ramifiées L de degré 3 dans lesquelles $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ ne capitule pas. Qui plus est, dans cette configuration, K possède plusieurs 3-extensions cycliques qui sont logarithmiquement non-ramifiées, ce qui rend problématique la définition même d'un 3-corps de classes de Hilbert au sens logarithmique.

C'est ce double problème de définition et de capitulation que nous nous résolvons ici :

Théorème principal. *Soient K un corps de nombres, ℓ un nombre premier et $\ell^{\widetilde{e}_K}$ l'exposant du sous-groupe de torsion $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\,\mathrm{tor}}$ du groupe des classes logarithmiques (de degré arbitraire) de K. Alors le corps K possède une ℓ-extension abélienne naturelle $\widetilde{H}_K$ logarithmiquement non-ramifiée et d'exposant $\ell^{\widetilde{e}_K}$, maximale sous ces conditions ; laquelle est telle que $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\,\mathrm{tor}}$ capitule dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^{\,\mathrm{tor}}$.*

Nous disons que $\widetilde{H}_K$ est le ℓ-corps de classes logarithmiques normalisé de K.

Scolie. *Il suit de là que $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\,\mathrm{tor}}$ capitule dans la pro-ℓ-extension abélienne K^{lc} logarithmiquement non-ramifiée maximale de K.*

Remarque. Nous avons choisi de donner ci-dessus une formulation inconditionnelle du Théorème principal. Mais il est possible d'être plus précis sous les conjectures ℓ-adiques standard : comme expliqué plus loin, la conjecture de Gross-Kuz'min [7, 17] pour un corps K revient à postuler que le sous-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ des classes de degré nul du groupe des classes logarithmiques (de degré arbitraire) de K est précisément son plus grand sous-module fini ; autrement dit que l'on a : $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\,\mathrm{tor}} = \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$.

Par ailleurs, la principalisation d'un diviseur $\mathfrak{d}_K$ (au sens ordinaire comme logarithmique) dans une extension algébrique arbitraire a toujours lieu de fait dans une sous-extension de degré fini, à savoir celle, disons $L = K[\alpha]$, engendrée par le générateur obtenu. Il en résulte que $\mathfrak{d}_K^{[L:K]}$ est engendré par $N_{L/K}(\alpha)$ et donc que la classe d'un tel $\mathfrak{d}_K$ est bien d'ordre fini.

2 Construction du corps de classes logarithmiques normalisé

Le pro-ℓ-groupe des classes logarithmiques $\mathcal{C}\ell_K$ a été introduit dans [10] par analogie avec le groupe des classes au sens habituel en envoyant le tensorisé $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$ dans le $\mathbb{Z}_\ell$-module des diviseurs $\mathcal{D}\ell = \oplus_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_\ell\, \mathfrak{p}$ construit sur les places finies de K par la famille $(\widetilde{\nu}_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ obtenue en remplaçant les valuations habituelles $\nu_{\mathfrak{l}}$ aux places $\mathfrak{l}$ qui divisent ℓ par les valuations ℓ-adiques $\widetilde{\nu}_{\mathfrak{l}}$ données (à normalisation près) par les logarithmes des valeurs absolues ℓ-adiques $\widetilde{\nu}_{\mathfrak{l}}(\cdot) = \log_\ell(|\cdot|)/\log_\ell(1+\ell)$:

$$1 \to \widetilde{\mathcal{E}}_K \to \mathcal{R}_K \xrightarrow{\widetilde{\nu}} \mathcal{D}\ell_K \to \mathcal{C}\ell_K \to 1.$$

Dans la suite exacte obtenue le noyau $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ à gauche est ainsi le groupe des *unités logarithmiques*; le conoyau $\mathcal{C}\ell_K$ à droite, celui des *classes logarithmiques*. Contrairement aux groupes de classes et d'unités au sens habituel, ce sont donc par construction des objets ℓ-adiques. Leur importance provient de leur interprétation par la Théorie ℓ-adique du corps de classes (cf. [5, 10, 11]).

Pour voir cela, introduisons pour chaque place finie $\mathfrak{p}$ de K le compactifié ℓ-adique du groupe $K_{\mathfrak{p}}^\times$ défini par $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \varprojlim K_{\mathfrak{p}}^\times / K_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^n}$; et notons $\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{res}} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ le ℓ-adifié du groupe des idèles.

Du point de vue local, le noyau $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ de $\nu_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ (autrement dit le sous-groupe des unités de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$) est le groupe de normes associé à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension non ramifiée de $K_{\mathfrak{p}}$; tandis que le noyau $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ de $\widetilde{\nu}_{\mathfrak{p}}$ (i.e. le sous-groupe des unités logarithmiques locales) correspond, lui, à sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique. En d'autres termes une ℓ-extension abélienne de $K_{\mathfrak{p}}$ est *logarithmiquement non-ramifiée* si et seulement si elle est contenue dans la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $K_{\mathfrak{p}}^c$ de $K_{\mathfrak{p}}$.

Du point de vue global, le ℓ-groupe des classes d'idéaux s'interprète comme groupe de Galois de la ℓ-extension abélienne non ramifiée maximale K^{nr} de K ; et le ℓ-groupe des classes logarithmiques $\mathcal{C}\ell_K \simeq \mathcal{J}_K / \prod_{\mathfrak{p}} \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_K$ comme groupe de Galois de sa pro-ℓ-extension abélienne localement cyclotomique maximale K^{lc}. Le corps K^{lc} est ainsi la plus grande pro-ℓ-extension abélienne de K qui est complètement décomposée (en toutes ses places) au-dessus de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K_∞. Et comme K^{lc} contient K_∞, le groupe $\mathcal{C}\ell_K$ n'est donc jamais fini.

La surjection de $\mathcal{J}_K$ dans le groupe $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K) \simeq \mathbb{Z}_\ell$ fournit alors un morphisme *degré* :

$$\deg_K : \mathcal{J}_K \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_\ell\,;$$

dont le noyau $\widetilde{\mathcal{J}}_K$ est, par construction, le sous-groupe normique de $\mathcal{J}_K$ attaché à K_∞. Le quotient

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \simeq \widetilde{\mathcal{J}}_K / \textstyle\prod_{\mathfrak{p}} \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_K \simeq \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{lc}}/K_\infty)$$

est ainsi le *sous-groupe des classes logarithmiques de degré nul*, qui est l'objet de cette note.

En particulier, le sous-module de torsion $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\,\mathrm{tor}}$ de $\mathcal{C}\ell_K$ est contenu dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$. Et la *Conjecture de Gross-Kuz'min* (pour le corps K et le premier ℓ), qui revient à postuler la finitude de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$, affirme l'égalité $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\,\mathrm{tor}} = \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$. Vérifiée en particulier lorsque K est abélien en vertu du résultat de Baker-Brumer (cf. e.g. [5, 6, 10]), c'est, comme expliqué dans [9], une conséquence d'une conjecture plus générale d'indépendance ℓ-adique de nombres algébriques, qui résulte elle-même de la conjecture de Schanuel ℓ-adique.

Inconditionnellement, en revanche, nous avons donc :

$$\mathcal{C}\ell_K \simeq \mathbb{Z}_\ell^{\,1+\delta_K} \oplus \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\,\mathrm{tor}},$$

où δ_K mesure le défaut de la conjecture de Gross-Kuz'min dans K relativement au premier ℓ.

Définition 1. *Étant donnés un corps de nombres K et un nombre premier ℓ, notons $\ell^{\widetilde{e}_K}$ l'exposant du sous-groupe de torsion $\mathcal{C}\ell_K^{\mathrm{tor}}$ du pro-ℓ-groupe $\mathcal{C}\ell_K$ des classes logarithmiques (de degré arbitraire). Nous disons que l'extension abélienne d'exposant $\ell^{\widetilde{e}_K}$ logarithmiquement non-ramifiée $\widetilde{H}_K$ fixée par le sous-groupe $\mathcal{J}_K^{\ell^{\widetilde{e}_K}} \widetilde{\mathcal{U}}_K \mathcal{R}_K$ de $\mathcal{J}_K$ est le ℓ-corps de classes logarithmiques normalisé de K.*

Le corps $\widetilde{H}_K$ est donc, par construction, la plus grande ℓ-extension abélienne de K qui est d'exposant $\ell^{\widetilde{e}_K}$ et logarithmiquement non-ramifiée.

Nota. La conjecture de Gross-Kuz'min pour K postule de façon équivalente $\delta_K = 0$ et $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\,\mathrm{tor}} = \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$.

3 Preuve sous la conjecture de Gross-Kuz'min

Partons d'un corps de nombre arbitraire K, notons $L = \widetilde{H}_K$ son ℓ-corps de classes logarithmiques normalisé, puis $M = \widetilde{H}_L$ celui de L.

Faisons l'hypothèse dans cette section que le corps L satisfait la conjecture de Gross-Kuz'min (pour le premier ℓ), autrement dit que L possède une unique $\mathbb{Z}_\ell$-extension localement cyclotomique, à savoir sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique L_∞, de sorte qu'il en est de même pour son sous-corps K.

Écrivons $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$; de même $\Gamma_L = \mathrm{Gal}(L_\infty/L)$; et, pour chaque entier naturel n, notons K_n l'unique sous-extension de degré ℓ^n de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K_∞ de K et L_n celle de L_∞. Soit enfin $\ell^{\widetilde{e}_K}$ l'exposant de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \simeq \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{lc}}/K_\infty)$ et $\ell^{\widetilde{e}_L}$ celui de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L \simeq \mathrm{Gal}(L^{\mathrm{lc}}/L_\infty)$.

Par construction, le corps $M = \widetilde{H}_L$ est une extension galoisienne logarithmiquement non-ramifiée de K. Soit donc $G = \mathrm{Gal}(M/K)$ son groupe de Galois et G' le groupe dérivé. Le sous-corps des points fixes de G' est ainsi la sous-extension maximale de $K^{\mathrm{lc}} = L_\infty$ qui est d'exposant $\ell^{\widetilde{e}_L}$ sur L : c'est $L_{\widetilde{e}_L}$. L'ensemble de cette discussion peut donc se résumer par le diagramme galoisien :

$$\begin{tikzcd}
K_\infty \arrow[r, dash, "\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K"] & K^{\mathrm{lc}} = L_\infty \arrow[r, dash, "\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L"] & L^{\mathrm{lc}} = M_\infty \arrow[d, dash, "\Gamma_M"'] \\
K_{\widetilde{e}_K+\widetilde{e}_L} \arrow[u, dash] \arrow[r, dash] & L_{\widetilde{e}_L} \arrow[u, dash] \arrow[r, dash, "G'"] & M = \widetilde{H}_L \\
K_{\widetilde{e}_K} \arrow[u, dash] \arrow[r, dash] & L = \widetilde{H}_K \arrow[u, dash] \arrow[uu, dash, dotted, bend left, "\Gamma_L"] & \\
K \arrow[u, dash] \arrow[uuu, dash, dotted, bend left, "\Gamma_K"] \arrow[uurr, dash, dotted, bend right, "G"'] & &
\end{tikzcd}$$

Interprétons cela en termes idéliques. Par la théorie du corps de classes, le sous-groupe d'idèles de $\mathcal{J}_K$ qui fixe $L_{\widetilde{e}_L} = LK_{\widetilde{e}_K+\widetilde{e}_L}$ est l'intersection :

$$\mathcal{J}_K^{\ell^{\widetilde{e}_K}}\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K \cap \mathcal{J}_K^{\ell^{\widetilde{e}_K+\widetilde{e}_L}}\widetilde{\mathcal{J}}_K = \mathcal{J}_K^{\ell^{\widetilde{e}_K+\widetilde{e}_L}}(\mathcal{J}_K^{\ell^{\widetilde{e}_K}}\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K \cap \widetilde{\mathcal{J}}_K) = \mathcal{J}_K^{\ell^{\widetilde{e}_K+\widetilde{e}_L}}\widetilde{\mathcal{J}}_K^{\ell^{\widetilde{e}_K}}\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K.$$

Et comme $\ell^{\widetilde{e}_K}$ annule $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \simeq \widetilde{\mathcal{J}}_K/\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K$, c'est donc tout simplement : $\mathcal{J}_K^{\ell^{\widetilde{e}_K+\widetilde{e}_L}}\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K$. Il suit :

$$G/G' = \mathrm{Gal}(L_{\widetilde{e}_L}/K) \simeq \mathcal{J}_K/\mathcal{J}_K^{\ell^{\widetilde{e}_K+\widetilde{e}_L}}\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K.$$

Par ailleurs, le groupe G' est donné directement comme groupe de classes d'idèles de L par :

$$G' = \mathrm{Gal}(M/L_{\widetilde{e}_L}) \simeq \mathcal{J}_L^{\ell^{\widetilde{e}_L}}\widetilde{\mathcal{J}}_L/\mathcal{J}_L^{\ell^{\widetilde{e}_L}}\widetilde{\mathcal{U}}_L\mathcal{R}_L.$$

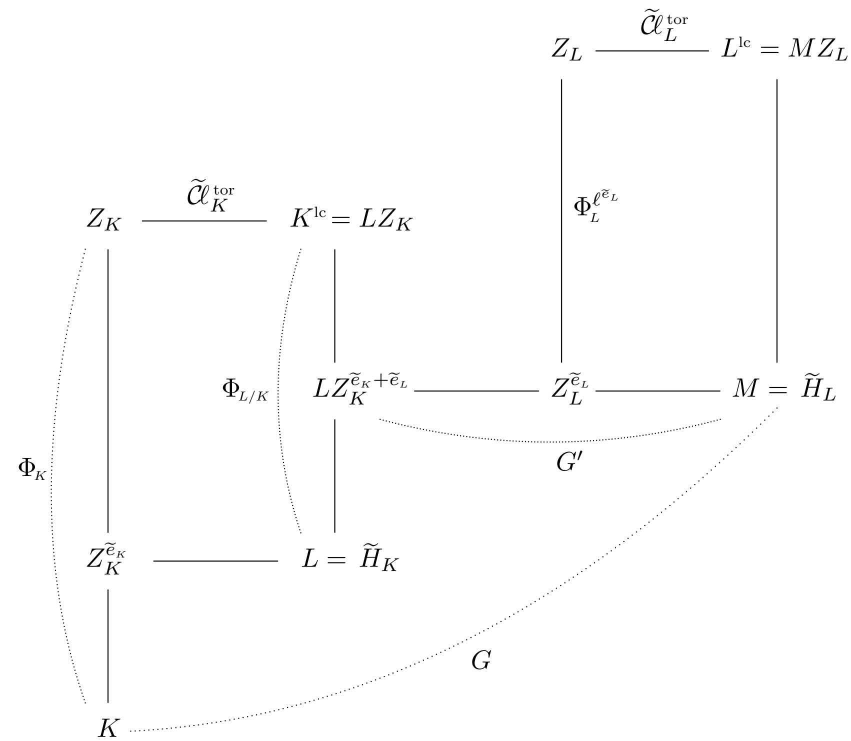
Cela étant, la trivialité du transfert $G/G' \to G'$ donnée par la théorie des groupes et transportée par le corps de classes nous dit que le morphisme d'extension $j_{L/K}$ envoie le groupe $\mathcal{J}_K$ dans le sous-groupe $\mathcal{J}_L^{\ell^{\widetilde{e}_L}}\widetilde{\mathcal{U}}_L\mathcal{R}_L$ de $\mathcal{J}_L$, donc son sous-groupe de degré nul $\widetilde{\mathcal{J}}_K$ dans $\mathcal{J}_L^{\ell^{\widetilde{e}_L}}\widetilde{\mathcal{U}}_L\mathcal{R}_L \cap \widetilde{\mathcal{J}}_L$, i.e. dans $\widetilde{\mathcal{J}}_L^{\ell^{\widetilde{e}_L}}\widetilde{\mathcal{U}}_L\mathcal{R}_L = \widetilde{\mathcal{U}}_L\mathcal{R}_L$, puisque $\ell^{\widetilde{e}_L}$ annule $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L \simeq \widetilde{\mathcal{J}}_L/\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_L$ par définition de $\widetilde{e}_L$. Ainsi :

Théorème 2. *Sous la conjecture de Gross-Kuz'min dans $L = \widetilde{H}_K$, le ℓ-groupe fini $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ des classes logarithmiques (de degré nul) de K capitule dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$.*

4 Preuve inconditionnelle du Théorème principal

Venons-en maintenant au cas général formellement identique mais techniquement plus délicat : notons Z_K le compositum des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de K contenues dans K^{lc} et Z_L son analogue pour L ; puis $\mathcal{Z}_K$ le sous-groupe d'idèles de $\mathcal{J}_K$ correspondant à Z_K, i.e. le noyau du morphisme $\mathcal{J}_K \to \Phi_K = \mathrm{Gal}(Z_K/K) \simeq {\mathbb{Z}_\ell}^{1+\delta_K}$ donné par le corps de classes et $\mathcal{Z}_L$ son analogue pour L, qu'il convient ici de distinguer de $\mathcal{Z}_{L/K} = \mathrm{Ker}(\mathcal{J}_L \to \Phi_{L/K} = \mathrm{Gal}(LZ_K/L) \simeq \ell^{\widetilde{e}_K}{\mathbb{Z}_\ell}^{1+\delta_K})$.

Observons que le morphisme d'extension $j_{L/K}$ envoie donc $\mathcal{Z}_K = \sqrt{\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K}$ dans $\mathcal{Z}_L = \sqrt{\widetilde{\mathcal{U}}_L\mathcal{R}_L}$. Désignons enfin par Z_K^n la sous-extension maximale d'exposant ℓ^n de Z_K et par Z_L^n celle de Z_L. Partant de K, posant $L = \widetilde{H}_K$ puis $M = \widetilde{H}_L$ et $G = \mathrm{Gal}(M/K)$, nous obtenons le diagramme :



Reprenons dans ce nouveau cadre les calculs précédents : le groupe d'idèles de K qui fixe le compositum $LZ_K^{\widetilde{e}_K+\widetilde{e}_L}$ est l'intersection de $\mathcal{J}_K^{\ell^{\widetilde{e}_K+\widetilde{e}_L}}\mathcal{Z}_K$ qui fixe $Z_K^{\widetilde{e}_K+\widetilde{e}_L}$ et de $\mathcal{J}_K^{\ell^{\widetilde{e}_K}}\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K$ qui fixe L. D'où :

$$G/G' = \mathrm{Gal}(LZ_K^{\widetilde{e}_K+\widetilde{e}_L}/K) \simeq \mathcal{J}_K/\mathcal{J}_K^{\ell^{\widetilde{e}_K+\widetilde{e}_L}}(\mathcal{Z}_K \cap \mathcal{J}_K^{\ell^{\widetilde{e}_K}}\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K) = \mathcal{J}_K/\mathcal{J}_K^{\ell^{\widetilde{e}_K+\widetilde{e}_L}}\mathcal{Z}_K^{\ell^{\widetilde{e}_K}}\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K$$

i.e.

$$G/G' \simeq \mathcal{J}_K/\mathcal{J}_K^{\ell^{\widetilde{e}_K+\widetilde{e}_L}}\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K,$$

puisque l'on a $\mathcal{Z}_K^{\ell^{\widetilde{e}_K}} \subset \widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K$ par définition de $\widetilde{e}_K$. Par ailleurs, il vient directement :

$$G' = \mathrm{Gal}(M/LZ_K^{\widetilde{e}_K+\widetilde{e}_L}) \simeq \mathcal{J}_L^{\ell^{\widetilde{e}_L}}\mathcal{Z}_{L/K}/\mathcal{J}_L^{\ell^{\widetilde{e}_L}}\widetilde{\mathcal{U}}_L\mathcal{R}_L.$$

Cela étant, toujours du fait de la trivialité du transfert $G/G' \to G'$, on conclut que le morphisme d'extension $j_{L/K}$ envoie le groupe d'idèles $\mathcal{J}_K$ dans le sous-groupe $\mathcal{J}_L^{\ell^{\widetilde{e}_L}}\widetilde{\mathcal{U}}_L\mathcal{R}_L$ de $\mathcal{J}_l$; et, par conséquent $\mathcal{Z}_K$ dans $\mathcal{Z}_L \cap \mathcal{J}_L^{\ell^{\widetilde{e}_K}}\widetilde{\mathcal{U}}_L\mathcal{R}_L = \mathcal{Z}_L^{\ell^{\widetilde{e}_L}}\widetilde{\mathcal{U}}_L\mathcal{R}_L$; et finalement dans $\widetilde{\mathcal{U}}_L\mathcal{R}_L$, puisque l'on a $\mathcal{Z}_L^{\ell^{\widetilde{e}_L}} \subset \widetilde{\mathcal{U}}_L\mathcal{R}_L$ par définition de $\widetilde{e}_L$.

Il suit, comme précédemment, que $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathrm{tor}} = \mathcal{Z}_K/\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K$ capitule dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^{\mathrm{tor}} = \mathcal{Z}_L/\widetilde{\mathcal{U}}_L\mathcal{R}_L$:

Théorème 3. *Indépendamment de la conjecture de Gross-Kuz'min,, le ℓ-sous-groupe de torsion $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathrm{tor}}$ du pro-ℓ-groupe des classes logarithmiques de K capitule dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^{\mathrm{tor}}$ pour $L = \widetilde{H}_K$.*

Remarque. Si K est un corps de nombres totalement réel qui vérifie la conjecture de Leopoldt (par exemple un corps abélien réel), il est bien connu qu'il satisfait aussi la conjecture de Gross-Kuz'min. Et, dans ce cadre, comme établi dans [13, 18], la conjecture de Greenberg [6] revient à postuler que le ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ capitule à un niveau fini K_n de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $K^c = K_\infty$. Le Théorème principal de cette note prouve qu'il capitule à un niveau fini de la pro-ℓ-extension *localement* cyclotomique K^{lc}.

Addendum. Sous la conjecture de Gross-Kuz'min, il est construit dans [16] et étudié dans [14, 15], pour tout corps de nombres K, une ℓ-tour localement cyclotomique naturelle en prenant $K_1 = \widetilde{H}_K$ puis en itérant le procédé en posant $K_{n+1} = \widetilde{H}_{K_n}$ pour $n \geq 1$. La définition de $\widetilde{H}_K$ donnée dans la présente note permet de construire une telle tour de façon inconditionnelle. Les tours indéfinies au sens de [16] apparaissent alors comme une catégorie particulière (conjecturalement vide) des tours finies ou infinies ainsi obtenues, suivant que le procédé fait apparaître ou non un étage fini K_n ayant un groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_n}^{\mathrm{tor}}$ trivial.

Références

[1] E. Artin, *Idealklassen in Oberkörpern und allgemeine Rezprozitätsgesetz*, Abh. Math. Sem. Hamburg **7** (1930).

[2] E. Artin, J. Tate ; *Class Field Theory*, Addison-Wesley (1968).

[3] K. Belabas, J.-F. Jaulent, *The logarithmic class group package in PARI/GP*, Pub. Math. Besançon (2016).

[4] P. Furtwängler, *Beweis des Hauptidealsatzes für die Klassenkörper algebraischer Zahlkörper*, Abh. Math. Sem. Hamburg **7** (1930).

[5] G. Gras, *Class Field Theory : From Theory To Practice*, Springer-Verlag, 2003.

[6] R. Greenberg, *On a certain ℓ-adic representation*, Inv. Math. **21** (1973) 117–124.

[7] B. Gross, *p-adic L-series at $s = 0$*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA **28** (1981), 979-994.

[8] D. Hilbert *T*héorie des corps de nombres algébriques, Ann. Fac. Sci. Toulouse **2** (1910), 225–456.

[9] J.-F. Jaulent, *Sur l'indépendance ℓ-adique de nombres algébriques*, J. Numb. Th. **20** (1985), 149–158 .

[10] J.-F Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1994), 301–325.

[11] J.-F. Jaulent, *Théorie ℓ-adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.

[12] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques et capitulation*, Functiones et Approximatio **54** (2016), 227–239.

[13] J.-F. Jaulent, *Note sur la conjecture de Greenberg*, J. Ramanujan Math. Soc. **34** (2019) 5–80.

[14] J.-F. Jaulent, C. Maire, *A propos de la tour localement cyclotomique d'un corps de nombres,* Abh. Math. Sem Hamburg **70** (2000), 239–250.

[15] J.-F. Jaulent, C. Maire, *Radical hilbertien et tour localement cyclotomique,* Japan J. Math. **28** (2002), 203–213.

[16] J.-F Jaulent, F. Soriano, *Sur les tours localement cyclotomiques,* Archiv der Math. **73** (1999), 132–140.

[17] L. V. Kuz'min, *The Tate module for algebraic number fields*, Math. USSR Izv. **36** (1972), 267-327.

[18] T. Nguyen Quang Do, *Formule des genres et conjecture de Greenberg*, Annales Math. Québec **42** (2018), 267–280.

Adresse : Univ. Bordeaux & CNRS,
Institut de Mathématiques de Bordeaux,
351 Cours de la Libération,
F-33405 Talence cedex

Courriel : jean-francois.jaulent@math.u-bordeaux.fr