Sur le noyau sauvage des corps de nombres et le groupe des classes logarithmiques*

Jean-François JAULENT et Florence SORIANO

Abstract. We study the ℓ-part of the wild kernel of a number field for odd prime in connection with the arithmetic of logarithmic ℓ-class groups and we characterize the propagation of the triviality of wild kernel in a Galois ℓ-extension of totally real fields in terms of logarithmic ramification.

Résumé. Nous étudions la ℓ-partie du noyau sauvage d'un corps de nombres en liaison avec l'arithmétique des classes logarithmiques, pour les premiers impairs ℓ. En particulier nous caractérisons entièrement la propagation de la trivialité du ℓ-noyau sauvage dans une ℓ-extension de corps totalement réels en termes de ramification logarithmique.

Introduction.

Etant donnés un nombre premier ℓ et K un corps de nombres quelconque, notre propos dans cet article est d'étudier la ℓ-partie du noyau sauvage $H_2(K)$ de la K-théorie attaché au corps K, à partir d'invariants arithmétiques effectifs sinon de K lui même, du moins de son extension $K' = K\,[\zeta]$ engendrée par les racines ℓ-ièmes de l'unité.

On sait, en effet, qu'en présence des racines ℓ^r-ièmes de l'unité, il existe un isomorphisme canonique entre le quotient de ℓ^r-torsion ${}^{\ell^r}H_{K'} = H_2(K')/H_2(K')^{\ell^r}$ du noyau sauvage et un tensorisé convenable du ℓ-groupe des classes logarithmiques du corps considéré ; ce que nous écrivons :

$$(\star) \qquad {}^{\ell^r}H_{K'} \;=\; \mu_{\ell^r} \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K'}.$$

Ce résultat, qui peut s'établir par plusieurs voies (kummérienne, idélique, cohomologique, ou logarithmique), est naturellement susceptible de plusieurs formulations. La plus ancienne est, semble-t-il, celle de [J$_0$] (cf. Ch. I, sect. 2) reprise dans [J$_1$] (cf. th. 2.12), où il est obtenu par descente kummérienne dans la $\mathbb{Z}_\ell$-tour cyclotomique ; une formulation idélique indépendante est exposée dans [CK] (mais sous une forme qui ne rend pas compte de l'action galoisienne) puis généralisée dans [Ko] à l'aide de la théorie d'Iwasawa (cf. th. 2.7) ; une approche différente faisant intervenir les quotients des genres pour les groupes de ℓ-classes d'idéaux est proposée dans [Ke] (cf. th. 6.6). Une preuve "élémentaire" (mais qui utilise tout de même les résultats de Tate, donc le théorème de finitude de Garland) est donnée dans [J_3]. Et bien entendu, on peut l'énoncer en termes cohomologiques, en liaison avec la K-théorie supérieure.

*Math. Z. **238** (2001), 335–354.

Nous avons choisi, dans cet article, l'approche logarithmique parce que le groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K'}$ nous paraît l'invariant arithmétique le plus simple qui permette d'atteindre le noyau sauvage de la K-théorie : les groupes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}$ ont, en effet, un comportement particulièrement proche de celui des ℓ-groupes de classes d'idéaux au sens habituel (ainsi qu'il appert de [J$_4$] et [JS]) ; leur arithmétique est de ce fait totalement effective (comme il ressort des algorithmes développés dans [DS]) ; et leur emploi conduit enfin à des résultats remarquablement simples (le lecteur pourra, par exemple, s'en convaincre en comparant l'expression du 3-rang pour les noyaux modérés des corps quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ou $\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})$ donnée dans [Br] avec la formule correspondante pour les noyaux sauvages présentée dans la proposition 2).

Pour faciliter la lecture à ceux à qui les classes logarithmiques ne seraient pas familières, nous rappelons brièvement dans la première section les définitions de base sur les valuations logarithmiques et les classes de diviseurs qui leur correspondent. De façon semblable, quoique la machinerie des algèbres semi-simples inhérente à la théorie de Kummer soit relativement standard, nous en détaillons ci-après quelques uns des principaux aspects.

1. Rappels et notations

a. Le contexte galoisien

Nous nous plaçons ici dans la situation galoisienne suivante : le nombre premier ℓ supposé impair étant fixé, nous désignons par K un corps de nombres arbitraire et par K' une extension abélienne de K, de groupe de Galois $\Delta = \mathrm{Gal}(K'/K)$ d'ordre d étranger à ℓ, et contenant une racine primitive ℓ-ième de l'unité ζ. Sous l'hypothèse $\ell \nmid d$, l'algèbre résiduelle $\mathbb{F}_\ell\,[\Delta]$ est une algèbre semi-simple, produit direct d'extensions F_φ de $\mathbb{F}_\ell$, l'algèbre ℓ-adique $\mathbb{Z}_\ell\,[\Delta]$ une algèbre semi-locale, produit direct d'extensions non ramifiées Z_φ de $\mathbb{Z}_\ell$; et les idempotents primitifs $\bar{e}_\varphi$ (respectivement e_φ) correspondant aux décompositions

$$\mathbb{F}_\ell\,[\Delta] = \oplus_\varphi \mathbb{F}_\ell\,[\Delta]\bar{e}_\varphi = \oplus_\varphi F_\varphi \qquad \& \qquad \mathbb{Z}_\ell\,[\Delta] = \oplus_\varphi \mathbb{Z}_\ell\,[\Delta]e_\varphi = \oplus_\varphi Z_\varphi$$

sont donnés à partir des caractères ℓ-adiques irréductibles φ de Δ par la formule classique

$$e_\varphi = \frac{1}{d}\sum_{\tau\in\Delta}\varphi(\tau^{-1})\tau \qquad \text{et sa réduction modulo } \ell.$$

Parmi les caractères de Δ figurent en particulier le *caractère unité* 1, dont l'idempotent associé est donné à partir de la norme algébrique $\nu_\Delta = \sum_{\tau\in\Delta}\tau$ par $e_1 = \frac{1}{d}\nu_\Delta$, et le *caractère cyclotomique* ω caractérisé par l'identité :

$$\zeta^\tau = \zeta^{\omega(\tau)} \quad \forall\,\tau \in \Delta.$$

L'inverse $\bar{\omega} = \omega^{-1}$ de ω, c'est à dire le caractère défini par $\omega(\tau) = \omega(\tau^{-1})$, est dit souvent *anticyclotomique*, et l'involution $\psi \mapsto \psi^* = \omega\psi^{-1}$ (où ψ^{-1} est le caractère $\tau \mapsto \psi(\tau^{-1})$) de l'algèbre $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$ des caractères ℓ-adiques virtuels de Δ est connue traditionnellement sous le nom d'*involution du miroir* ; on dit encore que ψ^* est le $reflet$ de ψ.

Tous les $\mathbb{Z}_\ell\ [\Delta]$-modules que nous sommes amenés à considérer plus loin proviennent de $\mathbb{Z}_\ell$-modules galoisiens, disons X_F, fonctoriellement attachés à un corps de nombres F contenu dans K'. Il existe donc des applications naturelles de transition, la norme arithmétique $N_{K'/F}$ (ou restriction) et le morphisme d'extension $j_{K'/F}$ (ou corestriction) entre X_F et $X_{K'}$, qui vérifient les identités :

$$N_{K'/F}\ \cdot\ j_{K'/F} =\ [K':F] \qquad \& \qquad j_{K'/F}\ \cdot\ N_{K'/F} = \nu_H = \sum_{\tau \in H} \tau,$$

où ν_H est la norme algébrique attachée au sous-groupe H qui fixe F. En particulier, l'ordre $h =\ [K' : F]$ de H étant inversible dans $\mathbb{Z}_\ell$, il en résulte que le module X_F associé à F s'identifie canoniquement à l'image $X_{K'}^{e_H}$ de celui $X_{K'}$ attaché à K' par l'idempotent $e_H = \frac{1}{h}\nu_H = \sum_{\varphi \in R^{irr}_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta/H)} e_\varphi$, propriété que nous utilisons systématiquement dans ce qui suit.

b. Le groupe des classes logarithmiques

Pour chaque corps de nombres F, notons $\mathcal{J}_F$ le *ℓ-adifié du groupe des idèles de* F, i.e. le produit restreint

$$\mathcal{J}_F\ =\ \prod_{\mathfrak{p}}^{res} \mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$$

des compactifiés ℓ-adiques $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}\ =\ \varprojlim F_\mathfrak{p}^\times / F_\mathfrak{p}^{\times\,\ell^n}$ des groupes multiplicatifs des complétés de F. Pour chaque place finie $\mathfrak{p}$ le sous-groupe $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$ formé des normes cyclotomiques (i.e. des éléments de $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$ qui sont normes à chaque étage fini de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique locale $F_\mathfrak{p}^c/F_\mathfrak{p}$) est par convention le groupe des *unités logarithmiques* de $F_\mathfrak{p}$ et le produit

$$\widetilde{\mathcal{U}}_F\ =\ \prod\nolimits_\mathfrak{p} \widetilde{\mathcal{U}}_{F_\mathfrak{p}}$$

est le groupe des *unités logarithmiques idéliques*, car c'est le noyau des valuations logarithmiques

$$\widetilde{v}_\mathfrak{p}\ |\ x\ \mapsto\ -\frac{\operatorname{Log}|x|_\mathfrak{p}}{\deg\,\mathfrak{p}}$$

respectivement définies sur les $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$ et à valeurs dans $\mathbb{Z}_\ell$ obtenues en prenant le logarithme d' Iwasawa de la norme x dans l'extension locale $F_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_p$ corrigé par un facteur de normalisation deg $\mathfrak{p}$ dont l'expression exacte est sans importance ici. Le quotient

$$\mathcal{D}_F\ =\ \mathcal{J}_F/\widetilde{\mathcal{U}}_F$$

est par définition, le ℓ-groupe des *diviseurs logarithmiques* de F ; il s'identifie, via les valuations logarithmiques $\widetilde{v}_\mathfrak{p}$, au $\mathbb{Z}_\ell$-module libre

$$\mathcal{D}_F\ =\ \oplus_\mathfrak{p}\mathbb{Z}_\ell\mathfrak{p}$$

construit sur les places finies de F. On définit alors le *degré* d'un diviseur logarithmique $\mathfrak{d} = \sum_\mathfrak{p} \mathfrak{n}_\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}$ par la formule

$$\deg\,(\sum_\mathfrak{p} n_\mathfrak{p}\,\mathfrak{p})\ =\ \sum_\mathfrak{p} \mathfrak{n}_\mathfrak{p} \deg\,\mathfrak{p},$$

et l'on note $\widetilde{\mathcal{D}}_F \;=\; \{\, \mathfrak{d} \in \mathcal{D}_F \mid \deg \mathfrak{d} \;=\; 0 \,\}$ le sous-groupe des *diviseurs logarithmiques de degré nul.* L'image dans $\mathcal{D}_F$ du sous-groupe des idèles principaux

$$\mathcal{R}_F \;=\; \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times$$

de $\mathcal{J}_F$ est alors un sous-groupe de $\widetilde{\mathcal{D}}_F$ dit sous-groupe des *diviseurs logarithmiques principaux* ; et le quotient (fini sous la conjecture de Gross généralisée)

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \;=\; \widetilde{\mathcal{D}}_F / \widetilde{\mathcal{P}}_F$$

est, par définition, le *ℓ-groupe des classes logarithmiques* du corps F. Le noyau

$$\widetilde{\mathcal{E}}_F \;=\; \mathcal{R}_F \cap \widetilde{\mathcal{U}}_F$$

du morphisme $\widetilde{\mathrm{div}}$ de $\mathcal{R}_F$ dans $\widetilde{\mathcal{D}}_F$ est, lui, le groupe des *unités logarithmiques* (globales) du corps F.

2. L'isomorphisme fondamental

Notre point de départ est l'isomorphisme canonique de modules galoisiens établi dans [J$_1$] qui relie le noyau sauvage (ou hilbertien) au groupe des classes logarithmiques. Commençons donc par l'énoncer avec précision dans le cadre galoisien qui nous intéresse ici :

Théorème 1. *Soit K un corps de nombres et ℓ un nombre premier impair. Si K' est une extension abélienne de K de groupe de Galois Δ d'ordre d étranger à ℓ, contenant les racines ℓ^r-ièmes de l'unité pour un $r \geq 1$, et satisfaisant la conjecture de* Gross *généralisée (i.e. telle que le ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K'}$ des classes logarithmiques soit fini), il existe un isomorphisme canonique de $\mathbb{Z}_\ell\,[\Delta]$-modules*

$$(\star) \qquad {}^{\ell^r}H_{K'} \;= \simeq \mu_{\ell^r} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K'}$$

entre le quotient d'exposant ℓ^r du noyau sauvage dans $K_2(K')$ et le tensorisé par μ_{ℓ^r} du ℓ-groupe des classes logarithmiques de K'.

Pour chaque caractère ℓ-adique ϕ de Δ contenu dans le caractère régulier $\chi_{rég}$, convenons de noter M_ϕ la ϕ-composante d'un $\mathbb{Z}_\ell\,[\Delta]$-module M, c'est à dire l'image M^{e_ϕ} de M par l'idempotent $e_\phi \;=\; \frac{1}{d}\sum_{d\in\Delta}\phi(\tau^{-1})\tau$ attaché à ϕ. Ecrivons de même H_ϕ pour $H_{K'}^{e_\phi}$, puis $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_\phi$ pour $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K'}^{e_\phi}$, etc. Nous obtenons :

Corollaire 2. *Pour chaque idempotent e_ϕ de l'algèbre de Galois $\mathbb{Z}_\ell\,[\Delta]$, il existe un isomorphisme de $Z_\phi \;=\; Z_{\bar\omega\phi}$-modules*

$$(\star\star) \qquad {}^{\ell^r}H_{\bar\omega\phi} \;\simeq\; {}^{\ell^r}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_\phi$$

entre la $\bar\omega\phi$ composante du quotient d'exposant ℓ^r du ℓ-noyau hilbertien $H_{K'}$ et la ϕ-composante du quotient d'exposant ℓ^r du ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K'}$.

Remarques 1. *(i)* Nous avons noté Z_ϕ dans le corollaire la ϕ-composante de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell\,[\Delta]$ (conformément aux conventions ci-dessus), c'est à dire le compositum des anneaux Z_φ pour les φ irréductibles divisant ϕ. Le caractère cyclotomique ω étant de degré 1, nous avons naturellement $Z_{\omega\varphi} = Z_\varphi$ pour tout φ irréductible, donc $Z_\phi = Z_{\omega\varphi} = Z_{\bar\omega\phi}$.

(ii) Un isomorphisme de Z_φ-modules n'est pas *seulement* un isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell$-modules : par exemple, pour $r = 1$, si $f_\varphi = [F_\varphi : \mathbb{F}_\ell] = [Z_\varphi : \mathbb{Z}_\ell]$ est le degré du caractère (irréductible) φ, si les φ-composantes ${}^{\ell^r}H_{\bar\omega\varphi}$ et ${}^{\ell^r}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_\varphi$ sont des F_φ-espaces de dimension d_φ, ce sont en particulier des $\mathbb{F}_\ell$-espaces de dimension $d_\varphi f_\varphi$.

Pour illustrer immédiatement l'intérêt de l'isomorphisme ci-dessus, nous allons regarder plus attentivement ce qui se passe dans la situation non triviale la plus simple : celle du miroir de Scholz (cf. [G r]). Prenons donc $\ell = 3$, $K = \mathbb{Q}$ et considérons un corps biquadratique $K' = \mathbb{Q}\,[\sqrt{-3}, \sqrt{d}]$ (avec $d \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$ sans facteur carré). Le groupe de Galois $\Delta = \mathrm{Gal}(K'/\mathbb{Q})$ est alors le Vierergrüppe de Klein $V_4 = C_2 \times C_2$. Il possède exactement quatre caractères 3-adiques irréductibles : le caractère unité 1, le caractère cyclotomique ω (dont le noyau $\mathrm{Ker}\,\omega$ fixe précisément le sous-corps cyclotomique $\mathbb{Q}\,[j] = \mathbb{Q}\,[\sqrt{-3}]$) et deux autres caractères de degré 1, l'un réel φ dont le noyau $\mathrm{Ker}\,\varphi$ fixe le sous-corps réel $\mathbb{Q}\,[\sqrt{d}]$, l'autre imaginaire $\varphi^\star = \omega\varphi = \bar\omega\varphi$ dont le noyau $\mathrm{Ker}\,\varphi^\star$ fixe le sous-corps imaginaire $k^\star = \mathbb{Q}\,[\sqrt{-3d}]$. Si donc τ désigne la conjugaison complexe et σ l'unique élément non trivial de Δ qui fixe le corps cyclotomique $\mathbb{Q}\,[j]$, les quatre idempotents primitifs de l'algèbre $\mathbb{Z}_3\,[\Delta]$ sont respectivement :

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{4}(1+\tau)(1+\sigma), \qquad e_\omega = \frac{1}{4}(1-\tau)(1+\sigma),\\ e_\varphi &= \frac{1}{4}(1+\tau)(1-\sigma) \ \text{ et } \ e_{\varphi^\star} = \frac{1}{4}(1-\tau)(1-\sigma)\ ; \end{aligned}$$

et les idempotents normiques associés aux trois sous-corps quadratiques $\mathbb{Q}\,[j]$, $k = \mathbb{Q}\,[\sqrt{d}]$ et $k^\star = \mathbb{Q}\,[\sqrt{-3d}]$ sont :

$$\frac{1}{2}(1+\sigma) = e_1 + e_\omega, \qquad \frac{1}{2}(1+\tau) = e_1 + e_\varphi, \qquad \frac{1}{2}(1+\sigma\tau) = e_1 + e_{\varphi^\star}.$$

Maintenant, le corps K' qui est abélien sur $\mathbb{Q}$ vérifie la conjecture de Gross (pour chaque premier ℓ) et son 3-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K'}$ est donc fini. Et puisque le sous-corps cyclotomique $\mathbb{Q}\,[j]$ est 3-régulier (au sens de [G J]), le sous-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\mathbb{Q}\,[j]}$ est trivial ; ce qui revient à dire que les seules composantes éventuellement non triviales de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K'}$ sont d'une part celle correspondant au caractère φ, qui coïncide donc avec $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_k$, et d'autre part celle correspondant au caractère $\varphi^\star$, qui coïncide, elle, avec le sous-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{k^\star}$. D'après le corollaire 2, la même conclusion vaut à réflexion près pour les noyaux sauvages et il vient donc :

Proposition 3. *Dans une extension biquadratique $K' = \mathbb{Q}\,[\sqrt{-3}, \sqrt{d}]$ du corps des rationnels, les seules composantes (éventuellement) non triviales du 3-groupe* *des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K'}$ et de la 3-partie $H_{K'}$ du noyau sauvage de la K-théorie sont celles correspondant au sous-corps quadratique $k = \mathbb{Q}\,[\sqrt{d}]$ et à son reflet $k^\star = \mathbb{Q}\,[\sqrt{-3d}]$, qui sont liées par les isomorphismes :*

$$^3H_k \simeq \mu_3 \otimes {}^3\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{k^\star} \qquad et \qquad {}^3H_{k^\star} \simeq \mu_3 \otimes {}^3\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{k}.$$

Les algorithmes développés dans [DS] pour déterminer le ℓ-rang du groupe des classes logarithmiques donnent ipso facto dans ce cas le 3-rang du noyau hilbertien du corps quadratique obtenu par réflexion dans le miroir.

Exemples. (i) Les dix plus petits discriminants de corps quadratiques réels dont la 3-partie du noyau hilbertien est non triviale, sont 29, 77, 85, 93, 105, 109, 113, 137, 141 et 168. Dans tous ces cas, le 3-rang du noyau hilbertien est 1.

(ii) Les dix plus grands discriminants de corps quadratiques imaginaires dont la 3-partie du noyau hilbertien est non triviale, sont les entiers -107, -331, -367, -419, -503, -643, -759, -771, -804 et -835. Là aussi, le 3-rang du noyau hilbertien est à chaque fois 1.

(iii) Le plus petit discriminant de corps quadratique réel dont la 3-partie du noyau hilbertien est bicyclique, est 1901.

(iv) Le plus grand discriminant de corps quadratique imaginaire dont la 3-partie du noyau hilbertien est bicyclique, est -34 603.

Revenons maintenant au cas général : on sait depuis Leopoldt que les ℓ-rangs des composantes isotypiques du ℓ-groupe des classes au sens ordinaire respectivement associées à un caractère φ et à son reflet $\varphi^\star = \omega\varphi^{-1}$ dans l'involution du miroir ne sont pas indépendantes ; c'est le classique Spiegelungssatz qui, dans la situation de Scholz évoquée ci-dessus, relie les 3-rangs respectifs des groupes de classes des corps quadratiques $\mathbb{Q}\,[\sqrt{d}]$ et $\mathbb{Q}\,[\sqrt{-3d}]$. Or, de semblables relations existent également pour les classes logarithmiques. Transportées par l'isomorphisme $(\star\star)$ du corollaire 2, elles conduisent alors à des identités reliant deux à deux les composantes isotypiques du ℓ-noyau hilbertien $H_{K'}$ dans une involution qui, du fait de la translation des caractères opérée par $(\star\star)$, n'est plus celle du miroir de Leopoldt $\phi \mapsto \phi^\star = \omega\phi^{-1}$ correspondant au caractère cyclotomique ω, mais l'involution " conjuguée" $\phi \mapsto \phi^* = \omega^{-1}\phi^{-1}$ correspondant au caractère anticyclotomique ω^{-1}, puisque la ϕ-composante ${}^{\ell^r}H_\phi$, isomorphe à ${}^{\ell^r}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\phi\omega}$, se trouve ainsi reliée à ${}^{\ell^r}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{(\phi\omega)^\star} = {}^{\ell^r}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\phi^{-1}}$ qui est, lui, isomorphe à la $\omega^{-1}\phi^{-1}$ composante ${}^{\ell^r}H_{\omega^{-1}\phi^{-1}}$.

Notre propos n'étant pas cependant de développer ici en toute généralité les théorèmes de réflexion pour les classes logarithmiques, donnons simplement ci-dessous l'analogue pour les noyaux sauvages du théorème de Leopoldt, que les travaux systématiques de [Gr] n'abordent pas. Plaçons nous pour cela dans le cas où l'extension abélienne K'/K admet une conjugaison complexe τ unique, c'est à dire lorque K' est une extension quadratique totalement imaginaire d'un sur-corps totalement réel de K. Désignons par $\Delta_\infty = \{1, \tau\}$ le sous-groupe de décomposition commun des places à l'infini de K, par $\chi_\infty = \mathrm{Ind}_{\Delta_\infty}^{\Delta} 1_{\Delta_\infty}$ l'induit à Δ du caractère de la représentation unité de Δ_∞ ; et convenons de dire qu'un caractère ℓ-adique ϕ de Δ est *réel* lorsque ses facteurs irréductibles sont contenus dans χ_∞, qu'il est *imaginaire* lorsqu'ils sont contenus dans le supplémentaire $\chi_{aug} = \chi_{rég} - \chi_\infty$ de χ_∞. Cela étant, nous avons :

Théorème 4 (Inégalité du miroir). *Conservons les hypothèses du théorème 1 et supposons K totalement réel et K' à conjugaison complexe (i.e. extension quadratique totalement imaginaire d'un sur-corps totalement réel de K). Alors, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible imaginaire ϕ du groupe Δ, on a les inégalités entre les F_φ-dimensions des composantes isotypiques du ℓ-noyau sauvage :*

$$(\star\star\star)\ 0 \leq \dim_{F_\varphi} {}^{\ell}H_{\omega^{-1}\varphi^{-1}} - \dim_{F_\varphi} {}^{\ell}H_\varphi = \dim_{F_\varphi} {}^{\ell}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\varphi^{-1}} - \dim_{F_\varphi} {}^{\ell}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\omega\varphi} \leq\ [K:\mathbb{Q}].$$

Corollaire 5 (cas cyclotomique). *Prenons $K = \mathbb{Q}$ et $K' = \mathbb{Q}\,[\zeta_\ell]$. Le corps cyclotomique K' vérifie alors trivialement la conjecture de Gross (tout simplement parce qu'il n'a qu'une seule place ℓ-adique) et les caractères ℓ-adiques irréductibles du groupe $\Delta = \mathrm{Gal}(K'/K)$ sont de dimension 1. Pour chaque caractère ℓ-adique irréductible réel de Δ, on a donc l'inégalité entre ℓ-rangs :*

$$0 \leq \mathrm{rg}_\ell\, {}^{\ell}H_{\omega^{-1}\varphi^{-1}} - \mathrm{rg}_\ell\, {}^{\ell}H_\varphi \leq 1.$$

Corollaire 6 (cas de Scholz). *Prenons $K = \mathbb{Q}$ et $K' = \mathbb{Q}\,[\sqrt{d}, \sqrt{-3}]$. Notons $k = \mathbb{Q}\,[\sqrt{d}]$ le sous-corps réel maximal de K' et $k^\star = \mathbb{Q}\,[\sqrt{-3d}]$ son reflet. Il vient alors :*

$$0 \leq \mathrm{rg}_3\, {}^{3}H_k - \mathrm{rg}_3\, {}^{3}H_{k^\star} \leq 1.$$

Preuve du Théorème. Comme les relations classiques de réflexion, l'inégalité $(\star\star\star)$ s'obtient par comparaison entre les informations données par la théorie de Kummer d'une part, celle du corps de classes d'autre part. Partons de l'interprétation du groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ d'un corps de nombres arbitraire F comme groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F^{lc}/F^c)$ de la pro-ℓ-extension localement cyclotomique maximale F^{lc} de F relativement à sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique F^c. Supposons que F contienne les racines ℓ^k-ièmes de l'unité et considérons le radical kummérien .

$${}_{\ell^k}\widetilde{\mathfrak{Cl}}_F = \{\, \ell^{-k} \otimes x \in (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times | F^c\,[\sqrt[\ell^k]{x}] \subset F^{lc} \}$$

associé à la sous-extension d'exposant ℓ^k de F^{lc}/F^c.

La théorie de Kummer nous donne d'un côté l'isomorphisme galoisien

$${}_{\ell^k}\widetilde{\mathfrak{Cl}}_F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}({}^{\ell^k}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F, \mu_{\ell^k});$$

et, d'un autre côté, il est clair que toute ℓ-extension localement plongeable dans F^c est a fortiori plongeable localement dans le compositum F^z des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de F. Or le radical “initial” du compositum F^{bp} des ℓ-extensions cycliques de F qui sont localement $\mathbb{Z}_\ell$-plongeables est bien connu (cf., par exemple, [J1], §2.b, ou [J2], §4.) ; c'est le sous-groupe de ℓ^k-torsion ${}_{\ell^k}\mathfrak{H}_F$ du radical hilbertien

$$\mathfrak{H}_F = \{\, \ell^{-n} \otimes x \in (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times |\, x \in \widetilde{\mathcal{U}}_F \mathcal{J}_F^{\ell^n} \},$$

défini à partir du sous-groupe des unités logarithmiques $\widetilde{\mathcal{U}}_F$ du groupe des idèles $\mathcal{J}_F$. Et la suite courte de modules galoisiens, exacte et scindée sous la conjecture de Gross (cf. [J$_2$], th. 7)

$$1 \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{E}}_F = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{E}}_F \longrightarrow \mathfrak{H}_F \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \longrightarrow 1$$

identifie le sous-module divisible maximal $\mathfrak{H}_F^{div}$ de $\mathfrak{H}_F$ au tensorisé $\widetilde{\mathfrak{E}}_F$ par $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ du groupe des classes logarithmiques globales $\widetilde{\mathcal{E}}_F$ et le quotient correspondant $\mathfrak{H}_F/\mathfrak{H}_F^{div}$ au ℓ-groupe des classes logarithmiques. Il vient donc en fin de compte :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}({}^{\ell^k}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F, \mu_{\ell^k}) \hookrightarrow {}_{\ell^k}\mathfrak{H}_F \simeq {}_{\ell^k}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \oplus {}_{\ell^k}\widetilde{\mathfrak{E}}_F.$$

Appliquons maintenant ce résultat avec $F = K'$ et $k = 1$ sous les hypothèses du théorème. Le caractère du $\mathbb{Z}_\ell\,[\Delta]$-module $\widetilde{\mathfrak{E}}_F$ est bien connu (cf. [J$_4$], §th. 3.6) : le produit tensoriel par le module divisible $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ ayant tué les racines de l'unité, c'est tout simplement la somme des induits à Δ des caractères des représentations unités des sous-groupes de décomposition des places à l'infini de K, c'est à dire ici $[K:\mathbb{Q}]\chi_\infty$.

- Pour φ réel, il vient donc :

$$\begin{aligned}
\dim_{F_\varphi} {}^{\ell}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_\varphi &= \dim_{F_\varphi} \mathrm{Hom}({}^{\ell}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\varphi^\star}, \mu_\ell) \le \dim_{F_\varphi} {}_{\ell}\mathfrak{H}_{\varphi^\star} \\
\dim_{F_\varphi} {}^{\ell}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_\varphi &\le \dim_{F_\varphi} {}_{\ell}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\varphi^\star} + \dim_{F_\varphi} \widetilde{\mathfrak{E}}_{\varphi^\star} = \dim_{F_\varphi} {}^{\ell}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\varphi^\star},
\end{aligned}$$

  puisque $\varphi^\star$, qui est imaginaire, n'est pas représenté dans χ_∞ ;

- Pour φ imaginaire, nous avons en revanche :

$$\begin{aligned}
\dim_{F_\varphi} {}^{\ell}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_\varphi &= \dim_{F_\varphi} \mathrm{Hom}({}^{\ell}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\varphi^\star}, \mu_\ell) \le \dim_{F_\varphi} \mathfrak{H}_{\varphi^\star} \\
&= \dim_{F_\varphi} {}^{\ell}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\varphi^\star} + [K:\mathbb{Q}],
\end{aligned}$$

  puisque $\varphi^\star$, qui est alors réel, est représenté $[K:\mathbb{Q}]$ fois dans χ_∞. D'où, via $(\star\star)$, les inégalités annoncées.

Remarques 2. Le résultat obtenu appelle plusieurs commentaires :

(i) D'abord les inégalités $(\star\star\star)$ ci-dessus valent sous la conjecture de Gross et n'utilisent en rien celle de Leopoldt ; ce point est caractéristique de l'approche logarithmique retenue ici.

(ii) Dans le cas des noyaux modérés (i.e. des noyaux dans $K_2(K)$ des ℓ-symboles de Hilbert modérés) sont proposées dans [Gr] des inégalités du miroir pour l'involution $\phi \mapsto \omega^3\phi^{-1}$ associée au cube du caractère cyclotomique. Ces inégalités sont donc essentiellement distinctes (en général) de celles proposées ici pour les noyaux sauvages.

(iii) L'involution $\phi \mapsto \omega^{-1}\phi^{-1}$ coïncide avec le miroir de Leopoldt si et seulement si on a $\omega = \omega^{-1}$ i.e. $\omega^2 = 1$, autrement dit lorsque les racines ℓ-ièmes de l'unité sont contenus dans une extension au plus quadratique de K. Elle coïncide alors également avec le miroir de Gras. C'est en particulier le cas dans la situation de Scholz.

(iv) Pour obtenir des égalités (et non seulement des inégalités), il faut accepter (à l'instar de [Gr]) de considérer des ℓ-groupes $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_T^S$ des S-classes logarithmiques T-infinitésimales pour deux ensembles finis de places de K dont la réunion contient les places ℓ-adiques, et donc aussi des noyaux sauvages modifiés H_T^S.

Théorème 7. *Désignons par ℓ^{s_ϕ} l'exposant supposé fini de la ϕ-composante du ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K'}$.*

(i) Si K' contient les racines $\ell^{s_\phi+1}$ -ièmes de l'unité, la $\bar\omega\phi$-composante du ℓ-noyau hilbertien $H_{K'}$ est encore d'exposant ℓ^{s_ϕ}, et on a l'isomorphisme canonique

$$H_{\bar\omega\phi} \simeq \widetilde{\mathcal{C}\ell}_\phi.$$

(ii) Si K' contient seulement les racines ℓ^{s_ϕ} -ièmes de l'unité, la même conclusion vaut encore sous réserve d'injectivité de la restriction aux $\bar\omega\phi$-composantes du morphisme naturel de $H_{K'}$ dans $H_{N'}$ associé à l'extension cyclotomique $N' = K'\ [\zeta_{\ell^{s_\phi+1}}]$, condition qui est automatiquement remplie pour les caractères ℓ-adiques imaginaires ϕ lorsque K' est une extension quadratique totalement imaginaire d'un sur-corps totalement réel de K.

Remarques 3. Distinguons suivant les composantes réelles et celles imaginaires.

(i) La conjecture de Greenberg postule pour les caractères réels ϕ que les ordres des ϕ-composantes de ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K'_n}$ de classes logarithmiques restent bornés lorsqu'on monte la $\mathbb{Z}_\ell$-tour cyclotomique $K'_\infty = \cup_{n\in\mathbb{N}} K'_n$; dans ce cas l'hypothèse (i) est automatiquement vérifiée dans K'_n en les caractères réels ϕ dès que n est assez grand.

(ii) Pour les caractères imaginaires, la situation (ii) est numériquement fréquente : par exemple, pour $\ell = 3$ et $K' = \mathbb{Q}\ [\sqrt{d}, \sqrt{-3}]$, les seules valeurs, inférieures à 1 000, du discriminant du sous-corps quadratique réel de K', pour lesquelles la proposition 3 ne permet pas, jointe au théorème 7 de conclure à l'isomorphisme $H_{\mathbb{Q}\ [\sqrt{d}]} \simeq \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\mathbb{Q}\ [\sqrt{-3d}]}$ sont 141, 173, 321, 461, 533, 597, 733, 888, 953 et 965 pour lesquelles $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\mathbb{Q}\ [\sqrt{-3d}]}$ possède effectivement des éléments d'ordre 9.

Preuve. Le cas (i) est élémentaire ; le corollaire 2 appliqué successivement avec $r = s_\varphi$ et $r = s_\varphi + 1$ donne immédiatement :

$$^{\ell^{s_\varphi+1}}H_{\bar\omega\phi} \simeq {}^{\ell^{s_\varphi+1}}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_\phi = {}^{\ell^{s_\varphi}}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_\phi \simeq {}^{\ell^{s_\phi}}H_{\bar\omega\phi}\ ; \quad \text{et tout est dit.}$$

Le cas (ii) est plus subtil et nécessite de regarder attentivement l'isomorphisme $^{\ell}H_{\bar\omega\phi} \simeq {}^{\ell}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_\phi$. Partons pour cela d'un diviseur logarithmique $\mathfrak{a} = \sum_\mathfrak{p} \alpha_\mathfrak{p}\mathfrak{p}$ représentant une classe d'ordre ℓ^r (avec $r \le s_\phi$) dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_\phi$ (disons $\ell^r\mathfrak{a} = \widetilde{\operatorname{div}}(a)$, pour un a de $\mathcal{R}_{K'}$) ; et supposons fixée une racine ℓ^{r+1}-ième de l'unité ξ (de sorte que K' contient ξ^ℓ par hypothèse et que $N' = K\ [\xi]$ est soit K' soit le premier étage de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de K') ; puis notons $\zeta = \xi^\ell$ (c'est donc une racine primitive ℓ-ième de l'unité). D'après le théorème de Moore, la famille

$(\zeta^{\alpha_{\mathfrak{p}}})_{\mathfrak{p}} \in \widetilde{\oplus}_{\mathfrak{p}}\, {}_{\ell}\mu_{\mathfrak{p}}$ provient d'un élément $\mathcal{X}$ de $K_2(K')$ dont la puissance ℓ-ième est dans $H_{K'}$ (et, plus précisément ici, dans $H_{\bar{\omega}\phi}$).

La correspondance ${}^{\ell}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\phi} \simeq {}^{\ell}H_{\bar{\omega}\phi}$ est alors donnée par $\widetilde{c\ell}(\mathfrak{a})$ [mod $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\phi}^{\ell}$] $\mapsto$ $\mathcal{X}$ [mod $H_{\bar{\omega}\phi}^{\ell}$] (cf. [J$_3$]). Raisonnons maintenant dans N' en plongeant $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K'}^{e_{\phi}}$ dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{N'}^{e_{\phi}}$, $H_{K'}^{e_{\bar{\omega}\phi}}$ dans $H_{N'}^{e_{\bar{\omega}\phi}}$, $\widetilde{\oplus}_{\mathfrak{p}\in Pl_{K'}}\, {}_{\ell}\mu_{\mathfrak{p}}$ dans $\widetilde{\oplus}_{\mathfrak{p}\in Pl_{N'}}\, {}_{\ell}\mu_{\mathfrak{p}}$. Nous obtenons :

$$(\zeta^{\alpha_{\mathfrak{p}}})_{\mathfrak{p}} = (\zeta^{\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})})_{\mathfrak{p}} = (\xi^{\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(a)})_{\mathfrak{p}} = \left(\frac{\xi, a}{\mathfrak{p}}\right)_{\mathfrak{p}},$$

compte tenu de l'expression explicite du symbole de Hilbert donnée dans [J$_3$] ; ce qui nous permet de prendre $\mathcal{X} = \{\xi, a\}$ dans $K_2(N')$ donc $\mathcal{X}^{\ell} = \{\xi^{\ell}, a\}$ dans $K_2(K')$.

En fin de compte, partant d'une classe $\widetilde{c\ell}(\mathfrak{a})$ d'ordre ℓ^r nous avons obtenu une classe de ${}^{\ell}H_{\bar{\omega}\phi}$ représentée par un élément $\{\xi^{\ell}, a\}$ annulé par ℓ^r (puisqu'on a trivialement $\{\xi^{\ell}, a\}^{\ell^r} = \{\xi^{\ell^{r+1}}, a\} = \{1, a\}$ dans $K_2(K')$). Répétant donc cette opération à partir d'un système de générateurs de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\phi}$, nous obtenons bien un système de générateurs de $H_{\bar{\omega}\phi}$ formé d'éléments de puissance $\ell^{s_{\phi}}$-ième triviale ; ce qui montre que $H_{\bar{\omega}\phi}$ est, comme attendu, d'exposant $\ell^{s_{\phi}}$; d'où le résultat.

Enfin, en l'absence d'unités logarithmiques imaginaires autres que les racines de l'unité, la condition d'injectivité est banalement vérifiée pour ϕ imaginaire d'après un argument classique de théorie d'Iwasawa (cf. [J$_4$], lemme 4.1). □

3. Trivialité du noyau hilbertien

Nous allons maintenant appliquer l'isomorphisme ($\star\star$) à l'étude de la propagation de la trivialité du ℓ-noyau hilbertien dans une ℓ-extension (galoisienne) L/F de corps de nombres. Notre outil essentiel sera la formule des classes logarithmiques centrales établie dans [J$_4$] (cf. th. 5.2 & th. 5.3) ; mais comme nous aurons besoin ici d'une version sensiblement plus précise de ce résultat (i.e. faisant intervenir les caractères du groupe Δ), nous commençons par en donner une preuve succinte (ce qui va nous permettre au passage de rectifier la légère erreur d'indice figurant dans [J$_4$]).

Rappelons d'abord quelques définitions : étant donnée une ℓ-extension (galoisienne) L/F de corps de nombres, de groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(L/F)$, le *ℓ-groupe des classes logarithmiques centrales* qui lui est associé est le plus grand quotient

$${}^{G}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L = \widetilde{\mathcal{C}\ell}_L / \widetilde{Cl}_L^{I_G}$$

de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$ sur lequel G opère trivialement. Le *ℓ-corps des classes logarithmiques centrales*, disons L_K^{lc}, est ainsi le sous-corps de L^{lc} fixé par le sous-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^{I_G}$ de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L = \mathrm{Gal}(L^{lc}/L^c)$, c'est à dire la plus grande ℓ-extension abélienne localement cyclotomique de L telle que G opère trivialement sur $\mathrm{Gal}(L_K^{lc}/L^c)$. Il contient en particulier le *ℓ-corps des genres logarithmiques* $L^{lc} \cap LF^{ab}$ qui est, lui, la plus grande sous-extension de L^{lc} qui provient par composition avec L d'une ℓ-extension abélienne de F. Le groupe de Galois

$$\widetilde{\mathcal{G}\ell}_{L/K} \;=\; \mathrm{Gal}(L^{lc} \cap LF^{ab}/L^c) \;\simeq\; \mathrm{Gal}(L^{lc} \cap K^{ab}/L^c \cap K^{ab})$$

est, par définition, le *ℓ-groupe des genres logarithmiques* de l'extension L/F.

Pour chaque place finie $\mathfrak{p}$ de F, notons $F^c_{\mathfrak{p}}$ la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique du complété de F en $\mathfrak{p}$ et $L^{ab}_{\mathfrak{p}}$ la sous-extension maximale de l'intersection $L_{\mathfrak{p}} = \cap_{\mathfrak{p}|\mathfrak{p}} L_{\mathfrak{p}}$ des complétés de L aux places au dessus de $\mathfrak{p}$ qui est abélienne sur $F_{\mathfrak{p}}$, puis

$$\widetilde{I}^{ab}_{\mathfrak{p}} \;=\; \mathrm{Gal}(L^{ab}_{\mathfrak{p}}/L^{ab}_{\mathfrak{p}} \cap F^c_{\mathfrak{p}})$$

le *groupe d'inertie logarithmique abélianisé* de la place $\mathfrak{p}$ dans L/F. Désignons enfin par $\mathcal{N}^{loc}_{L/F}$ le sous-groupe de $\mathcal{R}_F \;=\; \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times$ formé des éléments qui sont normes locales partout dans L/F, de sorte que le quotient

$$\mathcal{N}^{loc}_{L/F}/N_{L/F}(\mathcal{R}_F)$$

est, par construction, le *ℓ-groupe des noeuds* de l'extension L/F.

Considérons alors le schéma d'extensions :

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
L^c \arrow[r] \arrow[d] & LK^{lc} \arrow[r] \arrow[d] & L^{lc} \cap LK^{ab} \arrow[r] \arrow[d] & L^{lc}_K \arrow[r] & L^{lc} \\
L^c \cap K^{ab} \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & L^{lc} \cap K^{ab} & & \\
L^c \cap K^{lc} \arrow[r] \arrow[d] & K^{lc} & & & \\
K^c & & & &
\end{tikzcd}$$

avec

$$\begin{aligned}
{}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L \;&\simeq\; \mathrm{Gal}(L^{lc}_K/L^c) \\
\widetilde{\mathcal{G}\ell}_L \;&\simeq\; \mathrm{Gal}(L^{lc} \cap LK^{ab}/L^c) \\
\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L \;&\simeq\; \mathrm{Gal}(K^{lc}/K^c)
\end{aligned}$$

Cela étant, nous avons :

Proposition 8. *Dans une ℓ-extension L/F de corps de nombres, de groupe de Galois G, le ℓ-groupe des classes logarithmiques centrales ${}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$, le ℓ-quotient des genres logarithmiques $\widetilde{\mathcal{G}\ell}_{L/F}$ et le ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ sont liés par les suites exactes canoniques de modules galoisiens :*

(i) $1 \to \widetilde{\mathcal{E}}_F/\widetilde{\mathcal{E}}_F \cap \mathcal{N}^{loc}_{L/F} \to \oplus_{\mathfrak{p}} \widetilde{I}^{ab}_{\mathfrak{p}}(L/F) \to \mathrm{Gal}(L^{lc} \cap F^{ab}/F^c) \to \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \to 1$;

(ii) $1 \to \widetilde{\mathcal{G}\ell}_{L/K} \to \mathrm{Gal}(L^{lc} \cap F^{ab}/F^c) \to \mathrm{Gal}(L^c \cap F^{ab}/F^c) \to 1$;

(iii) $1 \to \mathcal{D}\ell^{I_G}_L \widetilde{\mathcal{P}}_L/\widetilde{\mathcal{D}\ell}^{I_G}_L \widetilde{\mathcal{P}}_L \to {}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \to \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L/\mathcal{D}\ell^{I_G}_L \widetilde{\mathcal{P}}_L \to 1$;

(iv) $1 \to \widetilde{\mathcal{E}}_F \cap \mathcal{N}^{loc}_{L/F} / \widetilde{\mathcal{E}}_F \cap N_{L/F}(\mathcal{R}_F) \to \mathcal{N}^{loc}_{L/F}/N_{L/F}(\mathcal{R}_F) \to$
$\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L / \mathcal{D}\ell_L^{I_G} \widetilde{\mathcal{P}}_L \to \widetilde{\mathcal{G}\ell}_{L/K} \to 1.$

Preuve. Il suffit de reprendre verbatim les calculs effectués dans [J$_4$] en observant que, ℓ étant ici supposé impair, on n'a pas à se préoccuper de la complexification éventuelle des places réelles. Les deux premières suites conduisent alors à l'expression du ℓ-nombre de genres logarithmiques

$$|\widetilde{\mathcal{G}\ell}_{L/F}| \;=\; |\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F| \, \frac{\prod_{\mathfrak{p}} \widetilde{e}^{ab}_{\mathfrak{p}}(L/K)}{[L^c \cap F^{ab} : F^c]\,(\widetilde{\mathcal{E}}_F : \widetilde{\mathcal{E}}_F \cap \mathcal{N}^{loc}_{L/F})}$$

donnée dans [J$_4$] (cf. th. 5.2), corrigée du fait que le degré qui intervient au dénominateur est $[L^c \cap F^{ab} : F^c]$ et non $[L^c : F^c]$, comme il est écrit à tort dans [J$_4$]. Les deux suites qui relient ${}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$ à $\widetilde{\mathcal{G}\ell}_{L/F}$ permettent alors d'écrire le nombre de ℓ-classes logarithmiques centrales sous la forme

$$|{}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L| \;=\; |\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F| \, \frac{\prod_{\mathfrak{p}} \widetilde{e}^{ab}_{\mathfrak{p}}(L/K)\,(\mathcal{D}\ell_L^{I_G}\widetilde{\mathcal{P}}_L \;:\; \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{I_G}\widetilde{\mathcal{P}}_L)}{[L^c \cap F^{ab} : F^c]\,(\widetilde{\mathcal{E}}_F : \widetilde{\mathcal{E}}_F \cap N_{L/F}(\mathcal{R}_L))} \, \kappa_{L/F}$$

où $\kappa_{L/F} = (\mathcal{N}^{loc}_{L/F} \,:\, N_{L/F}(\mathcal{R}_F))$ est le ℓ-nombre de noeuds de l'extension L/F. $\square$

Considérons maintenant la situation galoisienne suivante : partons d'une extension abélienne K'/K de groupe de Galois Δ d'ordre étranger à ℓ ; considérons une ℓ-extension (galoisienne) N/K de groupe de Galois G ; et formons l'extension composée $N' = NK'$ qui est donc galoisienne sur K de groupe de Galois $G \times \Delta$. Appliquons alors la proposition 8 à l'extension N'/K' : puisque les suites (i) à (iv) sont bien évidemment des suites exactes de $\mathbb{Z}_\ell\,[\Delta]$-modules, nous pouvons les spécialiser en leurs ϕ-composantes (pour chaque idempotent e_ϕ de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell\,[\Delta]$), ce qui nous permet $in\ fine$ d'écrire la ϕ-partie du ℓ-nombre de classes logarithmiques centrales sous la forme :

$$|{}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell}^{e_\phi}_{N'}| = |\widetilde{\mathcal{C}\ell}^{e_\phi}_{K'}| \, \frac{\prod_{\mathfrak{p}'} \widetilde{e}^{ab}_{\mathfrak{p}'}(N'/K')_\phi \,(\mathcal{D}\ell_{N'}^{I_G}\widetilde{\mathcal{P}}_{N'} \;:\; \widetilde{\mathcal{D}\ell}_{N'}^{I_G}\widetilde{\mathcal{P}}_{N'})_\phi}{[N'^c \cap K'^{ab} : K'^c]_\phi \left(\widetilde{\mathcal{E}}_{K'} : \widetilde{\mathcal{E}}_{K'} \cap N_{N'/K'}(\mathcal{R}_{N'})\right)_\phi} \, \kappa\phi,$$

où nous avons indiqué par un indice ϕ que nous ne prenions que la ϕ-partie de la quantité considérée. Plus précisément, nous avons ici :

Lemme 9. *Soit N'/K' comme ci-dessus. Alors :*

(i) le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(N'^c \cap K'^{ab}/K'^c)$ et le groupe des noeuds $\mathcal{N}_{N'/K'}/N_{N'/K'}(\mathcal{R}_{N'})$ sont des $\mathbb{Z}_\ell\,[\Delta]$-modules isotypiques de caractère unité ;

(ii) l'ordre de la ϕ-composante de la somme directe $\oplus_{\mathfrak{p}'}\widetilde{I}^{ab}_{\mathfrak{p}'}(N'/K')$ des ℓ-groupes d'inertie logarithmique abélianisés est donné par la formule

$$\tilde{r}_\phi \;=\; \prod_{\mathfrak{p}} \tilde{e}^{ab}_{\mathfrak{p}}(N/K)^{<\phi,\chi_{\mathfrak{p}}>},$$

où, pour chaque place finie $\mathfrak{p}$ de K, on a noté $\chi_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Ind}^{\Delta}_{\Delta_{\mathfrak{p}}} 1_{\Delta_{\mathfrak{p}}}$ l'induit à Δ du caractère de la représentation unité du sous-groupe de décomposition $\Delta_{\mathfrak{p}}$ associé à $\mathfrak{p}$ dans l'extension abélienne K'/K.

Preuve. Examinons successivement les deux assertions.

(i) L'isomorphisme canonique $\mathrm{Gal}(N'^c \cap K'^{ab}/K'^c) \;\simeq\; \mathrm{Gal}(N^c \cap K^{ab}/K^c)$ montre en particulier que Δ agit trivialement sur ce groupe de Galois. Quant au groupe des noeuds, il est bien connu que c'est un invariant purement galoisien de l'extension N'/K' ; dans la situation considérée, il en résulte directement qu'il coïncide avec le groupe des noeuds de l'extension N/K, autrement dit qu'il est isotypique de caractère unité.

(ii) Enfin, puisque le groupe Δ agit transitivement sur les places $\mathfrak{p}'$ de K' au dessus d'une place donnée $\mathfrak{p}$ de K, nous avons immédiatement la décomposition directe

$$\oplus_{\mathfrak{p}'} \tilde{I}^{ab}_{\mathfrak{p}'}(N'/K') \;=\; \oplus_{\mathfrak{p}}\, \mathbb{Z}_\ell\; [\Delta/\Delta_{\mathfrak{p}}]\, \tilde{I}^{ab}_{\mathfrak{p}}(N/K),$$

d'où la seconde assertion, où $\tilde{e}^{ab}_{\mathfrak{p}}$ désigne l'ordre de $\tilde{I}^{ab}_{\mathfrak{p}}$. □

Enfin de compte, nous obtenons :

Théorème 10 (Formule des ϕ-classes logarithmiques centrales). *Soient K' une extension d'un corps de nombres K, de groupe de Galois Δ d'ordre d étranger à ℓ, et N une ℓ-extension (galoisienne) de K de groupe de Galois G, puis N' le compositum NK'. Alors, pour tout idempotent e_ϕ de l'algèbre ℓ-adique $\mathbb{Z}_\ell\;[\Delta]$, la ϕ-partie du ℓ-nombre de classes logarithmiques centrales de l'extension N'/K' est donnée par la formule :*

$$^{G}\widetilde{\mathcal{C}\ell}^{e_\phi}_{N'} \;=\; \widetilde{\mathcal{C}\ell}^{e_\phi}_{K'} \frac{\prod_{\mathfrak{p}}\, \tilde{e}^{ab}_{\mathfrak{p}}(N/K)^{<\phi,\chi_{\mathfrak{p}}>}\kappa^{<\phi,1>}_{N/K}}{(\widetilde{\mathcal{E}}_{K'} : \widetilde{\mathcal{E}}_{K'} \cap N_{N'/K'}(\mathcal{R}_{N'}))_\phi} \frac{(\mathcal{D}\ell^{I_G}_{N}\widetilde{\mathcal{P}}_N \,:\, \widetilde{\mathcal{D}\ell}^{I_G}_{N}\widetilde{\mathcal{P}}_N)^{<\phi,1>}}{[N^c \cap K^{ab} : K^c]^{<\phi,1>}},$$

où $\widetilde{e}^{ab}_{\mathfrak{p}}$ désigne l'indice de ramification logarithmique de la place $\mathfrak{p}$ dans l'extension locale abélianisée $K^{ab}_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$, et $\kappa_{N/K}$ est le nombre de noeuds de l'extension globale N/K.

Corollaire 11. *Sous les hypothèses du théorème, pour tout caractère ℓ-adique ϕ de Δ contenu dans le caractère d'augmentation $\chi_{\mathrm{aug}} = \chi_{\text{rég}} - 1$ (autrement dit pour tout caractère ℓ-adique irréductible φ distinct du caractère unité), le nombre de ϕ-classes logarithmiques centrales de l'extension N'/K' est donné, comme produit de deux entiers, par la formule :*

$$|^{G}\widetilde{\mathcal{C}\ell}^{e_\phi}_{N'}| \;=\; |\widetilde{\mathcal{C}\ell}^{e_\phi}_{K'}|\, \frac{\prod_{\mathfrak{p}}\, e^{ab}_{\mathfrak{p}}(N/K)^{<\phi,\chi_{\mathfrak{p}}>}}{(\widetilde{\mathcal{E}}^{e_\phi}_{K'} : \widetilde{\mathcal{E}}^{e_\phi}_{K'} \cap \mathcal{N}^{loc}_{N'/K'})}.$$

En particulier, on a les équivalences :

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}^{e_\phi}_{N'} = 1 \;\Leftrightarrow\; ^{G}\widetilde{\mathcal{C}\ell}^{e_\phi}_{N'} = 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \widetilde{\mathcal{C}\ell}^{e_\phi}_{K'} = 1 \qquad \text{et} \\ (\widetilde{\mathcal{E}}^{e_\phi}_{K'} : \widetilde{\mathcal{E}}^{e_\phi}_{K'} \cap \mathcal{N}^{loc}_{N'/K'}) = \prod_{\mathfrak{p}}\, \tilde{e}^{ab}_{\mathfrak{p}}(N/K)^{<\phi,\chi_{\mathfrak{p}}>}. \end{cases}$$

Preuve. Il suffit de constater que dans la formule des ϕ-classes logarithmiques centrales donnée par le théorème 10, tous les termes correctifs à droite disparaissent dès que le produit scalaire $<\phi, 1>$ est nul, i.e. dès que ϕ ne contient pas le caractère unité. On observera en outre que sous cette condition il n'y a pas lieu de distinguer (pour ce qui est des ϕ-parties) entre classes logarithmiques centrales et genres logarithmiques, normes locales et normes globales, et que $\widetilde{\mathcal{G}\ell}_{N'/K'}^{e_\phi}$ admet $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K'}^{e_\phi}$ comme quotient : la formule obtenue fait donc bien apparaître le produit de deux entiers. □

Remarques 4. Dans la formule obtenue $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K'}^{e_\phi}$ ne dépend que du corps de base ; le numérateur $\prod_{\mathfrak{p}} \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(N/K)^{<\phi,\chi_{\mathfrak{p}}>}$ ne fait intervenir que le schéma galoisien (la ramification logarithmique) ; enfin le dénominateur $(\widetilde{\mathcal{E}}_{K'}^{e_\phi} : \widetilde{\mathcal{E}}_{K'}^{e_\phi} \cap \mathcal{N}_{N'/K'}^{loc})$ ne met en jeu que les propriétés locales des unités logarithmiques de K'. Les propriétés irréductiblement globales de l'extension N'/K' n'apparaissent donc pas.

Transportant maintenant l'équivalence donnée par le corollaire 11 à l'aide de l'isomorphisme $(\star\star)$, nous obtenons :

Théorème 12. *Soit K' une extension abélienne d'un corps de nombres K, de groupe de Galois Δ d'ordre d étranger à ℓ, contenant les racines ℓ-ièmes de l'unité (pour un nombre premier impair ℓ) ; soit N une ℓ-extension (galoisienne) de K et N' le compositum $K'N$. Alors, pour tout caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, distinct du caractère cyclotomique ω, les φ-composantes du ℓ-noyau sauvage de N' et de K' vérifient l'équivalence :*

$$(\star\star\star\star)\quad H_{N'}^{e_\varphi} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} H_{K'}^{e_\phi} = 1 \quad \text{et} \\ (\widetilde{\mathcal{E}}_{K'}^{e_{\omega^{-1}\varphi}} : \widetilde{\mathcal{E}}_{K'}^{e_{\omega^{-1}\varphi}} \cap \mathcal{N}_{N'/K'}^{loc}) = \prod_{\mathfrak{p}} \tilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(N/K)^{<\omega^{-1}\varphi,\chi_{\mathfrak{p}}>}. \end{cases}$$

Preuve. Sous la conjecture de Gross, l'équivalence $(\star\star\star\star)$ n'est autre que celle donnée au corollaire 11 transportée par l'isomorphisme $(\star\star)$. Le seul point à vérifier est donc que le résultat est indépendant de la conjecture de Gross. Or cela résulte tout simplement du fait bien connu qu'en présence des racines ℓ-ièmes de l'unité, la trivialité du ℓ-noyau hilbertien constitue une condition suffisante de cette conjecture (cf. [J_1], appendice, ou [J_2]). Appliqué à une seule composante isotypique, cet argument nous donne immédiatement les deux équivalences : $(H_{N'}^{e_\varphi} = 1 \Leftrightarrow \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{N'}^{e_{\varphi\omega^{-1}}} = 1)$ & $(H_{K'}^{e_\phi} = 1 \Leftrightarrow \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K'}^{e_{\varphi\omega^{-1}}} = 1)$; d'où le théorème. □

Corollaire 13. *Sous les hypothèses du théorème, si l'extension K'/K admet une conjugaison complexe (en ce sens que K' est une extension quadratique totalement imaginaire d'un sur-corps totalement réel de K), alors pour tout caractère ℓ-adique irréductible réel φ du groupe Δ, autre que ω^2, on a l'équivalence :*

$$H_{N'}^{e_\varphi} = 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} H_{K'}^{e_\varphi} = 1 \quad \text{et} \\ <\omega^{-1}\varphi, \chi_{\mathfrak{p}}> = 0 \;\forall\; \mathfrak{p} \in R_{N/K}, \end{cases}$$

où $R_{N/K}$ désigne l'ensemble des places $\mathfrak{p}$ logarithmiquement ramifiée dans N/K.

Et, pour $\varphi = \omega^2$, il vient :

$$H_{N'}^{e_{\omega^2}} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} H_{K'}^{e_{\omega^2}} = 1 \text{ et} \\ <\omega, \chi_{\mathfrak{p}}>= 0, \text{ pour chaque place } \mathfrak{p} \text{ de } R_N/K \\ \text{à l'exception éventuelle d'une seule } \mathfrak{p}_\circ \text{ qui vérifie} \\ (\mu_{K'} : \mu_{K'} \cap \mathcal{N}_{N'/K'}^{loc}) = \widetilde{e}_{\mathfrak{p}_\circ}^{ab<\omega,\chi_{\mathfrak{p}}>}. \end{cases}$$

Preuve. Il suffit d'observer que les seules unités logarithmiques imaginaires sont les racines de l'unité, qui forment un $\mathbb{Z}_\ell\,[\Delta]$-module isotypique de caractère ω. □

Corollaire 14. *Supposons K totalement réel, et prenons $K' = K\,[\zeta_\ell]$.*

(i) Si K'/K est de degré $d > 2$, pour toute ℓ- extension (galoisienne) N de K, on a $H_N = 1$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies :

(i,a) $H_K = 1$;

(i,b) les places finies $\mathfrak{p}$ de K logarithmiquement ramifiées dans N/K ne sont pas complètement décomposées dans l'extension cyclotomique K'/K .

(ii) Si K'/K est quadratique, pour toute ℓ-extension (galoisienne) N de K, on a $H_N = 1$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies :

(ii,a) $H_K = 1$;

(ii,a) une place au plus de K est à la fois logarithmiquement ramifiée dans N/K et complètement décomposée dans l'extension cyclotomique K'/K ; lorsque c'est le cas, elle vérifie en outre la condition de ramification $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(N/K) = (\mu_{K'} : \mu_{K'} \cap \mathcal{N}_{K'/K}^{loc})$.

Preuve. C'est immédiat d'après le corollaire 13 appliqué avec $\varphi = 1$, la condition d'orthogonalité $<\omega^{-1}, \chi_{\mathfrak{p}}>= 0$, qui se lit aussi bien $<\chi_{\mathfrak{p}}, \omega>= 0$, exprimant simplement la non trivialité du sous-groupe de décomposition $\Delta_{\mathfrak{p}}$. □

Remarques 5. Une place finie $\mathfrak{p}$ étrangère à ℓ ne peut se ramifier dans une ℓ-extension que si elle vérifie la congruence

$$N\mathfrak{p} \equiv 1 \; [\mathrm{mod}\ \ell] \;,$$

autrement dit que si elle se décompose totalement dans l'extension K'/K. La condition sur la ramification logarithmique dans l'équivalence (i) du corollaire exprime donc :

1) que N/K est non ramifiée (indifféremment au sens logarithmique comme au sens habituel) aux places finies $\mathfrak{p} \nmid \ell$;

2) et qu'elle est, en outre, logarithmiquement non ramifiée (i.e. localement cyclotomique) aux places $\mathfrak{l}|\ell$ qui vérifient $\zeta_\ell \in K_\mathfrak{l}$.

Le même résultat vaut pour l'équivalence (ii) , sauf, le cas échéant, pour une place au plus.

Dans le cas spécial où K est le corps des rationnels $\mathbb{Q}$, le corollaire 14 prend une forme particulièrement simple :

Corollaire 15. *Pour tout $\ell \geq 5$, les ℓ-extensions (galoisiennes) N de $\mathbb{Q}$ qui ont un ℓ-noyau sauvage trivial sont les étages finis de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $\mathbb{Q}^c$, et eux seulement.*

Pour $\ell = 3$, en revanche, les 3-extensions (galoisiennes) de $\mathbb{Q}$ qui ont un 3-noyau sauvage trivial sont exactement celles qui sont 3-primitivement ramifiées ; ce sont aussi les 3-extensions de $\mathbb{Q}$ qui sont 3-rationnelles.

Preuve. Pour $\ell \geq 5$, le complété $\mathbb{Q}_\ell$ ne contenant pas les racines ℓ-ièmes de l'unité, la condition (i) nous dit que H_N est trivial si et seulement si l'extension $N/\mathbb{Q}$ est localement cyclotomique, ce qui, compte tenu de la trivialité du ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_\mathbb{Q}$, revient à affirmer que $N/\mathbb{Q}$ est contenue dans la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $\mathbb{Q}^c$ de $\mathbb{Q}$.

Pour $\ell = 3$, la condition (ii) nous dit que H_N est trivial si et seulement si l'extension $N/\mathbb{Q}$ est logarithmiquement non ramifiée, à l'exception éventuelle d'une seule place $q \equiv 1 \ [\mod 3]$ pour laquelle l'indice de ramification logarithmique $\tilde{e}_q(N/\mathbb{Q})$ peut être égal à 3 pourvu que la racine cubique j ne soit pas norme locale en q dans l'extension $N/\mathbb{Q}$. En d'autres termes, $N/\mathbb{Q}$ est donc

- soit logaritmiquement non ramifiée, et dans ce cas contenue comme précédemment dans la $\mathbb{Z}_3$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$;

- soit ramifiée logarithmiquement en une unique place $q \equiv 1 \ [\mod 3]$ qui ne se décompose pas dans (le premier étage de) la $\mathbb{Z}_3$-extension cyclotomique $\mathbb{Q}^c/\mathbb{Q}$ i.e. qui vérifie $q \not\equiv 1 \ [\mod 9]$. Une telle place étant primitive au sens logarithmique (cf [J$_4$]) et 3-primitive au sens de [GJ] et de [MN], cela revient à dire que N est 3-régulier (cf [GJ]) ou 3-rationnel (cf [MN]) les deux notions coïncidant ici. □

Remarques 6. Comme observé dans [KM] (cf exemple 2.13) dans le cas des ℓ-extensions de $\mathbb{Q}$, la trivialité du ℓ-noyau hilbertien H_N équivaut à celle du ℓ-noyau modéré, i.e. à celle de la ℓ-partie du K_2 de l'anneau des entiers O_N. Pour $\ell = 3$, on retombe donc bien sur la notion de corps ℓ-régulier ou ℓ-rationnel étudiée dans [GJ], [MN] ou [JN].

Références bibliographiques

[Br] J. Browkin, *On the p-rank of the tame kernel of algebraic number fields*, J. reine angew. Math. **432** (1992),135–149.

[BG] J. Browkin & H. Gangl, *Tame and wild kernels of quadratic imaginary number fields* , Math. Comp. **68** (1999),290–305.

[CK] A. Candiotti & K. Kramer, *On the 2-Sylow subgroup of the Hilbert kernel of number fields*, Acta Arithmetica **52** (1989), 49–65.

[DS] F. Diaz y Diaz & F. Soriano, *Approche algorithmique du groupe des classes logarithmiques* , J. Numb. Theory **76** (1999), 1–15.

[GJ] G. Gras & J.-F. Jaulent, Sur les corps de nombres réguliers, Math. Z. **202** (1989), 343–365.

[Gr] G. Gras, *Théorèmes de réflexion*, J. Théor. Nombres Bordeaux, **10** (1998), 399–499.

[J_0] J.-F. Jaulent, *L'arithmétique des ℓ-extensions (Thèse d'Etat)*, Pub. Math. Fac. Sci. Besançon Théor. Nombres 1985-86, (1986).

[J_1] J.-F. Jaulent, *La Théorie de Kummer et le K_2 des corps de nombres* , J. Théor. Nombres Bordeaux **2** (1990), 377-411.

[J_2] J.-F. Jaulent, *Noyau universel et valeurs absolues*, Astérique 198-199-200, (1991), 187–208.

[J_3] J.-F. Jaulent, *Sur le noyau sauvage des corps de nombres*, Acta Arith. **67** (1994), 335-348.

[J_4] J.-F. Jaulent , *Classes logarithmiques des corps de nombres* J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994) 301–325.

[JN] J.-F. Jaulent & T. Nguyen Quang Do, *Corps p-rationnels, corps p-réguliers et ramification restreinte*, J. Théor. Nombres Bordeaux **5** (1993), 343–363.

[JS] J.-F. Jaulent & F. Soriano, Sur les tours localement cyclotomiques, Archiv der Math. 73 (1999),132–140.

[Ke] F. Keune, *On the Structure of the K_2 of the ring of the integers in a number field*, K-theory **2** (1989), 625–645.

[K_0] M. Kolster *An idelic approach to the wild kernel*, Invent. Math. **103** (1991), 9–24.

[K_1] M. Kolster, *K_2 of Rings of Algebraic Integers*, J. Number Theory **42** (1992), 103–122.

[KM] M. Kolster & A. Movahhedi, *Galois co-descent for capitulation kernels of totally real number fields*, preprint.

[MN] A. Movahhedi & T. Nguyen Quang Do, *Sur l'arithmétique des corps de nombres p-rationnels*, Sém. Théor. Nombres Paris 1987/1988, Prog. in Math. **81** (1990), 155–200.

[Mo] A. Movahhedi, *Sur les p-extensions des corps p-rationnels*, Math. Nachr. **149** (1990), 163–176.

[Ta] J. Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology*, Invent. Math. **36** (1976), 257–274.

Jean-François Jaulent
Université Bordeaux 1
Institut de Mathématiques
351, cours de la Libération
F-33405 TALENCE Cedex
jaulent@math.u-bordeaux.fr

Florence Soriano
Département de Mathématiques
Université de Metz
Ile du Saulcy
F-57045 METZ Cedex
soriano@poncelet.univ-metz.fr