Noyau universel et valeurs absolues *

Jean-François Jaulent

à la mémoire de Georges Poitou

Résumé. Nous discutons les relations entre le noyau universel de Tate pour la K-théorie des corps de nombres, le radical initial des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions et le noyau des valeurs absolues ℓ-adiques aux divers étages de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique d'un corps de nombres F contenant les racines 2ℓ-ièmes de l'unité, à la lumiére de la théorie ℓ-adique globale du corps de classes introduite dans [Ja$_2$] et des conjectures de Leopodt et de Gross.

Abstract. We discuss the relationship between the universal kernel introduced by Tate in the K-theory of number fields, the radical associated to the $\mathbb{Z}_\ell$-extensions and the kernel of the ℓ-adic absolute values in the cyclotomic $\mathbb{Z}_\ell$-extension of a number field F which contains the 2ℓ-th roots of unity. Our study relies on the ℓ-adic global class field theory introduced in [Ja$_2$] and both involves the generalized Leopoldt and Gross conjectures.

Introduction

L'objet du travail est de présenter quelques unes des relations entre la ℓ-partie du noyau universel de Tate, pour la K-théorie d'un corps de nombres F contenant les racines 2ℓ-ièmes de l'unité, et le noyau des valeurs absolues ℓ-adiques principales, définies sur le ℓ-adifié du groupe des idèles de F, à la lumière des conjectures de Leopoldt et de Gross généralisées.

En fait cet article trouve sa motivation dans de récents travaux de M. Kolster [Ko] et de K. Kramer [Kr], qui recoupent des résultats antérieurs de l'auteur [Ja$_2$] et de T. Nguyen Quang Do [Ng$_2$] obtenus par d'autres voies, et mettent plus particulièrement en relief le réle non explicité jusqu'ici d'un noyau remarquable que l'on peut construire trés facilement en s'aidant des valeurs absolues ℓ-adiques principales (i.e. des valeurs absolues à valeurs ℓ-adiques) attachées aux places non complexes d'un corps de nombres quelconque.

Notre point de départ sera donc la théorie ℓ-adique du corps de classes, élaborée dans [Ja$_2$], que nous allons brièvement rappeler.

* Astérisque **198-199-200** (1991), 187-207.

1. Le ℓ-adifié du groupe des idèles d'un corps de nombres

Fixons une fois pour toutes un nombre premier ℓ et considérons un corps de nombres F arbitraire (mais de degré fini sur $\mathbb{Q}$).

Le groupe des idèles classique de F est défini depuis Chevalley comme le produit restreint

$$J_F \;=\; \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_F}^{res} F_{\mathfrak{p}}^{\times}$$

des groupes multiplicatifs des complétés respectifs de F en ses diverses places.Le facteur $F_{\mathfrak{p}}^{\times}$ désigne donc :

- soit le groupe divisible $\mathbb{C}^{\times}$, si $\mathfrak{p}$ est complexe ;
- soit le groupe $\mathbb{R}^{\times} = \{\pm 1\} \times \mathbb{R}_{+}^{\times}$, si $\mathfrak{p}$ est réelle ;
- soit le produit $F_{\mathfrak{p}}^{\times} = \mu_{\mathfrak{p}}^{0}\, U_{\mathfrak{p}}^{1}\, \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}}$ du groupe fini $\mu_{\mathfrak{p}}^{0}$ des racines de l'unité dans $F_{\mathfrak{p}}$ d'ordre étranger à $\mathfrak{p}$, du groupe $U_{\mathfrak{p}}^{1}$ des unités principales de $F_{\mathfrak{p}}$ et du $\mathbb{Z}$-module libre engendré par une uniformisante arbitraire $\pi_{\mathfrak{p}}$.

Dans aucun des cas, $F_{\mathfrak{p}}^{\times}$ n'est donc un $\mathbb{Z}_\ell$-module. Ainsi, pour construire un tel module à partir de $F_{\mathfrak{p}}^{\times}$, la solution la plus économique consiste-t-elle à former la limite projective

$$\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}} \;=\; \varprojlim_{n}\; F^{\times}/F^{\times \ell^n}$$

des quotients ℓ-primaires du groupe $F^{\times}$. Cela étant, le passage au quotient ayant pour effet de tuer la partie ℓ-divisible de $f^{\times}$, le module obtenu est évidemment trivial lorsque $\mathfrak{p}$ est complexe ; et il est égal à $\{\pm 1\}^{\mathbb{Z}_\ell/2\mathbb{Z}_\ell}$, lorsque $\mathfrak{p}$ est réelle, donc encore trivial, sauf dans le cas $\ell = 2$ pour lequel il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Enfin, si $\mathfrak{p}$ est ultramétrique, deux cas se présentent :

- ou bien $\mathfrak{p}$ est modérée (i.e. étrangère à ℓ) et

$$\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}} \;=\; \mu_{\mathfrak{p}}\, \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell}$$

  s'identifie au produit du ℓ-groupe de Sylow $\mu_{\mathfrak{p}}$ de $\mu_{\mathfrak{p}}^{0}$ et du $\mathbb{Z}_\ell$-module libre engendré par l'image de l'uniformisante $\pi_{\mathfrak{p}}$ (que nous écrirons encore $\pi_{\mathfrak{p}}$) ;
- ou bien $\mathfrak{p}$ est sauvage (i.e. au-dessus de ℓ) et

$$\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}} \;=\; U_{\mathfrak{p}}^{1}\, \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell}$$

  est le produit du sous-groupe $U_{\mathfrak{p}}^{1}$ des unités principales de $F_{\mathfrak{p}}$ et du $\mathbb{Z}_\ell$-module libre engendré par l'image de $\pi_{\mathfrak{p}}$ (que nous écrirons encore $\pi_{\mathfrak{p}}$).

Dans tous les cas, $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$ est ainsi un $\mathbb{Z}_\ell$-module noethérien (donc compact pour sa topologie naturelle de $\mathbb{Z}_\ell$-module) et il est commode d'écrire :

$$\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}} \;=\; \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}\, \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell}$$

en convenant de prendre $\pi_{\mathfrak{p}} = -1$ pour $\mathfrak{p}$ réelle lorsque ℓ vaut 2.

Il est alors naturel de définir le ℓ-adifié $\mathcal{J}_F$ du groupe des idèles J_F comme le produit restreint :

$$\mathcal{J}_F \;=\; \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_F}^{res} \mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$$

c'est-é-dire comme la réunion sur tous les ensembles finis S de places de F :

$$\mathcal{J}_F \;=\; \bigcap_{S\subset Pl_F} \mathcal{U}_F^S\,, \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}_F^S \;=\; \prod_{\mathfrak{p}\in S} \mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{p}\notin S} \mathcal{U}_{F_\mathfrak{p}}\ ;$$

et d'équiper $\mathcal{J}_F$ de la topologie limite inductive des topologies des $\mathcal{U}_F^S$; ces derniers étant regardés comme compacts en tant que produits de modules compacts, de sorte que la topologie de $\mathcal{J}_F$ n'est pas la restriction à $\mathcal{J}_F$ du produit des topologies des $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$, mais fait cependant de $\mathcal{J}_F$ une réunion dénombrable de sous-modules compacts.

Si maintenant on prend comme ℓ-adifié du groupe des idèles principaux le tensorisé ℓ-adique

$$\mathcal{R}_F \;=\; \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} F^\times$$

du groupe multiplicatif de F (qui joue donc le rôle du rayon), et qu'on envoie $\mathcal{R}_F$ dans $\mathcal{J}_F$ en s'aidant du plongement diagonal de $F^\times$ dans J_F, le résultat fondamental du corps de classes ℓ-adique est le suivant (cf. [Ja$_2$], Th. I.1.13) :

Théorème 1 (Isomorphisme ℓ-adique du corps de classes)**.** *Le groupe $\mathcal{R}_F$ des idèles principaux s'identifie canoniquement à un sous-groupe fermé du groupe des idèles $\mathcal{J}_F$ et le quotient topologique*

$$\mathcal{C}_F \;=\; \mathcal{J}_F/\mathcal{R}_F$$

est un groupe compact isomorphe au groupe de Galois $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}^{ab}/F)$ de la pro-ℓ-extension maximale $\overline{F}^{ab}$ du corps F.

Sans doute n'est-il pas inutile de rappeler, puisqu'elle intervient plus loin, comment s'exprime dans ce contexte la conjecture de Leopoldt : désignons pour cela par μ_F le ℓ-groupe des racines de l'unité dans F (i.e. le ℓ-sous-groupe de Sylow de $F^\times$) puis, pour chaque place $\mathfrak{p}$ de F, écrivons $\mu_\mathfrak{p}$ son homologue dans $F_\mathfrak{p}$. Cela posé, nous avons (cf. [Ja$_2$], Ch. I) :

Conjecture de Leopoldt généralisée. *Les idèles principaux (i.e. les éléments de $\mathcal{R}_F$) qui sont localement partout des racines de l'unité (dans $\mathcal{J}_F$) sont des racines globales de l'unité ; ce qui s'écrit :*

$$\mathcal{R}_F \,\cap \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_F} \mu_\mathfrak{p} \;=\; \mu_F.$$

Bien entendu, les idèles concernés étant trivialement des unités, i.e. des éléments du tensorisé ℓ-adique

$$\mathcal{E}_F \;=\; \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} E_F$$

du groupe des unités E_F de F, la conjecture précédente revient à affirmer que le rang ℓ-adique du groupe des unités de F est égal au nombre de Dirichlet $r_F + c_F - 1$, ce qui, lorsque le corps F est totalement réel, est bien le postulat initial de H.W. Leopoldt.

2. Définition des valeurs absolues ℓ-adiques principales

On sait que les valeurs absolues réelles (c'est-é-dire à valeurs dans $\mathbb{R}^\times$), attachées aux diverses places d'un corps de nombres F et définies sur le groupe des idèles J_F, sont telles que leurs restrictions à $F^\times$ satisfont la formule du produit :

$$\prod_{\mathfrak{p}\in Pl_F} \mid x \mid_{\mathfrak{p}} = 1, \quad \forall x \in F^\times.$$

Pour obtenir un analogue dans $\mathcal{J}_F$, il est nécessaire de définir des valeurs absolues à valeurs non dans $\mathbb{R}_+^\times$ mais dans le groupe multiplicatif $\mathbb{Z}_\ell^\times$; en fait dans son sous-groupe principal $1+\ell\mathbb{Z}_\ell$. Pour cela on peut procéder comme suit :

- pour ℓ impair, soit :

  $$< \cdot > = \langle \cdot \rangle \ \mid \ \mathbb{Z}_\ell^\times \to 1+\ell\mathbb{Z}_\ell$$

  la projection canonique de $\mathbb{Z}_\ell^\times$ sur $1+\ell\mathbb{Z}_\ell$, qui a pour noyau le sous-groupe μ_ℓ^0 des racines $(\ell-1)$-ièmes de l'unité dans $\mathbb{Z}_\ell$;
- et pour $\ell = 2$, soit :

  $$< \cdot > = \operatorname{sg}(\cdot))\, \langle \cdot \rangle \ \mid \ {\mathbb{Z}_2}^\times \to \{\pm 1\}\,(1+4\mathbb{Z}_2)$$

  la décomposition canonique de $\mathbb{Z}_2^\times = 1+2\mathbb{Z}_2 \simeq \{\pm 1\}(1+4\mathbb{Z}_2)$.

Définition 2. *Pour chaque place $\mathfrak{p}$ de F on définit sur le ℓ-adifié $\mathcal{J}_F$ du groupe des idèles du corps F une valeur absolue $|| \cdot ||_{\mathfrak{p}}$ à valeurs dans $1+\ell\mathbb{Z}_\ell$, qui se factorise via le compactifié profini $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$, en posant pour tout $\mathfrak{x} = (x_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ de $\mathcal{J}_F$:*
(i) $|| \mathfrak{x} ||_\mathfrak{p} := 1$, si $\mathfrak{p}$ est complexe ;
(ii) $|| \mathfrak{x} ||_\mathfrak{p} := < \operatorname{sg}(x_\mathfrak{p} >$, si $\mathfrak{p}$ est réelle ;
(iii) $|| \mathfrak{x} ||_\mathfrak{p} := < N\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p})} >$, si $\mathfrak{p}$ est ultramétrique mais étrangére à ℓ ;
(iv) $|| \mathfrak{x} ||_\mathfrak{p} := < N_{F_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_\ell}(x_\mathfrak{p}) N\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p})} >$, enfin si $\mathfrak{p}$ est au-dessus de ℓ.
Nous disons que $|| \cdot ||_\mathfrak{p}$ est la valeur absolue ℓ-adique signée attachée à $\mathfrak{p}$; et que

$$\mid \cdot \mid_\mathfrak{p} := \langle \, || \cdot ||_\mathfrak{p} \rangle$$

est la valeur absolue ℓ-adique principale (é valeurs dans $1+2\ell\mathbb{Z}_\ell$) attachée à $\mathfrak{p}$.

Remarque. La valeur absolue principale ainsi définie ne coïncide pas exactement avec celle donnée par J. Tate (cf. [Ta$_2$], Ch. VI, Déf. 1.1). Plus précisément, elle est égale au crochet $\langle \cdot \rangle$ de la valeur absolue de Tate.

Dans les trois premiers cas la définition des valeurs absolues ℓ-adiques est la transposition directe de la définition réelle, le choix de la norme absolue $N\mathfrak{p}$ correspondant à une normalisation naturelle. La condition (*iv*) est alors dictée par la formule du produit. En effet, avec les conventions précédentes, on a immédiatement (cf. [Ja$_2$], Prop. I.1.8), comme attendu :

$$\prod_{\mathfrak{p}\in Pl_F} || \, x \, ||_\mathfrak{p} = \prod_{p\in Pl_\mathbb{Q}} || \, N_{F/\mathbb{Q}}(x) \, ||_p = 1, \quad \forall x \in F^\times.$$

D'un autre cété, pour chaque place finie $\mathfrak{p}$, l'image $\mid \mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}} \mid_\mathfrak{p}$ est évidemment un sous-module d'indice fini de $1+2\ell\mathbb{Z}_\ell$. En particulier, c'est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang 1 et le noyau $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_\mathfrak{p}}$ de $\mid \cdot \mid_\mathfrak{p}$ est ainsi un sous-module pur de $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$:

Proposition 3. *Le noyau $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_\mathfrak{p}}$ dans $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$ de la valeur absolue ℓ-adique principale $|\cdot|_\mathfrak{p}$ est donné par les formules suivantes :*

(i) $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_\mathfrak{p}} = \mathcal{U}_{F_\mathfrak{p}}$, pour $\mathfrak{p} \nmid \ell$. Autrement dit, $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_\mathfrak{p}}$ est trivial si $\mathfrak{p}$ est réelle ; il est égal au sous-groupe de torsion $\mu_\mathfrak{p}$ de $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$ si $\mathfrak{p}$ est une place ultramétrique qui ne divise pas ℓ.

(ii) $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_\mathfrak{p}} = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Log}_\ell \circ N_{F_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_\ell})$, oé Log_ℓ est le logarithme d'Iwasawa dans $\mathbb{Q}_\ell^\times$, pour $\mathfrak{p} \mid \ell$. Dans ce cas, $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_\mathfrak{p}}$ est le produit direct du sous-groupe de torsion $\mu_\mathfrak{p}$ de $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$ et d'un $\mathbb{Z}_\ell$ module libre de dimension $[F_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_\ell]$; et c'est encore un sous-module pur de $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$.

Preuve. le cas (i) étant immédiat, examinons attentivement le cas (ii). Si $\mathfrak{p}$ divise ℓ, la condition $\mid x_\mathfrak{p} \mid_\mathfrak{p} = 1$ s'écrit pour un $x_\mathfrak{p}$ de $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$:

$$\langle N_{F_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_\ell}(x_\mathfrak{p}) N\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p})} \rangle \;=\; 1.$$

Elle affirme donc que la norme locale de $x_\mathfrak{p}$ s'écrit comme produit d'une puissance de ℓ (qui est nécessairement $N\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p})}$) et d'une racine de l'unité. Mais cette propriété caractérise précisément le logarithme d'Iwasawa dans $\mathbb{Q}_\ell$, ce qui conduit à l'égalité annoncée.

Remarque. Lorsque ℓ vaut 2, la condition $\| x_\mathfrak{p} \|_\mathfrak{p} = 1$ pour $\mathfrak{p} \mid \ell$ s'écrit :

$$N_{F_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_\ell}(x_\mathfrak{p}) \;\in\; 2^{\mathbb{Z}_2}.$$

Elle définit donc un sous-groupe $\widetilde{\mathcal{U}}^+_{F_\mathfrak{p}}$ d'indice 1 ou 2 du noyau $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_\mathfrak{p}}$ de la valeur absolue principale $|\cdot|_\mathfrak{p}$. Cet indice s'interprète d'ailleurs très simplement par la théorie locale du corps de classes.

Considérons, en effet, l'extension abélienne de $F_\mathfrak{p}$, disons $L_\mathfrak{p}$, qui est associée à $\widetilde{\mathcal{U}}^+_{F_\mathfrak{p}}$ par le corps de classes : le groupe de Galois $G_\mathfrak{p} = \mathrm{Gal}(\overline{F}_\mathfrak{p}^{ab}/F_\mathfrak{p})$ de la pro-ℓ-extension abélienne maximale $\overline{F}_\mathfrak{p}^{ab}$ de $F_\mathfrak{p}$ s'identifiant au groupe profini $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}} = \varprojlim F_\mathfrak{p}^\times / F_\mathfrak{p}^{\times\,\ell^n}$, le corps $L_\mathfrak{p}$ est tout simplement la sous-extension de $\overline{F}_\mathfrak{p}^{ab}$ qui est fixée par $\widetilde{\mathcal{U}}^+_{F_\mathfrak{p}}$:

- si $\mathfrak{p}$ est réelle (i.e. pour $F_\mathfrak{p} = \mathbb{R}$), c'est $\mathbb{R}$ si ℓ est impair et $\mathbb{C}$ si ℓ vaut 2 ; et, dans les deux cas, c'est la ℓ-extension cyclotomique de $\mathbb{R}$;
- si $\mathfrak{p}$ est modérée (i.e. ultramétrique mais étrangère à ℓ), $\widetilde{\mathcal{U}}^+_{F_\mathfrak{p}}$ s'identifie au sous-groupe d'inertie de $G_\mathfrak{p}$ et $L_\mathfrak{p}$ est donc la pro-ℓ-extension abélienne maximale non ramifiée de $F_\mathfrak{p}$; c'est-é-dire sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique.
- si $\mathfrak{p}$ est sauvage (i.e. au-dessus de ℓ) et ℓ est impair, $\widetilde{\mathcal{U}}^+_{F_\mathfrak{p}}$ est l'image réciproque par la norme locale $N_{F_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_\ell}$ du noyau dans $\mathbb{Q}_\ell$ du logarithme d'Iwasawa, noyau qui est précisément constitué des normes cyclotomiques ; de sorte que dans ce cas encore $L_\mathfrak{p}$ est exactement la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de $F_\mathfrak{p}$;
- enfin si $\mathfrak{p}$ est sauvage et ℓ vaut 2, la même description normique montre que $L_\mathfrak{p}$ est la pro-2-extension cyclotomique maximale de $F_\mathfrak{p}$, laquelle est une extension au plus quadratique de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique de $F_\mathfrak{p}$.

3. Le groupe des classes de valeurs absolues

Nous avons vu dans la section précédente que les idèles principaux (i.e. les éléments de $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$) satisfont la formule du produit pour les valuations ℓ-adiques :

$$\| x \| := \prod_{\mathfrak{p} \in Pl(F)} | x |_\mathfrak{p} = 1.$$

Désignons par $\widetilde{\mathcal{J}}_F$ le sous-groupe fermé de $\mathcal{J}_F$ constitué de tous les idèles qui vérifient la formule du produit :

$$\widetilde{\mathcal{J}}_F = \widetilde{\prod_{\mathfrak{p} \in Pl(F)}} \mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}} = \big\{((x_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \mathcal{J}_F \mid \quad \| x \| := \prod | x |_\mathfrak{p} = 1\big\}.$$

C'est un sous-module fermé de $\mathcal{J}_F$ qui contient $\mathcal{R}_F$ et il lui correspond donc, par la théorie ℓ-adique du corps d classes, une extension abélienne de F, disons F_∞. Pour la déterminer, il suffit de remarquer que $\widetilde{\mathcal{J}}_F$ est l'image réciproque par la norme arithmétique $N_{F/\mathbb{Q}}$ de son analogue $\widetilde{\mathcal{J}}_\mathbb{Q}$ dans $J_\mathbb{Q}$. Maintenant, un calcul immédiat montre que $\widetilde{\mathcal{J}}_\mathbb{Q}$ est engendré par $\mathcal{R}_\mathbb{Q}$ et le produit $\prod_{p \neq \ell} \mathcal{U}_p$. La pro-$\ell$-extension abélienne de $\mathbb{Q}$ associée à $\widetilde{\mathcal{J}}_F$ est donc celle ℓ-ramifiée maximale, c'est-à-dire tout simplement la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $\mathbb{Q}_\infty$ de $\mathbb{Q}$; et celle associée à $\widetilde{\mathcal{J}}_F$ est donc la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $F_\infty = F\mathbb{Q}_\infty$ de F.

Définition 4. *Etant donné un corps de nombres F, soit*

(i) $\widetilde{\mathcal{J}}_F = \widetilde{\prod}_{\mathfrak{p} \in Pl(F)} \mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$ le noyau dans $\mathcal{J}_F$ de la formule du produit,

(ii) $\widetilde{\mathcal{U}}_F^+ = \prod_{\mathfrak{p} \in Pl(F)} \widetilde{\mathcal{U}}_{F_\mathfrak{p}}^+$ le noyau des valeurs absolues ℓ-adiques et

(iii) $\widetilde{\mathcal{U}}_F = \prod_{\mathfrak{p} \in Pl(F)} \widetilde{\mathcal{U}}_{F_\mathfrak{p}}$ le noyau des valeurs absolues principales.

Nous disons que le quotient

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^+ := \widetilde{\mathcal{J}}_F / \widetilde{\mathcal{U}}_F^+ \mathcal{R}_F$$

est le groupe des classes de valeurs absolues du corps F ; et que son quotient

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F := \widetilde{\mathcal{J}}_F / \widetilde{\mathcal{U}}_F \mathcal{R}_F$$

est le ℓ-groupe des classes logarithmiques de F.

L'appellation *classes logarithmiques* se comprend comme suit : aux places finies modérées, l'application composée de la valeur absolue ℓ-adique principale $| \cdot |_\mathfrak{p}$ sur $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$ et de l'opposé du logarithme ℓ-adique Log_ℓ, défini sur le groupe multiplicatif $1 + 2\ell`Zl$ par son développement en série

$$-\mathrm{Log}_\ell(1+x) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

induit un isomorphisme du quotient $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}} / \widetilde{\mathcal{U}}_{F_\mathfrak{p}}$ sur le sous-module de $\mathbb{Z}_\ell$ engendré par le logarithme ℓ-adique de la norme absolue de l'idéal $\mathfrak{p}$:

$$\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}} / \widetilde{\mathcal{U}}_{F_\mathfrak{p}} = \mathbb{Z}_\ell \,\mathrm{Log}_\ell N\mathfrak{p}.$$

Comme un résultat semblable (bien que plus compliqué) vaut pour les places sauvages, le quotient $\widetilde{\mathcal{J}}_F / \widetilde{\mathcal{U}}_F$ représente en quelque sorte le ℓ-groupe des diviseurs logarithmiques du corps F ; et son quotient par le sous groupe principal $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}} \widetilde{\mathcal{U}}_F / \widetilde{\mathcal{U}}_F$ est bien le ℓ-groupe des classes logarithmiques de F.

Cela posé, nous avons :

Conjecture de Gross généralisée. *Le groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ est fini.*

Pour retrouver la conjecture initiale de Gross dans cette formulation, considérons la suite exacte canonique (ou le tilde signifie que l'on se restreint aux familles qui vérifient la formule du produit) :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}'_F \arrow[r] & \widetilde{\prod}_{\mathfrak{p}|\ell} \mid \mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}} \mid_\mathfrak{p} \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \arrow[r] & \mathcal{C}\ell'_F \\
\mathcal{E}'_F \arrow[r] \arrow[u, equal] & \widetilde{\prod}_{\mathfrak{p}|\ell} \mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}/\widetilde{\mathcal{U}}_{F_\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[u, "\simeq"'] & \widetilde{\mathcal{J}}_F/\widetilde{\mathcal{U}}_F\mathcal{R}_F \arrow[r] \arrow[u, "\simeq"'] & \mathcal{J}_F/\mathcal{U}_F^{\ell\infty}\mathcal{R}_F \arrow[u, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

Dans celle-ci le terme de gauche $\mathcal{E}_F = \mathbb{Z}_\ell \otimes E'_F$ est le tensorisé ℓ-adique du groupe des unités de F ; le terme de droite $\mathcal{C}\ell'_F$ n'est rien d'autre que le ℓ-groupe des ℓ-classes d'idéaux (i.e. le quotient du ℓ-groupe des classes d'idéaux au sens ordinaire par le sous-groupe engendré par les classes des idéaux premiers au-dessus de ℓ) ; le terme en $\widetilde{\prod}$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de dimension $l_F - 1$, si l_F désigne le nombre de places de F au-dessus de ℓ ; et $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ est le ℓ-groupe des classes logarithmiques. Cela étant, le groupe $\mathcal{C}\ell'_F$ étant fini, affirmer la finitude du groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ équivaut donc à affirmer que le sous-module de $\widetilde{\prod}_{\mathfrak{p}|\ell} \mid \mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}} \mid_\mathfrak{p}$ qui est engendré par les valeurs absolues principales des ℓ-unités de F est encore de dimension $l_F - 1$; ce qui, appliqué aux seules composantes imaginaires pour un corps à conjugaison complexe (i.e. extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps totalement réel) est bien la première conjecture de B.H. Gross.

Pour relier maintenant la conjecture de Gross à ses interprétations cyclotomiques, il est commode de réinterpréter le groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \simeq \widetilde{\mathcal{J}}_F/\widetilde{\mathcal{U}}_F\mathcal{R}_F$ à l'aide de la théorie ℓ-adique du corps de classes :

- D'un coté, nous avons vu plus haut que le numérateur $\widetilde{\mathcal{J}}_F$ est associé à la ℓ-extension cyclotomique F_∞ de F.
- D'un autre coté, nous savons par la théorie locale du corps de classes que le facteur $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$ est le groupe de normes qui correspond à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique locale $F_\mathfrak{p}^c$ de $F_\mathfrak{p}$. L'extension globale associée au produit $\widetilde{\mathcal{U}}_F\mathcal{R}_F$ est donc la plus grande ℓ-extension abélienne de de F qui est localement cyclotomique en chacune des places de F, autrement dit la pro-ℓ-extension maximale K_∞ de F_∞ qui est abélienne sur F et complètement décomposée partout sur F_∞.

Remarque. Aux places modérées la montée dans la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique F_∞/F ayant épuisé les possibilités d'inertie, la condition de complète décomposition est simplement une condition de non ramification. Le corps L_∞ est donc aussi la pro-ℓ-extension abélienne maximale de F qui est non ramifiée et ℓ-décomposée sur F_∞ : c'est ce qu'il est convenu d'appeler le ℓ-corps des ℓ-genres de l'extension profinie F_∞/F. C'est pourquoi, puisque F_∞/F est procyclique, disons $F_\infty = \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ avec F_n cyclique de degré ℓ^n, le groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ s'identifie au quotient des genres

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \;=\; \mathcal{C}_\infty/\mathcal{C}_\infty^{\gamma-1}$$

oé $\mathcal{C}_\infty = \varprojlim \mathcal{C}\ell'_{F_n}$ est le groupe de Galois de la ℓ-extension abélienne non ramifiée ℓ-décomposée maximale de F_∞ et γ un générateur topologique du groupe procyclique $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$. On retrouve ainsi l'interprétation classique de la conjecture de Gross, qui consiste à postuler que le polynôme caractéristique $P \in \mathbb{Z}_\ell[\gamma - 1]$ du $\mathbb{Z}_\ell[[\gamma - 1]]$-module $\mathcal{C}_\infty$ n'est pas un multiple de $(\gamma - 1)$ (cf. [Ja$_2$], p. 317).

4. Le noyau des valeurs absolues

Supposons, pour simplifier l'exposé que la ℓ-tour cyclotomique L de F soit procyclique (ce qui est automatique lorsque ℓ est impair, mais peut être en défaut si ℓ vaut 2).[1] Précisément, lorsque ℓ vaut 2, le corps F est nécessairement totalement imaginaire, de sorte que l'hypothèse faite implique en particulier que les valeurs absolues attachées aux places réelles n'intervienne pas (parce qu'elles sont triviales pour ℓ impair, parce qu'il n'y en pas pas pour $\ell = 2$). Plus généralement, l'image $\| \mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}} \|_\mathfrak{p} \simeq \mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}/\widetilde{\mathcal{U}}_{F_\mathfrak{p}}$ du compactifié $\mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}}$ par la valeur absolue correspondante $\| \cdot \|_\mathfrak{p}$ est alors un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre quelle que soit la place $\mathfrak{p}$ (de rang 0 si $\mathfrak{p}$ est réelle ou complexe, 1 sinon) et la valeur absolue ℓ-adique $\| \cdot \|_\mathfrak{p}$ coïncide avec la valeur absolue principale $| \cdot |_\mathfrak{p}$.

Introduisons maintenant le noyau $\mathcal{N}_F = \mathcal{R}_F \cap \widetilde{\mathcal{U}}_F$ des valeurs absolues dans $\mathcal{R}_F$, qui est contenu dans le tensorisé $\mathcal{E}'_F = \mathbb{Z}_\ell \otimes E'_F$ du groupe des ℓ-unités de F. Cela étant, dans la suite exacte déjé rencontrée :

$$1 \longrightarrow \mathcal{N}_F \longrightarrow \mathcal{E}'_F \longrightarrow \widetilde{\prod}_{\mathfrak{p}|\ell} | \mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}} |_\mathfrak{p} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F \longrightarrow \mathcal{C}\ell'_F$$

le terme médian $\prod_{\mathfrak{p}|\ell} | \mathcal{R}_{F_\mathfrak{p}} |_\mathfrak{p}$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de dimension $l_F - 1$ (où l_F désigne le nombre de places sauvages de F) et $\mathcal{E}'_F$ est le produit du sous-module de torsion μ_F de $\mathcal{R}_F$ (i.e. du ℓ-groupe des racines de l'unité de F) par un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de dimension : $r_F + c_F + l_F - 1$ (si r_F et c_F dénotent respectivement les nombres de places réelles et complexes de F).

Nous pouvons donc énoncer :

Proposition 5. *Le noyau $\mathcal{N}_F = \mathcal{R}_F \cap \widetilde{\mathcal{U}}_F$ dans $\mathcal{R}_F$ des valeurs absolues ℓ-adiques principales est un $\mathbb{Z}_\ell$-module noethérien de dimension :*

$$r_F + c_F + \delta_F$$

oé r_F est le nombre de places réelles de F ; c_F le nombre de places complexes ; et $\delta_F := \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ mesure le défaut de la conjecture de Gross dans F.

Scolie 6. *Le tensorisé $\mathfrak{N}_F := (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{N}_F$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module divisible de codimension*[2] *:*

$$r_F + c_F + \delta_F.$$

On notera, en effet, que le produit tensoriel par le groupe divisible $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ a eu pour conséquence de tuer le sous-groupe de torsion μ_F de $\mathcal{N}_F$.

Ce point acquis, le théorème principal de [Ko] (Th. 1.12) peut s'énoncer comme suit : désignons par $\mathfrak{H}_F$ le radical hilbertien attaché au corps F défini par

$$\mathfrak{H}_F \;=\; \big\{\ell^{-k} \otimes x \in \mathfrak{R}_F := (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_F \mid x \in \mathcal{J}_F^{\ell^k} \widetilde{\mathcal{U}}_F\big\}.$$

Nous avons alors :

1. Pour $\ell = 2$, cela revient à supposer que l'on a : $i \in F_\infty$; i.e. dans la pratique : $i \in F_1$
2. La codimension d'un $\mathbb{Z}_\ell$-module divisible est la dimension sur $\mathbb{Z}_\ell$ de son dual de Pontrjagin.

Théorème 7. *Il existe une suite exacte naturelle scindée de $\mathbb{Z}_\ell$-modules :*

$$1 \to \mathfrak{N}_F = \mathfrak{H}_F^{div} \to \mathfrak{H}_F \to \widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^{\,tor} \to 1$$

oé $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^{\,tor}$ est le sous-groupe de torsion du groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ (autrement dit $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ lui-méme, sous la conjecture de Gross) et $\mathfrak{N}_F = \mathfrak{H}_F^{div}$ le sous-module divisible maximal de $\mathfrak{H}_F$.

Preuve du Théoréme. Remarquons d'abord que $\mathcal{N}_F$ étant un sous-module pur de $\mathcal{R}_F$, comme expliqué à la proposition 5, son tensorisé $\mathfrak{N}_F = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{N}_F$ est un sous-module du tensorisé $\mathfrak{R}_F = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_F$ et il est trivialement contenu dans $\mathfrak{H}_F$. Tout le problème est donc d'interpréter le quotient $\mathfrak{H}_F/\mathfrak{N}_F$.

Pour cela , considérons un élément $\ell^{-k} \otimes x$ de $\mathfrak{H}_F$. Par définition, nous pouvons écrire $x = \mathfrak{y}^{\ell^k}\mathfrak{u}$ avec $\mathfrak{y} \in \mathcal{J}_F$ et $\mathfrak{u} \in \widetilde{\mathcal{U}}_F$, en fait $\mathfrak{u} \in \widetilde{\mathcal{J}}_F$, puisque x et $\mathfrak{u}$ sont tous deux dans le noyau $\widetilde{\mathcal{J}}_F$ de la formule du produit. En associant à l'élément $\ell^{-k} \otimes x$ la classe $cl(\mathfrak{y})$ de $\mathfrak{y}$ dans le quotient $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F = \widetilde{\mathcal{J}}_F/\widetilde{\mathcal{U}}_F\mathcal{R}_F$, nous définissons un morphisme de $\mathfrak{H}_F$ dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F$ dont l'image est exactement le sou-groupe de torsion $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F^{\,tor}$.

Quel est son noyau ? Supposons $cl(\mathfrak{y}) = 1$, i.e. $\mathfrak{y} = \mathfrak{v}z$ avec $\mathfrak{v} \in \widetilde{\mathcal{U}}_F$ et $z \in \mathcal{R}_F$. Nous avons alors : $\ell^{-k} \otimes x = \ell^{-k} \otimes (x/z^{\ell^k})$ et $x/z^{\ell^k} \in \mathcal{R}_F \cap \widetilde{\mathcal{U}}_F = \mathcal{N}_F$; ce qui établit l'exactitude de la suite.

Interprétation du noyau hilbertien $\mathfrak{H}_F$. Considérons l'image, disons $\mathfrak{H}'_F$, de $\mathfrak{H}_F$ dans le tensorisé $\mathfrak{J}_F := (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{J}_F$ du groupe des idèles. Par définition, les éléments de $\mathfrak{H}'_F$ sont ceux construits à partir des éléments de $\widetilde{\mathcal{U}}_F$, c'est-é-dire, comme on l'a vu, à partir des normes cyclotomiques locales. maintenant, dans l'extension procyclique F_∞/F, le fait d'être norme ou pas se lit localement, en vertu du principe de Hasse. les éléments de $\mathfrak{H}_F$ sont donc tout simplement les éléments du radical $\mathfrak{R}_F := (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_F$ qui sont représentés par les normes cyclotomiques :

$$\mathfrak{H}_F \;=\; \big\{\ell^{-k} \otimes x \in \mathfrak{R}_F \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad x \in F^{\times\ell^k} N_{F_n/F}(F_n^\times)\big\},$$

oé $N_{F_n/F}$ est la norme arithmétique dans la sous-extension F_n/F de degré ℓ^n de l'extension cyclotomique F_∞/F.

L'introduction du groupe $\mathfrak{H}_F$ dans la théorie cyclotomique, sous une forme naturellement très différente, remonte en fait à F. Bertrandias et J.-J. Payan, qui l'ont utilisée dans [BP] pour étudier une condition suffisante de la conjecture de Leopoldt (cf. [Ja_1]).

Enfin l'appellation radical hilbertien que nous préférons, s'explique aisément : du point de vue de la K-théorie des corps de nombres, les normes cyclotomiques sont caractérisées comme noyaux des symboles de Hilbert construits sur les racines de l'unité (cf. [Ja_2], Ch. I.2).

5. Noyau universel et radical des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions

Nous supposons désormais que le corps F contient les racines 2ℓ-ièmes de l'unité (de sorte que l'hypothèse restrictive considérée au début de la section 4 est alors remplie). Disons cependant que lorsque cette condition n'est pas vérifiée, il est toujours possible de pallier cette difficulté (du moins pour ℓ impair) en raisonnant sur le sur-corps $F' = F[\zeta_\ell]$ puis en redescendant les résultats sur F en s'aidant de la décomposition semi-locale de l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}_\ell[\mathrm{Gal}(F'/F)]$ donnée par les idempotents primitifs associés aux caractères ℓ-adiques irréductibles du groupe $\mathrm{Gal}(F'/F)$.

Commenéons par fixer quelques notations : pour chaque naturel n, désignons par F_n le l'extension $F[\zeta_{\ell^n}]$ engendrée sur F par les racines ℓ^n-ièmes de l'unité (de sorte que nous avons $F = F_0 = \cdots = F_m$ jusqu'à un certain rang m, puis $[F_{n+1} : F_n] = \ell$pour $n \geq m)$; notons Γ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$, identifié à $\mathbb{Z}_\ell$ par le choix d'un générateur topologique γ, puis $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma - 1]]$ l'algèbre d'Iwasawa associée ; et $\Gamma_n = \Gamma^{\ell^{n-m}}$, pour $n \geq m$, le sous-groupe $\mathrm{Gal}(F_\infty/F_n)$.

Introduisons enfin le module de Tate :

$$\mathbb{T}_\ell = \varprojlim \mu_{\ell^n}$$

qui est la limite projective des sous-groupes finis de μ_{ℓ^∞} pour les applications normes (et qui est isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell$ comme groupe abstrait) ; et notons :

$$\overline{\mathbb{T}}_\ell = \mathrm{Hom}(\mu_{\ell^\infty}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$$

le module opposé, défini comme dual de Pontrjagin de la limite inductive μ_{ℓ^∞} des μ_n (qui est encore $\mathbb{Z}_\ell$ comme groupe abstrait, mais avec une action galoisienne différente). Cela posé, les résultats de [Ja$_2$] montrent que les radicaux respectifs

$$\mathfrak{R}_{F_n} := (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} F_n^\times = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_{F_n}$$

associés aux corps F_n vérifient la théorie de Galois dans la tour F_∞/F ; c'est-à-dire que l'on a :

$$\mathfrak{R}_{F_n} \subset \mathfrak{R}_{F_\infty}, \quad \text{et en fait :} \quad \mathfrak{R}_{F_n} = \mathfrak{R}_{F_\infty}^{\Gamma_n}$$

(cf. [Ja$_1$], Prop. I.2.2). Un résultat analogue vaut pour les radicaux hilbertiens :

$$\mathfrak{H}_{F_n} \; = \; \big\{\ell^{-k} \otimes x \in \mathfrak{R}_F \mid x \in \mathcal{J}_F^{\ell^k} \widetilde{\mathcal{U}}_F\big\} \; = \; \mathfrak{H}_{F_\infty}^{\Gamma_n}$$

(cf. [Ja$_1$], Prop. I.2.18).

Nous sommes plus particulièrement intéressés ici par trois sous-groupes remarquables du groupe $\mathfrak{R}_{F_\infty} := (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes F_\infty^\times$, tous contenus dans $\mathfrak{H}_{F_\infty}$:

(i) Le noyau $\mathfrak{U}_{F_\infty}$ dans $\mathfrak{R}_{F_\infty}$ des symboles universels à valeurs dans $K_2(F_\infty)$:

$$\mathfrak{U}_{F_\infty} \; := \; \big\{\ell^{-k} \otimes x \in \mathfrak{R}_{F_\infty} \mid \{\zeta_{\ell^k}, x\} = 1 \;\; \text{dans} \;\; K_2(F_\infty)\big\};$$

(ii) Le radical $\mathfrak{Z}_{F_\infty}$ de la réunion $Z_\infty = \cup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$ des composées des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions Z_n des étages finis F_n de la tour F_∞ :

$$\mathfrak{Z}_{F_\infty} \; := \; \big\{\ell^{-k} \otimes x \in \mathfrak{R}_{F_\infty} \mid F_\infty[\sqrt[\ell^k]{x}] \subset Z_\infty\big\}.$$

(iii) Le radical $\mathfrak{N}_{\mathfrak{F}_\infty}$ construit sur le noyau $\mathcal{N}_{F_\infty}$ dans $\mathcal{R}_{F_\infty}$ des valeurs absolues :

$$\mathfrak{N}_{F_\infty} \;:=\; \big\{\ell^{-k}\otimes x \in \mathfrak{R}_{F_\infty} \mid x \in \mathcal{N}_{F_\infty} := \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{N}_{F_n}\big\}.$$

Avec ces notations, les résultats de J. Coates (cf. [Co], Th. 4) et de M. Kolster (cf. [Ko], Th. 2.6) peuvent être présentés synoptiquement comme suit :

Théorème 8. *En haut de la tour cyclotomique F_∞/F, on a les deux inclusions :*
(i) $\mathfrak{U}_{F_\infty} \subset \mathfrak{Z}_{F_\infty}$, avec égalité sous la conjecture de Leopoldt dans F_∞ ;
(ii) $\mathfrak{U}_{F_\infty} \subset \mathfrak{N}_{F_\infty}$, avec égalité sous la conjecture de Gross généralisée dans F_∞.

Preuve. Désignons par $\mathcal{H}_{F_\infty}$ le dual de Pontrjagin de $\mathfrak{H}_{F_\infty}$. La théorie d'Iwasawa (cf. [Iw], §8) montre que le groupe $\mathcal{H}_{F_\infty}$ est un Λ-module noethérien qui n'a pas de sous-module fini non nul ; et, plus précisément, qu'il existe une suite exacte de Λ-modules

$$1 \longrightarrow \mathcal{H}_{F_\infty} \longrightarrow \Lambda^c \oplus \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 1$$

oé c est le nombre de places complexes du corps F ; $\mathcal{F}$ est un module fini qui sera précisé plus loin ; et $\mathcal{T}$ une somme directe de quotients de Λ par des puissances d'idéaux premiers de hauteur 1. Les produits tensoriels par $\mathbb{T}_\ell$ et $\overline{\mathbb{T}}_\ell$ respectivement des divers termes de la suite fournissent alors deux autres suites analogues pour $\mathbb{T}_\ell\otimes\mathcal{H}_{F_\infty}$ et $\overline{\mathbb{T}}_\ell\otimes\mathcal{H}_{F_\infty}$ dans lesquelles le terme Λ^c est inchangé :

$$1 \longrightarrow \mathbb{T}_\ell\otimes\mathcal{H}_{F_\infty} \longrightarrow \Lambda^c \oplus (\mathbb{T}_\ell\otimes\mathcal{T}) \longrightarrow \mathbb{T}_\ell\otimes\mathcal{F} \longrightarrow 1,$$

et

$$1 \longrightarrow \overline{\mathbb{T}}_\ell\otimes\mathcal{H}_{F_\infty} \longrightarrow \Lambda^c \oplus (\overline{\mathbb{T}}_\ell\otimes\mathcal{T}) \longrightarrow \overline{\mathbb{T}}_\ell\otimes\mathcal{F} \longrightarrow 1.$$

Choisissons donc l'entier n assez grand pour que le générateur $\gamma_n = \gamma^{\ell^{n-m}}$ de Γ_n opère trivialement sur $\mathcal{F}$ et ses tensorisés $\mathbb{T}_\ell\otimes\mathcal{F}$ et $\overline{\mathbb{T}}_\ell\otimes\mathcal{F}$; puis faisons agir l'élément $\omega_n = \gamma_n - 1$ sur chacun des termes des trois suites obtenues. Partant par exemple de la première suite exacte, nous obtenons par le lemme du serpent la suite exacte à quatre termes :

$$1 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}_{F_\infty}/\mathcal{H}_{F_\infty}^{\omega_n} \longrightarrow (\Lambda/\omega_n\Lambda)^c \oplus \mathcal{T}/\omega_n\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 1,$$

qui nous montre que la dimension sur $\mathbb{Z}_\ell$ du plus grand quotient de $\mathcal{H}_{F_\infty}/\mathcal{H}_{F_\infty}^{\omega_n}$ qui est un $\mathbb{Z}_\ell$ module libre (autrement dit la codimension du sous-module divisible maximal de son dual de Pontrjagin $\mathfrak{H}_{F_n}/=\mathfrak{H}_{F_\infty}^{\Gamma_n}$ est égale à celle $c_n = c\ell^n$ du $\mathbb{Z}_\ell$-module libre $(\Lambda/\omega_n\Lambda)^c$ augmentée de celle du plus grand quotient de $\mathcal{T}/\omega_n\mathcal{T}$ qui est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre. Et un résultat analogue vaut naturellement pour les trois suites tensorisées.

Distinguons donc les trois cas :

(i) *Cas des valeurs absolues* : le sous-module divisible maximal de $\mathfrak{H}_{F_n}$ est le groupe $\mathfrak{N}_{F_n}$ dont la codimension a été calculée au scolie 6. Cela montre que le défaut δ_n de la conjecture de Gross dans F_n est donné par la formule :

$$\delta_n \;=\; \dim_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{T}/\omega_n\mathcal{T}.$$

En d'autres termes, la conjecture de Gross dans F_n postule donc simplement que le polynôme caractéristique du Λ-module $\mathcal{T}$ n'a pas de facteur cyclotomique. Lorsqu'elle est satisfaite, le sous-groupe $\mathfrak{N}_{F_\infty}$ de $\mathfrak{H}_{F_\infty}$ est donc exactement l'orthogonal du sous-module de torsion $\mathcal{T}_{F_\infty} = \mathcal{T}\cap\mathcal{H}_{F_\infty}$ de $\mathcal{H}_{F_\infty}$ dans la dualité de Pontrjagin ; il est strictement plus grand sinon.

(ii) *Cas des symboles* : d'après la théorie de Tate (cf. [Ta$_1$]), la dimension du sous-module maximal $\mathbb{T}_\ell \otimes \mathfrak{U}_{F_n} = (\mathbb{T}_\ell \otimes \mathfrak{H}_{F_\infty})^{\Gamma_n}_{div}$ du module des points fixes du produit $\mathbb{T}_\ell \otimes \mathfrak{H}_{F_\infty}$ est égale au nombre de places complexes $c_n = c\ell^n$ du corps F_n. Le noyau universel $\mathfrak{U}_{F_\infty}$ est donc toujours l'orthogonal du sous-module de torsion $\mathcal{T}_{F_\infty}$ de $\mathcal{H}_{\mathcal{F}_\infty}$. En particulier, il est contenu dans $\mathfrak{N}_{F_\infty}$; et il coïncide avec lui sous la conjecture de Gross généralisée.

(iii) *Cas des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions* : d'après la théorie de Kummer (cf. [Ja$_2$], 1.2.1 §c), le radical $\overline{\mathbb{T}}_\ell \otimes \mathfrak{Z}_{F_n}$, qui est associé à la composée des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions du corps F_n, est le sous-module divisible maximal $(\overline{\mathbb{T}}_\ell \otimes \mathfrak{H}_{F_\infty})^{\Gamma_n}_{div}$ du sous-groupe des points fixes $(\overline{\mathbb{T}}_\ell \otimes \mathfrak{H}_{F_\infty})^{\Gamma_n}$ du tensorisé $\overline{\mathbb{T}}_\ell \otimes \mathfrak{H}_{F_\infty}$. Il s'ensuit que le défaut δ_n^* de la conjecture de Leopoldt dans F_n (qui mesure précisément le nombre de $\mathbb{Z}_\ell$-extensions en excès) est donné par la formule :

$$\delta_n \;=\; \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \overline{\mathbb{T}}_\ell \otimes \mathcal{T}/\omega_n(\overline{\mathbb{T}}_\ell \otimes \mathcal{T}).$$

En d'autres termes, la conjecture de Leopoldt dans F_n postule donc simplement que le polynôme caractéristique du Λ-module $\mathcal{T}$ n'a pas de facteur cyclotomique. Lorsqu'elle est satisfaite, le sous-groupe $\mathfrak{Z}_{F_\infty} = \cap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{Z}_{F_n}$ de $\mathfrak{H}_{F_\infty}$ est donc exactement l'orthogonal du sous-module de torsion $\mathcal{T}_{F_\infty}$ de $\mathcal{H}_{F_\infty}$ dans la dualité de Pontrjagin ; il est strictement plus grand sinon.

Scolie 9. *Sous les conjectures de Leopoldt et de Gross dans la tour cyclotomique,*

(i) le noyau $\mathfrak{N}_{F_n}$ des valeurs absolues dans F_n,

(ii) le noyau $\mathfrak{U}_{F_n}$ des symboles universels à valeurs dans $K_2(F_n)$,

(iii) et le radical $\mathfrak{Z}_{F_n}$ des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions du corps F_n

sont tout trois des $\mathbb{Z}_\ell$-modules divisibles de codimension : $c_n = c\ell^n$.

Il ne coïncident en général pas car les descentes galoisienne s'écrivent :

$$\mathfrak{N}_{F_n} = (\mathfrak{N}^{\Gamma_n}_{F_\infty})_{div} \;;\quad \mathbb{T}_\ell \otimes \mathfrak{U}_{F_n} = (\mathbb{T}_\ell \otimes \mathfrak{U}_{F_\infty})^{\Gamma_n}_{div} \;;\quad \overline{\mathbb{T}}_\ell \otimes \mathfrak{Z}_{F_n} = (\overline{\mathbb{T}}_\ell \otimes \mathfrak{Z}_{F_\infty})^{\Gamma_n}_{div} \;;$$

si $\mathfrak{M}_{div}$ désigne le sous-module divisible maximal d'un $\mathbb{Z}_\ell$-module $\mathfrak{M}$.

Remarque. Sous la condition nécessaire et suffisante $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_F = 1$, les trois radicaux ci-dessus coïncident pour tout n avec le radical hilbertien $\mathfrak{H}_{F_n}$. on retrouve ainsi la condition suffisante des conjectures de Leopoldt et de Gross avancée dans [BP] et discutée dans [Ja$_1$].

6. La question de la capitulation

Conservons les hypothèses de la section 5 et supposons vérifiées en outre les conjectures de Leopoldt et de Gross aux divers étages finis de la tour cyclotomique F_∞/F. Dans ce cas, les résultats de R. Greenberg (cf. [Gb]) montrent que la seule obstruction à l'égalité des trois radicaux définis dans le scolie 9 ci-dessus réside dans le sous-groupe $C = \Lambda^c/\Lambda^c \cap (\mathcal{H}_{F_\infty} + \mathcal{T})$ du quotient fini $\mathcal{F}$ évoqué plus haut.

Avant de préciser ce point, disons un mot sur le groupe C lui-même. Les calculs d'Iwasawa (cf. [Iw], §5.4, 6.3, 8.4 et 8.5) prouvent implicitement que le dual de Pontrjagin $C^* = \mathrm{Hom}(C, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$ de C s'identifie à la limite projective

$$\mathcal{C}ap'_{F_\infty} = \varprojlim \mathcal{C}ap'_{F_n}$$

des sous-groupes respectifs de capitulation $\mathcal{C}ap'_{F_n}$ des ℓ-groupes de ℓ-classes des corps F_n formés des classes dans $\mathcal{C}\ell'_{F_n}$ qui capitulent dans $\mathcal{C}\ell'_{F_\infty}$; ces groupes étant par ailleurs finis et stationnaires (é isomorphisme canonique prés).

Pour retrouver directement ce résultat en termes de classes logarithmiques, nous pouvons procéder comme suit : désignons par $\mathfrak{N}^*_{F_\infty} = \mathrm{Hom}(\mathfrak{N}_{F_\infty}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$ le dual de Pontrjagin du noyau $\mathfrak{N}_{F_\infty}$ et partons de la suite exacte courte qui définit le groupe fini C :

$$1 \to \mathfrak{N}^*_{F_\infty} \to \Lambda^c \to C \to 1.$$

Faisant opérer Γ_n, mais fixant n assez grand pour que l'élément $\omega_n = \gamma_{\ell^n} - 1$ annule C, nous obtenons la suite exacte à quatre termes ;

$$1 \to C \to \mathfrak{N}^*_{F_\infty}/\mathfrak{N}^{*\omega_n}_{F_\infty} \to (\Lambda/\omega_n\Lambda)^c \to C \to 1;$$

ce qui nous prouve, puisque le quotient $\Lambda/\omega_n\Lambda$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre, que C est exactement le sous-groupe de torsion du quotient $\mathfrak{N}^*_{F_\infty}/\mathfrak{N}^{*\omega_n}_{F_\infty}$; autrement dit que son dual de Pontrjagin C^* s'identifie au quotient du sous-groupe $\mathfrak{N}^{*\Gamma_n}_{F_\infty}$ fixé par Γ_n par son sous-module divisible maximal.

Écrivons maintenant la suite exacte naturelle donnée par le théorème 7 :

$$1 \to \mathfrak{N}_F \to \mathfrak{H}_F \to \widetilde{\mathcal{C}\ell}^{\,tor}_F \to 1.$$

Passant à la limite inductive avec n et prenant les points fixes par Γ_n, nous obternons la suite exacte longue de cohomologie

$$1 \to \mathfrak{N}^{\Gamma_n}_{F_\infty} \to \mathfrak{H}^{\Gamma_n}_{F_\infty} \to \widetilde{\mathcal{C}\ell}^{\Gamma_n}_{F_\infty} \to \dots$$

oé le terme médian $\mathfrak{H}^{\Gamma_n}_{F_\infty}$ n'est autre que le radical hilbertien $\mathfrak{H}_{F_n}$. Par le lemme du serpent, nous en concluons immédiatement que le quotient $\mathfrak{N}^{\Gamma_n}_{F_\infty}/\mathfrak{N}_F$ s'identifie au noyau de l'application naturelle de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{F_n}$ dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{F_\infty}$, c'est-é-dire précisément au sous-groupe de $\widetilde{\mathcal{C}ap}_{F_n}$ de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{F_n}$ formé des classes logarithmiques qui capitulent dans l'extension F_∞/F_n.

Bien entendu les mémes calculs menés à partir des suites exactes tordues

$$1 \longrightarrow \mathbb{T}_\ell \otimes_\ell \mathfrak{U}^*_{F_\infty} \longrightarrow \mathbb{T}_\ell \otimes_\ell \Lambda^c \simeq \Lambda^c \longrightarrow \mathbb{T}_\ell \otimes C \longrightarrow 1,$$

et

$$1 \longrightarrow \overline{\mathbb{T}}_\ell \otimes_\ell \mathfrak{Z}^*_{F_\infty} \longrightarrow \overline{\mathbb{T}}_\ell \otimes_\ell \Lambda^c \simeq \Lambda^c \longrightarrow \overline{\mathbb{T}}_\ell \otimes C \longrightarrow 1$$

conduisent à des interprétations analogues faisant intervenir soit le noyau de l'homomorphisme d'extension pour les noyaux hilbertiens $WK_2(F_n)$ de la K-théorie, soit le même noyau pour les groupes $\overline{WK}_2(F_n)$ (cf. [Ja$_2$], Ch. I.2), définis comme les duaux de Pontrjagin respectifs des sous-groupes de torsion des groupes de Galois $\mathcal{H}_n := \mathrm{Gal}(H_n/F_n)$ attachés aux composés H_n des ℓ-extensions cycliques des corps F_n qui sont localement $\mathbb{Z}_\ell$-plongeables ; et dans ce dernier cas la *capitulation* en question traduit le fait banal qu'une ℓ-extension cyclique d'un F_n qui est *localement* $\mathbb{Z}_\ell$-plongeable sur F_n peut l'être *globalement* sur F_m pour m assez grand sans l'être pour autant sur F_n.

Résumons ces résultats, qui prolongent ceux de J. Coates sur le noyau régulier (cf. [Co]) :

Proposition 10. *Sous les conjectures de Leopoldt et de Gross, le dual de Pontrjagin du groupe fini C s'identifie comme module galoisien :*

(i) à la limite projective $\mathcal{C}ap'_{F_\infty} = \varprojlim \mathcal{C}ap'_{F_n}$ des sous-groupes de capitulation formés des ℓ-classes des F_n qui capitulent dans $\mathcal{C}\ell'_{F_\infty}$;

(ii) à la limite projective $\widetilde{\mathcal{C}ap}_{F_\infty} = \varprojlim \widetilde{\mathcal{C}ap}_{F_n}$ des sous-groupes de capitulation formés des ℓ-classes logarithmiques des F_n qui capitulent dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{F_\infty}$;

(iii) aux tensorisés $\overline{\mathbb{T}}_\ell \otimes \mathrm{Ker}(WK_2(F_n) \to WK_2(F_\infty))$, pour tout n assez grand ;

(iv) aux tensorisés $\mathbb{T}_\ell \otimes \mathrm{Ker}(\overline{WK}_2(F_n) \to \overline{WK}_2(F_\infty))$, pour tout n assez grand.

Il est alors possible de préciser comme suit les résultats de Greenberg [Gb] :

Théorème 11. *Choisissons l'entier n assez grand pour que le groupe fini C soit annulé à la fois par $\omega_n = \gamma_n$ et par ℓ^n. Dans ce cas, sous les conjectures de Leopoldt et de Gross, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Le groupe C est nul ; autrement dit l'homomorphisme d'extension entre groupes de ℓ-classes $\mathcal{C}\ell'_{F_n} \to \mathcal{C}\ell'_{F_\infty}$ est injectif.

(ii) Il y a coïncidence entre les sous-groupes de ℓ^n-torsion respectifs du noyau universel $\mathfrak{U}_{F_n}$ et du noyau des valeurs absolues $\mathfrak{N}_{F_n}$.

(iii) Il y a coïncidence entre les sous-groupes de ℓ^n-torsion respectifs du radical $\mathfrak{Z}_{F_n}$ des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de F_n et du noyau des valeurs absolues $\mathfrak{N}_{F_n}$.

(iv) [Lorsque ℓ est impair] Il y a coïncidence entre les sous-groupes de ℓ^n-torsion respectifs du radical $\mathfrak{Z}_{F_n}$ et du noyau universel $\mathfrak{U}_{F_n}$.

Remarque. L'intérêt du théorème 11 réside avant tout dans l'extrême inégalité des complexités numériques des trois radicaux concernés : lorsque le corps F_n est connu numériquement, le calcul du noyau $\mathfrak{N}_{F_n}$ est facile , les normes cyclotomiques étant définies par des formules explicites ; la détermination du radical initial $\mathfrak{Z}_{F_n}$ des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions est moins directe : il faut utiliser par exemple le logarithme de Gras défini sur les groupes de classes (cf. [Gr]) ; celle de $\mathfrak{U}_{F_n}$ est beaucoup plus difficile encore en présence de symboles exotiques.

Preuve du Théoréme. Les calculs qui précédent montrent que le noyau ${}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{F_n}$ est l'ensemble des éléments de ℓ^n-torsion du sous-module divisible maximal du groupe des points fixes $\mathfrak{N}_{F_\infty}^{\Gamma_n}$. Dans la dualité de Pontrjagin entre $\mathfrak{N}_{F_\infty}$ et $\mathfrak{N}^*_{F_\infty} \subset \Lambda^c$, l'orthogonal $({}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{F_n})^*$ de ${}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{F_n}$ est donc (en notations additives) le sous-module $\omega_n\Lambda^c + \ell^n\mathfrak{N}^*_{F_\infty}$ de $\mathfrak{N}^*_{F_\infty}$. En effet, n ayant été choisi assez grand pour que ω_n annule $C = \Lambda^c/\mathfrak{N}^*_{F_\infty}$, nous avons bien $\omega_n\Lambda^c \subset \mathfrak{N}^*_{F_\infty}$ et le quotient $\omega_n\Lambda^c/\omega_n\mathfrak{N}^*_{F_\infty}$ est précisément le sous-groupe de torsion de $\mathfrak{N}^*_{F_\infty}/\omega_n\mathfrak{N}^*_{F_\infty}$.

Considérons donc le quotient $\Lambda^c/({}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{F_n})^*$.

- D'un coté, puisque c'est un quotient de $\Lambda^c/\omega_n\Lambda^c \simeq \mathbb{Z}_\ell{}^{c_n}$, sa décomposition comme produit de groupes cycliques fait intervenir au plus c_n facteurs.
- D'un autre coté, son sous-module $\mathfrak{N}^*_{F_n}/({}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{F_n})^*$, qui est le dual de Pontrjagin de ${}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{F_n}$ est, lui, un $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$-module libre de dimension c_n.

Il vient donc :

$$\Lambda^c/({}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{F_n})^* \simeq \sum_{i=1}^{c_n} \mathbb{Z}/\ell^{n+e_i}\mathbb{Z}, \quad \text{avec} \quad \prod_{i=1}^{c_n} \ell^{e_i} = (\Lambda^c : \mathfrak{N}_{F_n})^*) = |\ C\ | .$$

Et le théorème sera établi si nous prouvons que chacune des quatre conditions énoncées équivaut à la nullité de tous les entiers naturels e_i. Or l'équivalence avec (i) résulte directement de la proposition 10. Et celle avec (ii) ou (iii) s'établit comme suit : l'égalité de ${}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{F_n}$ avec ${}_{\ell^n}\mathfrak{U}_{F_n}$ (respectivement avec ${}_{\ell^n}\mathfrak{Z}_{F_n}$) signifie que $({}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{F_n})^*$ reste inchangé lorsqu'on tord l'action de Γ_n sur Λ^c par le caractère cyclotomique (respectivement anticyclotomique), autrement dit que Γ_n agit trivialement sur $\mathbb{T}_\ell \otimes \Lambda^c/({}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{F_n})^*$ (respectivement sur $\overline{\mathbb{T}}_\ell \otimes \Lambda^c/({}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{F_n})^*$). Mais le groupe Γ_n étant engendré topologiquement par l'élément γ_n caractérisé par l'identité

$$\zeta^{\gamma_n} \;=\; \zeta^{1+\ell^n} \quad \forall \zeta \in \mu_{\ell^\infty}$$

cela revient à dire dans les deux cas que $1+\ell^n$ agit trivialement sur $\Lambda^c/({}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{F_n})^*$, i.e. que $\Lambda^c/({}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{F_n})^*$ est d'exposant ℓ^n. Enfin, le cas (iv) se traite de façon analogue, à ceci près qu'il convient de remplacer $1+\ell^n$ par $(1+\ell^n)^2$, ce qui nécessite d'exclure le cas $\ell = 2$.

Scolie 12. *Sous les conjectures de Leopoldt et de Gross, il existe un entier naturel k tel qu'on ait pour tout n assez grand l'égalité entre radicaux :*

$${}_{\ell^{n-k}}\mathfrak{N}_{F_n} \;=\; {}_{\ell^{n-k}}\mathfrak{U}_{F_n} \;=\; {}_{\ell^{n-k}}\mathfrak{Z}_{F_n}.$$

Preuve. Il suffit, en effet, de choisir k tel que ℓ^k annule C.

Terminons par deux exemples pour lesquels le théorème de Baker-Brumer assure la validité des conjectures de Leopoldt et de Gross (cf. [Ja$_1$]) :

Exemple 1. Prenons $\ell = 3$ et $F = \mathbb{Q}[\sqrt{d}, \sqrt{-3d}]$ biquadratique contenant les racines cubiques de l'unité. Supposons 3 non décomposé dans le sous-corps quadratique réel $k = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ et le 3-groupe de 3-classes $\mathcal{C}\ell'_k$ trivial. Dans ce cas, la formule des classes ambiges (cf. [Ja$_2$], Ch ; III.1), appliquée aux sous-extensions finies $k - n/k$ de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de k, montre que l'on a identiquement $\mathcal{C}\ell'_{k_n} = 1$ pour tout n, donc qu'il n'y a pas de capitulation dans k_∞/k, et, partant, dans F_∞/F. Il suit donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$${}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{F_n} \;=\; {}_{\ell^n}\mathfrak{U}_{F_n} \;=\; {}_{\ell^n}\mathfrak{Z}_{F_n}.$$

En particulier, le radical initial des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions (pris dans $F^\times/F^{\times\,\ell}$), tout comme le noyau des symboles universels, sont engendrés conjointement par les classes respectives de la racine cubique de l'unité j, du nombre 3 et de l'unité fondamentale ε du corps quadratique réel k.

Bien entendu, ce résultat est en défaut en cas de capitulation (cf. [Gb]).

Exemple 2. Soit ℓ un nombre premier impair satisfaisant la conjecture de Vandiver, i.e. ne divisant pas le nombre de classes du sous-corps réel maximal F^+ du ℓ-ième corps cyclotomique $F = \mathbb{Q}[\zeta_\ell]$. Dans ce cas, la formule des classes ambiges montre que la même propriété est encore vrai à chaque étage fini de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $F_n = \mathbb{Q}[\zeta_{\ell^n}]$. Il vient alors comme plus haut :

$${}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{F_n} \;=\; {}_{\ell^n}\mathfrak{U}_{F_n} \;=\; {}_{\ell^n}\mathfrak{Z}_{F_n}.$$

Et le groupe $\mathfrak{U}_{F_n}$ n'est autre ici que le $\mathbb{Z}_\ell$-module divisible construit sur les ℓ-unités de F_n.

Références

[BP] F. Bertrandias & J.-J. Payan, *Γ-extensions et invariants cyclotomiques*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **5** (1972), 517–543.

[Co] J. Coates, *On K_2 and some classical conjectures in number theory*, Ann. of Math. **95** (1972), 99–116.

[Fe] L.J Federer, *The non-vanishing of the p-adic regulator Galois cohomologically*, Astérisque **147–148** (1987), 71–77.

[FG] L.J. Federer, B.H. Gross (avec un appendice de W. Sinnot), *Regulators and Iwasawa modules*, Inv. Math. **62** (1981), 443–457.

[Gr] G. Gras, *Plongement kummérien dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions*, Compositio Math. **55** (1985), 383–396.

[Gb] R. Greenberg, *A note on K_2 and the theory of $\mathbb{Z}_\ell$-extensions*, Am. J. Math. **100** (1978), 1235–1245.

[Iw] K. Iwasawa, *On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields*, Ann. of Math. **98** (1973), 246–326.

[Ja_1] J.-F. Jaulent, *Sur les conjectures de Leopoldt et de Gross*, Astérisque **147–148** (1987), 107–120.

[Ja_2] J.-F. Jaulent, *L'arithmétique des ℓ-extensions (Thèse d'Etat)*, Pub. Math. Fac. Sci. Besançon Théor. Nombres 1984-85 & 1985/86, fasc. 1 (1986), 1–349.

[Ko] M. Kolster, *An idelic approach to the wild kernel*, Invent. Math. **103** (1991), 9–24.

[Kr] K. Kramer, *On the Hilbert kernel of K-theory and the Gross regulator*, Prépublication.

[KC] K. Kramer & A. Candiotti, *On K_2 and $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of number fields*, Am. J. Math. **100** (1978), 177–197.

[Ng_1] T. Nguyen Quang Do *Sur la torsion de certains modules galoisiens II*, Sém. Théor. Nombres Paris 1896–87 ; Prog. in Math. **75** (1988), 271–298.

[Ng_2] T. Nguyen Quang Do, *Sur la cohomologie de certains modules galoisiens p-ramifiés*, Théorie des Nombres (Quebec, PQ, 1987), de Gruyter, 1989.

[Ta_1] J. Tate, *Relations between K_2 and galois cohomology*, Invent. Math. **36** (1976), 257–274.

[Ta_2] J. Tate, *Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en $s = 0$,* Progress in Math. **47**, Birkhäuser (1984).

Jean-François Jaulent
Institut de Mathématiques
Université Bordeaux I
351, cours de la libération
F-33405 Talence Cedex
jaulent@math.u-bordeaux1.fr