Normes universelles et conjecture de Greenberg

Jean-François Jaulent

Résumé. Nous étudions le groupe des normes universelles attaché à la $\mathbb{Z}_\ell$-tour cyclotomique d'un corps de nombres totalement réel à la lumière de la conjecture de Greenberg sur la trivialité des invariants d'Iwasawa.

Abstract. We investigate the group of universal norms attached to the cyclotomic $\mathbb{Z}_\ell$-tower of a totally real number field in connection with Grenberg's conjecture on Iwasawa invariants of such a field.

Table des matières

Introduction

Étant donnés un corps de nombres K et un nombre premier ℓ arbitraires, le pro-ℓ-groupe des normes universelles de K, étudié par Greither dans [6] et dont il est question ici, est le groupe universel pour le foncteur norme attaché à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ de K, relatif aux ℓ-adifiés $\mathcal{E}'_{K_n} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'_{K_n}$ des groupes de ℓ-unités E'_{K_n} des divers étages K_n.

C'est tout simplement l'intersection des groupes de normes $\mathcal{N}_K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_{K_n/K}(\mathcal{E}'_{K_n})$ et sa définition est irréductiblement globale.

Il se présente ainsi comme un sous-groupe naturel du pro-ℓ-groupe des normes cyclotomiques $\widetilde{\mathcal{E}}_K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_{K_n/K}(\mathcal{R}_{K_n})$, défini, lui, comme intersection des groupes de normes attachés aux ℓ-adifiés $\mathcal{R}_{K_n} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K_n^\times$ des groupes multiplicatifs des K_n, et qui peut donc être décrit localement en vertu du principe de Hasse (cf. e.g. [11], App.). De fait, $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ n'est rien d'autre que le pro-ℓ-groupe des unités logarithmiques introduit dans [9].

Le but de la présente note est de comparer ces deux groupes qui jouent un rôle central dans plusieurs questions de la Théorie d'Iwasawa et, plus précisément, d'étudier le quotient $\widetilde{\mathcal{E}}_K/\mathcal{N}_K$ à la lumière de la conjecture de Greenberg (cf. [5]).

Notre point de départ est le Théorème 1 infra, qui relie l'indice $(\,\widetilde{\mathcal{E}}_K : \mathcal{N}_K\,)$ au cardinal du ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ du corps considéré.

1 Énoncé de la conjecture en termes de normes universelles

La conjecture de Greenberg pour un nombre premier ℓ postule que les ℓ-groupes de classes d'idéaux $\mathcal{C}\ell_{K_n}$ attachés aux étages finis K_n de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique d'un corps de nombres totalement réel K sont d'ordre borné indépendamment de n.

Sous la conjecture de Leopoldt, donc inconditionnellement pour K abélien sur $\mathbb{Q}$, il est bien connu que les sous-groupes sauvages $\mathcal{C}\ell_{K_n}^{[\ell]}$, i.e. les sous-groupes respectifs des $\mathcal{C}\ell_{K_n}$ construits sur les places au-dessus de ℓ, sont d'ordre borné ; de sorte que la conjecture de Greenberg revient à postuler qu'il en est de même des quotients $\mathcal{C}\ell'_{K_n} = \mathcal{C}\ell_{K_n}/\mathcal{C}\ell_{K_n}^{[\ell]}$, i.e. des ℓ-groupes de ℓ-classes.

En d'autres termes la Conjecture affirme que la limite projective pour les applications normes [1]

$$\mathcal{T}_{K_\infty} = \mathcal{C}'_{K_\infty} = \varprojlim \mathcal{C}\ell'_{K_n}$$

regardée comme module sur l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma - 1]]$ construite sur un générateur topologique γ du groupe procyclique $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ est pseudo-nulle.

Par un argument classique de Théorie d'Iwasawa (cf. e.g. [13], Lem. 1), cela revient à postuler que le sous-module des points fixes $\mathcal{T}_{K_\infty}^\Gamma$ et le quotient de co-points fixes ${}^\Gamma\mathcal{T}_{K_\infty}$ sont deux $\mathbb{Z}_\ell$-modules finis et de même ordre. Or, ces deux modules ont une interprétation simple :

— Le quotient des genres ${}^\Gamma\mathcal{T}_{K_\infty} = \mathcal{T}_{K_\infty}/\mathcal{T}_{K_\infty}^{(\gamma-1)}$ n'est rien d'autre que le ℓ-groupe des classes logarithmiques introduit dans [9] et calculé dans [1] et [2] :

$$^\Gamma\mathcal{T}_{K_\infty} = \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K.$$

— Et le sous-groupe ambige $\mathcal{T}_{K_\infty}^\Gamma$ est donné par un isomorphisme de Kuz'min (cf. [14], Prop. 7.5 ou e.g. [11], Th. 17, pour son interprétation logarithmique) ; il s'identifie au quotient

$$\mathcal{T}_{K_\infty}^\Gamma \simeq \widetilde{\mathcal{E}}_K/\mathcal{N}_K,$$

du groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ des unités logarithmiques de K par le sous-groupe $\mathcal{N}_K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_{K_n/K}(\mathcal{E}'_{K_n})$ des *normes universelles*, défini comme intersection des groupes de normes de ℓ-unités, mais qui est encore l'intersection $\widetilde{\mathcal{E}}_K^\nu = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_{K_n/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_n})$ des sous-groupes de normes d'unités logarithmiques attachés aux divers étages de la tour cyclotomique (cf. Lem. 12 infra).

En résumé, il vient ainsi :

Théorème 1. *Étant donné un corps de nombres totalement réel K qui vérifie la conjecture de Leopoldt pour un premier donné ℓ (par exemple un corps abélien réel), la conjecture de Greenberg pour le corps K et le premier ℓ affirme exactement que l'indice du sous-groupe des normes universelles $\mathcal{N}_K = \widetilde{\mathcal{E}}_K^\nu = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_{K_n/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_n})$ dans le pro-ℓ-groupe des unités logarithmiques $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ du corps K coïncide avec le cardinal du ℓ-groupe des classes logarithmiques :*

$$(\,\widetilde{\mathcal{E}}_K : \mathcal{N}_K\,) = |\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K|.$$

Dans la formule obtenue, le ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ est effectivement calculable (cf. [1, 2]) et un algorithme performant est désormais implanté dans PARI (cf. [1]). Il en est de même du pro-ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_K$, à cette réserve près que, les unités logarithmiques étant de nature ℓ-adique, l'algorithme fournit un système minimal de générateurs de $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ déterminés à puissance ℓ^{n_0}-ième près, pour tout n_0 fixé à l'avance. En revanche, le sous-groupe des normes universelles, quoique bien défini dans K, reste difficilement calculable. La formule du Théorème fournit ainsi un critère (conjectural) d'arrêt. Donnons tout de suite un exemple (cf. Prop. 4 infra) :

Corollaire 2. *Soient K un corps abélien réel de degré $d = [K:\mathbb{Q}]$ étranger à ℓ et de groupe Δ, puis $\mathbb{Z}_\ell[\Delta] = \bigoplus_\varphi \mathbb{Z}_\ell[\Delta]e_\varphi = \bigoplus_\varphi \mathbb{Z}_\varphi$ la décomposition semi-locale de son algèbre de Galois.*

Le groupe des unités logarithmiques de K, regardé comme $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module, est alors somme directe de ses composantes isotypiques $\widetilde{\mathcal{E}}_K^{e_\varphi}$, lesquelles sont $\mathbb{Z}_\varphi$-monogènes (à l'exception éventuelle de la composante unité $\{\pm1\}^{\mathbb{Z}_\ell} \times \ell^{\mathbb{Z}_\ell}$, qui est formée exclusivement de normes unverselles).

Sous la conjecture de Greenberg, la φ-composante isotypique $\mathcal{N}_K^{e_\varphi}$ du sous-groupe des normes universelles $\mathcal{N}_K$ est ainsi, pour chaque caractère φ, l'unique sous-module de $\mathcal{E}_K^{e_\varphi}$ d'indice $|\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{e_\varphi}|$.

1. Ce Λ-module, dit de Kuz'min-Tate, (ou de Tate par Kuz'min [14]) est noté $\mathcal{T}_{K_\infty}$ dans [11] et $\mathcal{C}'_{K_\infty}$ dans [13].

2 Interprétation en termes de capitulation logarithmique

Considérons, comme dans le Théorème 1, un corps totalement réel K et un nombre premier ℓ ; notons K_n le n-ième étage de la $\mathbb{Z}_\ell$-tour cyclotomique K_∞/K et Γ_n le groupe cyclique $\mathrm{Gal}(K_n/K)$.

Le quotient $\widetilde{\mathcal{E}}_K/N_{K_n/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_n})$ s'identifie au groupe de cohomologie $H^2(\Gamma_n,\, \widetilde{\mathcal{E}}_K)$ relatif à l'action de $\Gamma_n = \mathrm{Gal}(K_n/K)$ sur le ℓ-groupe des unités logarithmiques de K_n. Or, sous la conjecture de Gross-Kuz'min dans K_n, donc en particulier ici sous la conjecture de Leopoldt, le quotient de Herbrand $q(\Gamma_n,\, \widetilde{\mathcal{E}}_K) = |H^2(\Gamma_n,\, \widetilde{\mathcal{E}}_K)|/|H^1(\Gamma_n,\, \widetilde{\mathcal{E}}_K)|$ est égal à 1 (cf. [9], Th. 3.6) ; de sorte que l'on a l'égalité :

$$(\,\widetilde{\mathcal{E}}_K :\, N_{K_n/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_n})) = |H^2(\Gamma_n,\, \widetilde{\mathcal{E}}_K)| = |H^1(\Gamma_n,\, \widetilde{\mathcal{E}}_K)|.$$

D'autre part, l'extension K_n/K étant logarithmiquement non ramifiée, le groupe $H^1(\Gamma_n,\, \widetilde{\mathcal{E}}_K)$ mesure la capitulation logarithmique dans K_n/K (cf. [9], Th. 4.5) :

$$H^1(\Gamma_n,\, \widetilde{\mathcal{E}}_K) \simeq \widetilde{Cap}_{K_n/K} = \mathrm{Ker}(\,\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \to \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_n}).$$

L'ordre de celle-ci étant borné par le cardinal du groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$, la suite décroissante des groupes $N_{K_n/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_n}))$ stationne donc à partir d'un certain rang, disons, n_0 :

$$\mathcal{N}_K = \widetilde{\mathcal{E}}_K^{\nu} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_{K_n/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_n}) = N_{K_n/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_n}), \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

Et le résultat de capitulation donné dans [13, 16] peut ainsi être précisé comme suit :

Théorème 3. *Sous la conjecture de Gross-Kuz'min dans K_∞, l'indice des normes universelles $(\,\widetilde{\mathcal{E}}_K : \mathcal{N}_K\,)$ mesure la capitulation logarithmique dans K_n/K pour tout n assez grand :*

$$(\,\widetilde{\mathcal{E}}_K : \mathcal{N}_K\,) = |\,\widetilde{Cap}_{K_\infty/K}| = |\,\widetilde{Cap}_{K_n/K}|, \text{ pour } n \gg 0.$$

En particulier on a : $(\,\widetilde{\mathcal{E}}_K : \mathcal{N}_K\,) \leq |\,\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K|$ et l'égalité si et seulement si le corps K vérifie la conjecture de Greenberg pour le premier ℓ.

Sous des hypothèses de semi-simplicité, il est facile, en outre, de raffiner l'inégalité obtenue : supposons que le corps K soit abélien sur un sous-corps F avec $\ell \nmid [K : F]$ et notons $\Delta = \mathrm{Gal}(K/F)$ son groupe de Galois. Dans ce cas, l'algèbre de Galois $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ est un anneau semi local, produit direct d'extensions non-ramifiées $\mathbb{Z}_\varphi$ de $\mathbb{Z}_\ell$ indexées par les caractères ℓ-adiques irréductibles de Δ ; ce qui permet d'écrire tout $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module M comme somme directe de ses composantes isotypiques :

$$M = \oplus_\varphi M^{e_\varphi}, \text{ avec } e_\varphi = \tfrac{1}{|\Delta|}\textstyle\sum_{\sigma\in\Delta} \varphi(\sigma)\sigma^{-1}.$$

Il vient ainsi :

Proposition 4. *Sous les mêmes hypothèses et lorsque en outre le corps totalement réel K est abélien sur un sous-corps F de degré relatif $[K : F]$ étranger à ℓ, l'égalité précédente vaut pour chaque composante isotypique de l'algèbre de Galois $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ associée au groupe $\Delta = \mathrm{Gal}(K/F)$:*

$$(\,\widetilde{\mathcal{E}}_K^{e_\varphi} : \mathcal{N}_K^{e_\varphi}\,) = |\,\widetilde{Cap}^{e_\varphi}_{K_n/K}|, \text{ pour } n \gg 0.$$

Ce résultat vaut, en particulier, si K est un corps abélien réel de degré $[K : \mathbb{Q}]$ pour tout premier ℓ qui ne divise pas $[K : \mathbb{Q}]$, auquel cas les φ-composantes du groupe des unités logarithmiques $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ sont respectivement libres de dimension 1 sur l'anneau $Z_\varphi = \mathbb{Z}_\ell[\Delta]e_\varphi$.

Preuve. Dans le cas abélien, en effet, le corps (totalement) réel K vérifie la conjecture de Leopoldt pour tout premier ℓ et, par suite, celle de Gross-Kuz'min ; laquelle assure que le caractère de $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ est le caractère régulier (cf. [9], Th. 3.6). Sous l'hypothèse $\ell \nmid [K : \mathbb{Q}]$, c'est donc le produit de son sous groupe de torsion μ_K (qui est trivial pour $\ell \neq 2$) et d'un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module libre de dimension 1.

Exemple. Pour ℓ impair et K quadratique réel, le groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ des unités logarithmiques de K est la somme directe de sa composante unité $\ell^{\mathbb{Z}_\ell}$, qui est formée de normes universelles, et de sa composante d'augmentation, qui est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang 1. En particulier, le quotient $\widetilde{\mathcal{E}}_K/N_{K_n/K}(\,\widetilde{\mathcal{E}}_{K_n})$ est cyclique d'ordre inférieur ou égal au degré ℓ^n de l'extension K_n/K. Il suit de là que la capitulation logarithmique dans K_n/K est d'ordre au plus ℓ^n. Si le groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ est d'ordre ℓ^m, il faut donc monter au moins jusqu'au m-ième étage de la tour cyclotomique pour le faire capituler, quel que soit l'exposant de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$.

3 Comparaison avec la formule d'indice des unités circulaires

La formule conjecturale donnée par le Théorème 1 peut être mise en parallèle avec l'identité

$$(\,\mathcal{E}_K : \mathcal{E}_K^\circ\,) = |\,\mathcal{C}\ell_K|.$$

reliant l'indice du sous-groupe circulaire $\mathcal{E}_K^\circ$ dans le ℓ-adifié $\mathcal{E}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_K$ du groupe des unités au cardinal $|\,\mathcal{C}\ell_K\,|$ du ℓ-groupe des classes d'idéaux, obtenue par voie analytique (cf. [22], Th. 8.2).

Donnons un exemple très simple :

Proposition 5. *Soit ℓ un nombre premier impair, $n_0 \geq 1$, puis $K = \mathbb{Q}[\zeta + \zeta^{-1}]$ le sous-corps réel du corps cyclotomique $\mathbb{Q}[\zeta]$ engendré par les racines ℓ^{n_0}-ièmes de l'unité et $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ son groupe de Galois.*

Le corps K vérifie la conjecture de Greenberg pour ℓ si et seulement si le groupe $\mathcal{N}_K$ des normes universelles de K coïncide avec le groupe circulaire $\mathcal{C}_K^\circ$, multiplicativement engendré sur l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}_\ell[G]$ par l'élément $\eta_K = (1-\zeta)(1-\zeta^{-1})$ construit sur une racine primitive ℓ^{n_0}-ième de l'unité ζ ; autrement dit, si l'on a : $N_{K_n/K}(\mathcal{E}'_{K_n}) = \mathcal{C}_K^\circ$ pour n assez grand.

Preuve. Rappelons que le ℓ-groupe circulaire $\mathcal{C}_{K'}^\circ$ du corps cyclotomique $K' = \mathbb{Q}[\zeta]$ est le $\mathbb{Z}_\ell$-module multiplicatif engendré par la racine primitive ζ, l'élément $\eta = 1-\zeta$ et ses conjugués. Son sous-groupe réel $\mathcal{C}_K^\circ$ est l'image par la norme $N_{K'/K} = 1+\tau$ ou, si l'on préfère (ℓ étant impair), par l'idempotent $e_+ = \frac{1}{2}(1+\tau)$ associé à la conjugaison complexe τ. C'est donc le $\mathbb{Z}_\ell[G]$-module engendré par $\eta_K = \eta^{(1+\tau)}$, qui est contenu dans le ℓ-adifié $\mathcal{E}'_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'_K$ du groupe des ℓ-unités.

Observons d'abord que toute ℓ-unité $\varepsilon' \in \mathcal{E}'_K$ s'écrit de façon unique $\varepsilon' = \eta_K^\alpha\,\varepsilon$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}_\ell$ et $\varepsilon \in \mathcal{E}_K$; de sorte que nous avons la décomposition directe :

$$\mathcal{E}'_K = \eta_K^{\mathbb{Z}_\ell} \oplus \mathcal{E}_K.$$

Regardons maintenant le sous-groupe circulaire $\mathcal{C}_K^\circ$. Il contient évidemment $\eta_K^{\mathbb{Z}_\ell}$. Et son intersection avec le $\mathbb{Z}_\ell[G]$-module des unités $\mathcal{E}_K$ est, par convention, le ℓ-groupe des unités circulaires $\mathcal{E}_K^\circ$. Ainsi, de la décomposition

$$\mathcal{C}_K^\circ = \eta_K^{\mathbb{Z}_\ell} \oplus \mathcal{E}_K^\circ,$$

nous concluons :

$$\mathcal{E}'_K/\,\mathcal{C}_K^\circ \simeq \mathcal{E}_K/\,\mathcal{E}_K^\circ, \quad \text{puis} \quad (\,\mathcal{E}'_K : \mathcal{C}_K^\circ\,) = (\,\mathcal{E}_K : \mathcal{E}_K^\circ\,) = |\,\mathcal{C}\ell_K|.$$

Cela étant, comme l'unique place de K au-dessus de ℓ est principale, nous avons $\mathcal{C}\ell_K^{[\ell]} = 1$, i.e. $\mathcal{C}\ell_K = \mathcal{C}\ell'_K$. Portons enfin notre attention sur les ℓ-groupes logarithmiques : rappelons qu'ils sont définis en remplaçant les valuations habituelles $v_\mathfrak{p}$ attachées aux places finies de K par leurs analogues logarithmiques $\widetilde{v}_\mathfrak{p}$, lesquelles coïncident avec les précédentes pour $\mathfrak{p} \nmid \ell$ et vérifient en outre une formule du produit (cf. [9]). Dans le cas qui nous occupe, puisque K contient une unique place au-dessus de ℓ et que sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K_∞/K est totalement ramifiée, nous avons directement : $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = \mathcal{C}\ell'_K$; ce qui nous donne : $(\,\mathcal{E}'_K : \mathcal{C}_K^\circ\,) = |\,\mathcal{C}\ell'_K| = |\,\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K|$.

Enfin, toujours parce qu'il n'existe qu'une seule place au-dessus de ℓ, le ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ des unités logarithmiques coïncide avec $\mathcal{E}'_K$. En fin de compte, l'égalité précédente s'écrit aussi bien :

$$(\,\widetilde{\mathcal{E}}_K : \mathcal{C}_K^\circ\,) = |\,\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K|\,;$$

tandis que la formulation de la conjecture de Greenberg donnée par le Théorème s'écrit, elle :

$$(\,\widetilde{\mathcal{E}}_K : \mathcal{N}_K\,) = |\,\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K|.$$

Et, comme on a l'inclusion banale $\mathcal{C}_K^\circ \subset \mathcal{N}_K$ du fait des identités normiques satisfaites par les unités circulaires $\eta_{\ell^n} = 1 - \zeta_{\ell^n}$, on voit que la conjecture de Greenberg pour K et ℓ postule tout simplement l'égalité :

$$\mathcal{C}_K^\circ = \mathcal{N}_K,$$

qui affirme que l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_{K_n/K}(\mathcal{E}'_{K_n})$ se réduit à $\mathcal{C}_K^\circ$; autrement dit, que l'on a :

$$N_{K_n/K}(\mathcal{E}'_{K_n}) = \mathcal{C}_K^\circ, \text{ pour } n \text{ assez grand,}$$

comme annoncé.

4 Étude du cas complètement décomposé

On peut se demander si la coïncidence entre normes universelles et éléments circulaires donnée par la proposition précédente dans le cas particulier du sous-corps réel du corps cyclotomique $\mathbb{Q}[\zeta_{\ell^n}]$ est générale. Il n'en est rien, comme le montre le cas complètement décomposé.

Pour voir cela, partons d'un corps abélien réel K dans lequel ℓ se décompose complètement ; notons $G = G_K$ son groupe de Galois et $f = f_K$ son conducteur (qui n'est donc pas divisible par ℓ). Puis, pour chaque diviseur $d > 1$ de f, faisons choix d'une racine d-ième primitive de l'unité ζ_d et posons $\eta_d = 1 - \zeta_d$.

Le pro-ℓ-groupe des éléments circulaires (de Sinnott) $\mathcal{C}_K^\circ$ est alors le $\mathbb{Z}_\ell[G]$-module multiplicatif engendré par le ℓ-groupe μ_K des racines de l'unité contenues dans K et les normes $N_{K[\zeta_d]/K}(\eta_d)$ des η_d. Il est bien connu que les η_d sont des unités, pour d non primaire ; des p-unités, sinon. Dans tous les cas, ce sont donc des unités en ℓ, de sorte que l'intersection de $\mathcal{C}_K^\circ$ avec le ℓ-groupe des ℓ-unités $\mathcal{E}'_K$ est contenu dans $\mathcal{E}_K$: c'est le ℓ-groupe $\mathcal{E}_K^\circ$ des unités circulaires de Sinnott (cf. [20]).

Or, comme observé par Greither (cf. [6], p. 218, l. 11–13), on a le résultat suivant :

Proposition 6. *Pour tout corps abélien réel K dans lequel le nombre premier ℓ est complètement décomposé l'intersection $\widetilde{\mathcal{E}}_K^\circ$ du ℓ-groupe circulaire $\mathcal{C}_K^\circ$ avec le ℓ-groupe de unités logarithmique $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ se réduit au ℓ-groupe μ_K des racines de l'unité contenues dans K :*

$$\mathcal{C}_K^\circ \cap \widetilde{\mathcal{E}}_K = \mathcal{E}_K \cap \widetilde{\mathcal{E}}_K = \mu_K.$$

Posant $\widetilde{\mathcal{E}}_K^\circ = \mathcal{C}_K^\circ \cap \mathcal{E}_K$, on obtient donc, dans ce contexte :

$$\widetilde{\mathcal{E}}_K^\circ = \mu_K\,; \qquad \text{mais} \qquad \mathcal{N}_K \simeq \mu_K \times \mathbb{Z}_\ell{}^{[K:\mathbb{Q}]},$$

puisque le groupe des normes universelles $\mathcal{N}_K$ est le produit de μ_K et d'un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang $[K : \mathbb{Q}]$, indépendamment de toute conjecture (cf. e.g. [6]).

De fait, en l'absence même de toute hypothèse d'abélianité, l'indépendance (aux racines de l'unité près) entre groupes d'unités et groupes d'unités logarithmiques dans le cas complètement décomposé se lit déjà au niveau semi-local :

Théorème 7. *Soit K un corps de nombres arbitraire dans lequel le nombre premier ℓ se décompose complètement ; puis, pour chaque place $\mathfrak{l}$ de K au-dessus de ℓ, soit $\ell_\mathfrak{l}$ l'image canonique de ℓ dans le ℓ-adifié $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{l}} = \varprojlim K_\mathfrak{l}^\times / K_\mathfrak{l}^{\times \ell^n}$ du groupe multiplicatif du complété $K_\mathfrak{l}$.*

Avec ces notations, le ℓ-adifié $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{l}}$ s'écrit comme produit direct du sous-groupe des unités $\mathcal{U}_{K_\mathfrak{l}} = \{\pm 1\}^{\mathbb{Z}_\ell}(1+\ell_\mathfrak{l})^{\mathbb{Z}_\ell}$ et du sous-groupe des unités logarithmiques $\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{l}} = \ell_\mathfrak{l}^{\mathbb{Z}_\ell}$:

$$\mathcal{R}_{K_\mathfrak{l}} = \mathcal{U}_{K_\mathfrak{l}} \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{l}} = \{\pm 1\}^{\mathbb{Z}_\ell}(1+\ell_\mathfrak{l})^{\mathbb{Z}_\ell} \ell_\mathfrak{l}^{\mathbb{Z}_\ell}.$$

Corollaire 8. *Lorsque K est totalement réel, et sous la conjecture de Leopoldt pour ℓ, l'application de semi-localisation s_ℓ identifie ainsi le produit $\mathcal{E}'_K\,(1+\ell)^{\mathbb{Z}_\ell}$ du ℓ-adifié $\mathcal{E}'_K$ du groupe des ℓ-unités par le $\mathbb{Z}_\ell$-module libre engendré par $1+\ell$ à un sous-module d'indice fini du produit :*

$$\mathcal{R}_{K_\ell} = \textstyle\prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{l}} = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \{\pm 1\}^{\mathbb{Z}_\ell}(1+\ell_\mathfrak{l})^{\mathbb{Z}_\ell} \ell_\mathfrak{l}^{\mathbb{Z}_\ell}.$$

Il suit :

$$\mathcal{E}_K\,(1+\ell)^{\mathbb{Z}_\ell} \cap \widetilde{\mathcal{E}}_K = 1, \textit{ pour } \ell \neq 2\,; \qquad \mathcal{E}_K\,(1+\ell)^{\mathbb{Z}_\ell} \cap \widetilde{\mathcal{E}}_K = \{\pm 1\}, \textit{ pour } \ell = 2.$$

Preuve. Dès lors que la place ℓ est complètement décomposée dans $K/\mathbb{Q}$, chacun des complétés $K_\mathfrak{l}$ au-dessus de ℓ s'identifie à $\mathbb{Q}_\ell$. La décomposition des ℓ-adifiés $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{l}}$ résulte donc directement de celle de $\mathbb{Q}_\ell^\times$:

$$\mathbb{Q}_\ell^\times = (1+\ell)^{\mathbb{Z}_\ell} \ell^{\mathbb{Z}}, \text{ pour } \ell \text{ impair}\,; \qquad \mathbb{Q}_\ell^\times = \{\pm 1\}(1+4)^{\mathbb{Z}_\ell} 2^{\mathbb{Z}}, \text{ pour } \ell = 2.$$

Si, de plus, K vérifie la conjecture de Leopoldt pour le premier ℓ (cf. e.g. [10], §2.3), l'application de semi-localisation s_ℓ envoie injectivement le tensorisé $\mathcal{E}'_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes E'_K$ du groupe des ℓ-unités de K dans le produit $\mathcal{R}_{K_\ell} = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{l}}$ et se prolonge donc, du fait de l'égalité des rangs, en un pseudo-isomorphisme injectif du produit direct $\mathcal{E}'_K\,(1+\ell)^{\mathbb{Z}_\ell}$ dans $\mathcal{R}_{K_\ell}$. D'où le résultat annoncé.

5 Non-trivialité du quotient normique $\widetilde{\mathcal{E}}_K/\mathcal{N}_K$

Revenons au cas général : considérons un corps totalement réel K et intéressons-nous à la trivialité du quotient $\widetilde{\mathcal{E}}_K/\mathcal{N}_K$ sous la conjecture de Gross-Kuz'min. Notons $\mathcal{T}_{K_\infty} = \varprojlim \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_n}$ le module de Kuz'min-Tate et écrivons $\mathcal{F}_{K_\infty}$ son sous-module fini. Il est bien connu que $\mathcal{F}_{K_\infty}$ est la limite projective des sous-groupes de capitulation $\widetilde{Cap}_{K_\infty/K_n} = \mathrm{Ker}\,(\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_n} \to \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_\infty})$ (cf. [8, 11, 15] :

$$\mathcal{F}_{K_\infty} = \varprojlim \widetilde{Cap}_{K_\infty/K_n}.$$

De l'inclusion $\mathcal{T}^\Gamma_{K_\infty} \subset \mathcal{F}_{K_\infty}$, donnée par la conjecture de Gross-Kuz'min, on tire directement :

$$\mathcal{T}^\Gamma_{K_\infty} = 1 \Rightarrow \mathcal{F}^\Gamma_{K_\infty} = 1 \Rightarrow \mathcal{F}_{K_\infty} = 1 \Rightarrow \mathcal{T}^\Gamma_{K_\infty} = 1.$$

de sorte que la trivialité de $\mathcal{T}^\Gamma_{K_\infty} \simeq \widetilde{\mathcal{E}}_K/\mathcal{N}_K$, équivaut à celle de $\mathcal{F}_K$, ce qui revient à postuler que les morphismes d'extension $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_n} \to \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_\infty}$ sont ultimement injectifs. Plus précisément :

Proposition 9. *Sous la conjecture de Gross-Kuz'min dans K_∞, on a $\widetilde{\mathcal{E}}_K = \mathcal{N}_K$, i.e. $\mathcal{F}_{K_\infty} = 1$ si et seulement si le groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ s'injecte dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_\infty}$, i.e. $\widetilde{Cap}_{K_\infty/K} = 1$.*

Preuve. D'après la suite exacte des classes logarithmiques ambiges (cf. [9], Th. 4.5), il vient :

$$\widetilde{\mathcal{E}}_K = \mathcal{N}_K \underset{n\gg 0}{\Leftrightarrow} \widetilde{\mathcal{E}}_K = N_{K_n/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_n}) \underset{n\gg 0}{\Leftrightarrow} H^1(\Gamma_n, \widetilde{\mathcal{E}}_{K_n}) = 1 \underset{n\gg 0}{\Leftrightarrow} \widetilde{Cap}_{K_n/K} = 1 \underset{n\gg 0}{\Leftrightarrow} \widetilde{Cap}_{K_\infty/K} = 1.$$

Ainsi, il suffit que $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ s'injecte dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_\infty}$, pour qu'il en soit de même de tous les $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_n}$.

Remarque. La condition $\widetilde{\mathcal{E}}_K/\mathcal{N}_K = 1$ peut être regardée comme un critère suffisant de la conjecture de Gross-Kuz'min, a priori moins exigeant que la condition $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = 1$. Pour K totalement réel cependant, la conjecture de Greenberg postule qu'elles sont équivalentes, en vertu du Théorème 1.

Il peut être intéressant de donner un critère suffisant effectif de non-trivialité de $\widetilde{\mathcal{E}}_K/\mathcal{N}_K$.

Partons d'un corps totalement réel K , supposons pour simplifier $\ell \neq 2$ et notons $L = F[\zeta + \bar{\zeta}]$ le sous-corps réel du corps $N = F[\zeta]$ engendré sur F par une racine ℓ-ième primitive de l'unité ζ. Écrivons enfin $|\mu_L| = \ell^m$ l'ordre du ℓ-groupe des racines de l'unité dans N ; notons $N_\infty = \bigcup N_n$ la $\mathbb{Z}_\ell$-tour cyclotomique de N (avec, donc, $N_n = K[\zeta_{\ell^{m+n}}]$) ; et introduisons les radicaux universels $\mathfrak{R}_L = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_\mathbb{Z} L^\times \subset \mathfrak{R}_{N_\infty} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_\mathbb{Z} N^\times_\infty$ (cf. [7]) ; puis considérons :

- le sous-radical normique ${}_{\ell^m}\mathfrak{N}_L = \{\ell^{-m} \otimes x \in \mathfrak{R}_L \mid x \in \mathcal{N}_L\}$, image des normes universelles ;
- le radical logarithmique ${}_{\ell^m}\widetilde{\mathfrak{E}}_L = \{\ell^{-m} \otimes x \in \mathfrak{R}_L \mid x \in \widetilde{\mathcal{E}}_L\} \subset (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \widetilde{\mathcal{E}}_L$;
- le radical initial ${}_{\ell^m}\mathfrak{Z}_L = \{\ell^{-m} \otimes x \in \mathfrak{R}_L \mid N_\infty[\sqrt[\ell^m]{x}] \subset Z\} = \mathrm{Rad}(Z/N_\infty)$ attaché au compositum Z des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de N ;
- et le noyau universel de Tate ${}_{\ell^m}\mathfrak{U}_L = \{\ell^{-m} \otimes x \in \mathfrak{R}_L \mid \{\zeta_{\ell^m}, x\} = 1 \text{ dans } K_2(N)\}$.

Il est bien connu que ${}_{\ell^m}\mathfrak{U}_L$ est un $(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})$-module libre de dimension $[L:\mathbb{Q}]$; qu'il en est de même de ${}_{\ell^m}\widetilde{\mathfrak{E}}_L$ sous la conjecture de Gross-Kuz'min dans N, et de ${}_{\ell^m}\mathfrak{Z}_L$ sous celle de Leopoldt ; qu'enfin ${}_{\ell^m}\mathfrak{N}_L$ est contenu dans chacun des trois précédents (cf. [8, 11, 12, 15, 17, 18, 19, 21]. En particulier, il ne peut coïncider avec ${}_{\ell^m}\widetilde{\mathfrak{E}}_L$ que s'il coïncide avec les trois. Descendant alors par la norme (ou par l'idempotent $\frac{1}{[L:K]}N_{L/K}$) de l'algèbre de Galois $\mathbb{Z}_\ell[\mathrm{Gal}(L/K)]$, nous en déduisons :

Théorème 10 (Critère de non-trivialité)**.** *Sous les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min dans N (par exemple lorsque le corps K est abélien sur $\mathbb{Q}$), le quotient normique $\widetilde{\mathcal{E}}_K/\mathcal{N}_K$ ne peut être trivial que s'il y a coïncidence entre le radical logarithmique ${}_{\ell^m}\widetilde{\mathfrak{E}}_K$, le radical initial attaché aux $\mathbb{Z}_\ell$-extensions ${}_{\ell^m}\mathfrak{Z}_K$ et le noyau universel de Tate ${}_{\ell^m}\mathfrak{U}_K$.*

Scolie 11. *Lorsque K est un corps abélien réel de degré $d = [K:\mathbb{Q}]$ étranger à ℓ et de groupe de Galois $\Delta = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, le résultat vaut pour chaque composante isotypique de l'algèbre semi-locale $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$; en d'autres termes, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ de Δ on a l'implication :*

$$\mathcal{F}_K^{e_\varphi} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{N}_K^{e_\varphi} = \widetilde{\mathcal{E}}_K^{e_\varphi} \quad \Rightarrow \quad {}_\ell\widetilde{\mathfrak{E}}_K^{e_\varphi} = {}_\ell\mathfrak{Z}_K^{e_\varphi} = {}_\ell\mathfrak{U}_K^{e_\varphi}.$$

Appendice : description du groupe des normes universelles

L'interprétation des normes universelles comme normes logarithmiques s'obtient comme suit :

Lemme 12. *Soient ℓ un nombre premier, K un corps de nombres et $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique. Pour tout ensemble fini S de places finies de K contenant celles au-dessus de ℓ, l'intersection $\mathcal{N}_K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_{K_n/K}(\mathcal{E}^S_{K_n})$ des groupes normiques attachés aux ℓ-adifiés $\mathcal{E}^S_{K_n} = \mathbb{Z}_\ell \otimes E^S_{K_n}$ des groupes de S-unités est indépendante de S et coïncide avec l'intersection $\widetilde{\mathcal{E}}^\nu_K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_{K_n/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_n})$ des sous-groupes normiques d'unités logarithmiques.*

Preuve. Partons d'un η_0 de $\mathcal{N}_K$ et écrivons-le $N_{K_n/K}(\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \in \mathcal{E}^S_{K_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Observons que η_0 est une unité logarithmique (puisque norme à chaque étage fini K_n/K de la $\mathbb{Z}_\ell$-tour K_∞/K) et que, le groupe $\mathcal{E}^S_{K_1}$ étant compact, la suite $\big(N_{K_n/K_1}(\varepsilon_n)\big)_{n\geq 1}$ possède une valeur d'adhérence η_1. De l'égalité $\eta_1 = \lim N_{K_{n_k}/K_1}(\varepsilon_{n_k})$, pour une suite extraite convenable $(\varepsilon_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, les groupes normiques $N_{K_n/K_1}(\mathcal{E}^S_{K_n})$ étant fermés, on tire :

$$\eta_1 \in N_{K_{n_k}/K_1}(\mathcal{E}^S_{K_{n_k}}) \text{ pour tout } n_k \text{ ; et finalement } \eta_1 \in N_{K_n/K_1}(\mathcal{E}^S_{K_n}) \text{ pour tout } n \geq 1.$$

D'où le résultat par itération du procédé, puisqu'on a par construction $\eta_0 = N_{K_1/K_0}(\eta_1)$.

Références

[1] K. Belabas, J.-F. Jaulent, *The logarithmic class group package in PARI/GP*, Pub. Math. Besançon (2016).

[2] F. Diaz y Diaz, J.-F. Jaulent, S. Pauli, M.E. Pohst, F. Soriano, *A new algorithm for the computation of logarithmic class groups of number fields*, Experimental Math. **14** (2005), 67–76.

[3] G. Gras, *Class Field Theory : from theory to practice*, Springer Monographs in Mathematics (2005).

[4] G. Gras, *Approche p-adique de la conjecture de Greenberg pour les corps totalement réels*, Annales Mathématiques Blaise Pascal (2017).

[5] R. Greenberg, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields*, Amer. J. Math. **98** (1976), 263–284.

[6] C. Greither, *Sur les normes universelles dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 205–220.

[7] J.-F. Jaulent, *La Théorie de Kummer et le K_2 des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **2** (1990), 377–411.

[8] J.-F. Jaulent, *Noyau universel et valeurs absolues*, Astérisque **198-199-200** (1991), 187–207.

[9] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 301–325.

[10] J.-F. Jaulent, *Théorie ℓ-adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.

[11] J.-F. Jaulent, *Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min*, Annales Math. Québec **41** (2017), 119–140.

[12] J.-F. Jaulent, *Sur le radical kummérien des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions*, Acta Arithmetica **175** (2016), 245–253.

[13] J.-F. Jaulent, *Note sur la conjecture de Greenberg*, J. Ramanujan Math. Soc. **34** (2019), 59–80.

[14] L. V. Kuz'min, *The Tate module of algebraic number fields*, Izv. Akad. Nauk SSSR **36** (1972), 267-327.

[15] A. Movahhedi & T. Nguyen Quang Do, *On universal norms and the first layers of $\mathbb{Z}_p$-extensions of a number field*, Math. Annalen **362** (2015), 817–838.

[16] T. Nguyen Quang Do, *Formule des genres et conjecture de Greenberg*, Annales Math. Québec **42** (2018), 267–280.

[17] S. Seo, *On first layers of $\mathbb{Z}_p$-extensions*, J.Number Th. **133** (2013) 4010–4023.

[18] S. Seo, *On first layers of $\mathbb{Z}_p$-extensions II*, Acta Arith. **150** (2011), no. 4, 385-397.

[19] S. Seo, *On finite layers of $\mathbb{Z}_\ell$-extensions and K_2*, J.Number Th. **145** (2014) 153–180.

[20] W. Sinnott, *On the Stickelberger ideal and the circular units of an abelian number field*, Inv. Math. **62** (1980), 181–234.

[21] J. Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology,* Invent. Math. **36** (1976), 257–274.

[22] L. Washington, *Introduction to cyclotomic fields.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics **83**, Springer-Verlag, New York, 1997, xiv+487 pp.

Institut de Mathématiques de Bordeaux, Université de Bordeaux & CNRS
351 cours de la libération, F-33405 Talence Cedex
courriel : Jean-Francois.Jaulent@math.u-bordeaux.fr
https://www.math.u-bordeaux.fr/~jjaulent/