Principalisation abélienne des groupes de classes logarithmiques

Jean-François Jaulent

Résumé. Nous transposons aux ℓ-groupes de classes logarithmiques attachées à un corps de nombres les résultats sur la principalisation abélienne des groupes de classes de rayons modérées. En particulier nous montrons que pour toute extension $K/\boldsymbol{k}$ de corps de nombres complètement décomposée en au moins une place à l'infini, il existe sous la conjecture de Gross-Kuz'min dans K une infinité de ℓ-extensions abéliennes $F/\boldsymbol{k}$ pour lesquelles le sous-groupe relatif $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K/\boldsymbol{k}} = \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \to \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\boldsymbol{k}})$ du ℓ-groupe des classes logarithmiques de K capitule dans le compositum KF.

Abstract. We extend to logarithmic class groups the results on abelian principalization of tame ray class groups of a number field obtained in a previous article. As a consequence, for any extension $K/\boldsymbol{k}$ of number fields which satisfies the Gross-Kuz'min conjecture for the prime ℓ and where at least one of the infinite places completely splits, we prove that there exists infinitely many abelian ℓ-extensions $F/\boldsymbol{k}$ such that the relative subgroup $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K/\boldsymbol{k}} = \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \to \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\boldsymbol{k}})$ of the ℓ-group of logarithmic classes of K capitulates in the compositum FK.

Table des matières

Introduction

Le ℓ-groupe des classes logarithmiques (de degré nul) $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ d'un corps de nombres K a été introduit dans [9] et se présente comme un analogue formel du ℓ-sous-groupe de Sylow du groupe Cl_K des classes d'idéaux de ce corps pour un premier ℓ donné. Son calcul effectif a été récemment implanté par Belabas dans le système PARI (cf. [1]).

Par la Théorie ℓ-adique du corps de classes (cf. e.g. [10]), le groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ s'interprète comme groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{lc}/K^c)$ de la pro-ℓ-extension abélienne localement cyclotomique maximale K^{lc} de K relativement à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K^c. En d'autres termes, le groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ mesure l'écart pour une ℓ-extension abélienne entre être localement ou globalement cyclotomique. Cela explique le rôle souvent implicite que jouent ces groupes logarithmiques dans l'étude des pro-ℓ-extensions cyclotomiques, notamment dans l'interprétation de la conjecture de Greenberg évoquée en appendice du présent travail.

Du point de vue local, le passage de la valuation classique à la valuation logarithmique revient à remplacer la $\mathbb{Z}_\ell$-extension non-ramifiée par la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique, ce qui permet de définir les notions de degré d'inertie et d'indice de ramification au sens logarithmique en analogie avec les mêmes objets traditionnels. Les extension logarithmiquement non-ramifiées sont ainsi les extensions localement cyclotomiques. De plus, les unités du corps local au sens logarithmique sont tout simplement les normes cyclotomiques locales. De ce fait, les unités logarithmiques globales sont exactement les normes cyclotomiques. Leur rang est donné par la conjecture de Gross-Kuz'min (initialement énoncée dans [20]), qui revient à postuler qu'il est égal à celui des unités ordinaires augmenté de 1 (cf. [9, 10, 12]) ou, de façon équivalente, que le pro-ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ est fini. C'est, en particulier le cas lorsque le corps K est abélien. Il en est de même pour certaines familles de corps non abéliens, dits ℓ-rationnels, pour lesquelles on peut montrer qu'il est trivial (cf. [8, 17, 21]).

En résumé, les ℓ-groupes de classes logarithmiques se comportent comme les ℓ-sous-groupes de Sylow des groupes de classes habituels (ce qui permet par exemple de construire des ℓ-tours localement cyclotomiques analogues aux ℓ-tours de corps de classes de Hilbert (cf. [15, 16, 18]), avec cependant des différences essentielles : en particulier le théorème 94 de Hilbert, qui joue un rôle clé dans les questions de capitulation, ne s'applique pas dans le cadre logarithmique (cf. [11]).

L'objet du présent article est ainsi de reprendre dans le cadre logarithmique les travaux de [14] qui généralisent aux classes de rayons les résultats antérieurs de Gras [5, 7], Kurihara [19] et Bosca [2, 3] sur la principalisation abélienne des groupes de classes d'idéaux. Nous avons fait le choix de suivre aussi fidèlement que possible la démarche de [14], pour faciliter la comparaison et mettre en relief similitudes et dissemblances d'avec le cas classique, la principale étant la nécessité de se restreindre aux classes relatives du fait de la formule du produit (ou du degré) qui n'intervient pas dans le cas des idéaux, mais vient ici compliquer la démonstration.

Cette restriction n'intervient pas, en revanche, pour les extensions absolues (i.e. pour $\boldsymbol{k} = \mathbb{Q}$), car le corps des rationnels est logarithmiquement principal. Dans ce contexte, les résultats que nous obtenons valent ainsi dès que le corps K considéré vérifie la conjecture de Gross-Kuz'min (pour le premier ℓ) et donc en particulier pour tous les corps abéliens.

Par exemple, dans le cas de l'extension abélienne réelle maximale de $\mathbb{Q}$, le Corollaire 16 infra s'énonce ainsi :

Théorème. *Le sous-corps réel maximal $\mathbb{Q}_+^{ab} = \bigcup_{f>0} \mathbb{Q}[\cos(2\pi/f)]$ du corps cyclotomique engendré par toutes les racines de l'unité $\mathbb{Q}^{ab} = \bigcup_{f>0} \mathbb{Q}[\zeta_f]$ est logarithmiquement principal.*

Plus généralement les extensions algébriques totalement réelles N de $\mathbb{Q}_+^{ab}$ qui vérifient la conjecture de Gross-Kuz'min en ℓ sont logarithmiquement principales.

Et un résultat analogue vaut pour les classes logarithmiques de rayons dans le cas modéré.

REMERCIEMENTS

Je remercie le rapporteur pour ses précieux commentaires destinés à améliorer ce travail.

1 Complément sur les classes logarithmiques de rayons

Classiquement, le groupe des classes d'idéaux d'un corps de nombres K est défini comme conoyau Cl_K^{ord} du morphisme naturel partant du groupe multiplicatif $K^\times$ à valeurs dans le groupe des idéaux I_K donné par la famille des valuations $\nu = (\nu_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in Pl_K^\circ}$ attachées aux places finies de K.

$$1 \to E_K \to K^\times \xrightarrow{\nu} I_K \to Cl_K^{\mathrm{ord}} \to 1.$$

Fixons maintenant un nombre premier ℓ. Par produit tensoriel avec $\mathbb{Z}_\ell$, le ℓ-sous-groupe de Sylow $\mathcal{C}\ell_K^{ord}$ de Cl_K^{ord} apparaît alors comme conoyau du morphisme ν étendu au tensorisé $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} K^\times$ et à valeurs dans le $\mathbb{Z}_\ell$-module libre construit sur ces mêmes places : $\mathcal{D}\ell_K = \oplus_{\mathfrak{p}\in Pl_K^\circ}\mathbb{Z}_\ell\mathfrak{p}$.

Le ℓ-groupe des classes logarithmiques est le groupe analogue $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ obtenu en remplaçant les valuations classiques $\nu_\mathfrak{p}$ par leurs homologues ℓ-adiques $\widetilde{\nu}_\mathfrak{p}$ définis à partir des logarithmes des valeurs absolues ℓ-adiques et en se restreignant aux diviseurs de degré nul (cf. [9, 10]) :

$$1 \to \widetilde{\mathcal{E}}_K \to \mathcal{R}_K \xrightarrow{\widetilde{\nu}} \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K \to \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \to 1.$$

Pour chaque place finie $\mathfrak{p}$ de K, notons comme plus haut $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} = \varprojlim K_\mathfrak{p}^\times / K_\mathfrak{p}^{\times \ell^n}$ le compactifié ℓ-adique du groupe multiplicatif $K_\mathfrak{p}^\times$ et $\mathcal{J}_K = \prod_\mathfrak{p}^{res} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ le ℓ-adifié du groupe des idèles de K. Introduisons enfin la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K^c de K.

Du point de vue global, la surjection canonique du ℓ-adifié $\mathcal{J}_K$ du groupe des idèles de K dans le groupe procyclique $\mathrm{Gal}(K^c/K) \simeq \mathbb{Z}_\ell$ fournit un épimorphisme *degré* :

$$\deg : \mathcal{J}_K \to \mathbb{Z}_\ell\,;$$

dont le noyau $\widetilde{\mathcal{J}}_K$ est, par construction, le sous-groupe normique de $\mathcal{J}_K$ attaché à K^c. Son quotient

$$\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K = \widetilde{\mathcal{J}}_K / \widetilde{\mathcal{U}}_K$$

par le sous-groupe $\widetilde{\mathcal{U}}_K = \prod_\mathfrak{p} \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$ est le *ℓ-groupe des diviseurs logarithmiques de degré nul*. L'image

$$\mathcal{P}\ell_K \simeq \mathcal{R}_K / \widetilde{\mathcal{E}}_K$$

de $\mathcal{R}_K$ dans $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_k$ est le *sous-groupe des diviseurs logarithmiques principaux*. Et le quotient

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K / \mathcal{P}\ell_K \simeq \widetilde{\mathcal{J}}_K / \textstyle\prod_\mathfrak{p} \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p} \mathcal{R}_K$$

est, par construction, le *ℓ-groupe des classes logarithmiques du corps K*. La *conjecture de Gross-Kuz'min* pour le corps K et le premier ℓ en postule la finitude (cf. [9, 10, 12]).

Du point de vue local, le noyau $\mathcal{U}_\mathfrak{p}$ de $\nu_\mathfrak{p}$ dans $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ (autrement dit le sous-groupe des unités de $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$) est le groupe de normes associé à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension non ramifiée de $K_\mathfrak{p}$; tandis que le noyau $\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$ de $\widetilde{\nu}_\mathfrak{p}$ (i.e. le sous-groupe des unités logarithmiques) correspond, lui, à sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique. Par analogie avec le cas classique, il est commode de dire qu'une ℓ-extension localement cyclotomique est *logarithmiquement non-ramifiée*.

Par la Théorie ℓ-adique du corps de classes (cf. [6, 9, 10]), le ℓ-groupe des classes logarithmiques d'idéaux s'interprète comme groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{lc}/K^c)$ de la pro-ℓ-extension abélienne localement cyclotomique maximale K^{lc} de K relativement à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K^c. En particulier K^{lc} est la plus grande pro-ℓ-extension abélienne de K qui est complètement décomposée au-dessus de K^c, i.e. logarithmiquement non-ramifiée sur K. Plus généralement :

Définition 1. *Étant donné un ensemble fini T_K d'idéaux premiers de K étrangers à ℓ et $\mathfrak{m}_K$ le produit $\prod_{\mathfrak{q}_K\in T_K} \mathfrak{q}_K$, le ℓ-groupe des classes logarithmiques de rayons modulo $\mathfrak{m}$ est le quotient*

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K} = \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K} / \mathcal{P}\ell_K^{\mathfrak{m}_K}$$

du $\mathbb{Z}_\ell$-module $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$ construit sur les diviseurs logarithmiques étrangers à T_K par l'image $\mathcal{P}\ell_K^{\mathfrak{m}_K}$ du sous-module T_K-infinitésimal $\mathcal{R}_K^{\mathfrak{m}_K} = \left\{x \in \mathcal{R}_K \mid s_{\mathfrak{q}_K}(x) = 1\ \forall \mathfrak{q}_K \in T_K\right\}$ de $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} K^\times$.

Scolie 2. *Le ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}}$ s'interprète comme le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\widetilde{H}_K^T/K^c)$ attaché à l'extension abélienne T-logarithmiquement ramifiée (i.e. non-ramifiée au sens logarithmique en dehors de T) maximale $\widetilde{H}_K^{T_K}$ attachée à K relativement à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K^c.*

Preuve. Par un calcul immédiat, on a, en effet : $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K} = \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K} / \mathcal{P}\ell_K^{\mathfrak{m}_K} \simeq \widetilde{\mathcal{J}}_K / \prod_{\mathfrak{q}_K \notin T_K} \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}_K} \mathcal{R}_K$.

2 Énoncé du résultat principal et stratégie de preuve

La situation considérée est la suivante : ℓ est un nombre premier fixé ; $K/\boldsymbol{k}$ désigne une extension galoisienne de corps de nombres ; et $T = T_{\boldsymbol{k}}$ est un ensemble fini de places finies de $\boldsymbol{k}$ ne divisant pas ℓ. Pour chaque extension finie N de $\boldsymbol{k}$, nous notons T_N l'ensemble des premiers de N au-dessus de T et $\mathfrak{m}_N = \prod_{\mathfrak{q}_N \in T_N} \mathfrak{q}_N$ leur produit.

Nous nous proposons de faire capituler le ℓ-groupe des classes logarithmiques de rayons attachées à K par composition avec une ℓ-extension *abélienne* F de $\boldsymbol{k}$; plus précisément de prouver que $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$ a une image triviale dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L}$ pour $L = KF$ et une infinité de telles extensions F.

Néanmoins, pour des raisons spécifiques aux classes logarithmiques, il est naturel pour cela de restreindre notre ambition aux classes relatives :

Définition 3. *Par sous-groupe des classes relatives du ℓ-groupe des classes logarithmiques de rayons modulo $\mathfrak{m}_K$ nous entendons le noyau $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K/\boldsymbol{k}}^{\mathfrak{m}_K}$ de l'application norme $N_{K/\boldsymbol{k}} : \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K} \to \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\boldsymbol{k}}^{\mathfrak{m}_{\boldsymbol{k}}}$.*

Rappelons enfin que la conjecture de Gross-Kuz'min pour le premier ℓ et le corps N revient à postuler la finitude du ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_N$ attaché à ce corps.

Cela étant, le résultat principal de cette note peut s'énoncer comme suit :

Théorème 4. *Soient K un corps de nombres qui satisfait la conjecture de Gross-Kuz'min pour un premier ℓ et $\boldsymbol{k}$ un sous-corps tel que $K/\boldsymbol{k}$ soit complètement décomposé en au moins une place à l'infini. Pour tout ensemble fini T de places de $\boldsymbol{k}$ ne divisant pas ℓ, il existe une infinité de ℓ-extensions abéliennes $F/\boldsymbol{k}$ complètement décomposées en toutes les places à l'infini, telles que le sous-groupe relatif $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K/\boldsymbol{k}}^{\mathfrak{m}_K}$ du ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$ des classes logarithmiques de rayons modulo $\mathfrak{m}_K = \prod_{\mathfrak{q}_K \in T_K} \mathfrak{q}_K$ capitule dans le compositum $L = FK$.*

Corollaire 5. *Sous les hypothèses du Théorème, dès lors que le ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\boldsymbol{k}}^{\mathfrak{m}_{\boldsymbol{k}}}$ des classes logarithmiques de rayons du corps de base $\boldsymbol{k}$ est trivial, le ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$ entier capitule dans FK.*

Venons-en maintenant à la stratégie de la preuve. Elle est essentiellement analogue à celle utilisée par Bosca pour principaliser les classes d'idéaux (cf. [2, 3]) et récemment étendue aux classes de rayons classiques (cf. [14]) avec toutefois quelques complications, la première étant que le pro-ℓ-groupe des classes logarithmiques sans restriction de degré, disons $\mathcal{C}\ell_K^{\log} \simeq \mathrm{Gal}(K^{lc}/K)$, est infini : dans le cas des groupes classes d'idéaux ou de rayons, qui sont finis, il est toujours possible de représenter une classe donnée par un idéal premier (auquel on impose des conditions supplémentaires ad hoc). Mais c'est impossible dans le cas logarithmique, les diviseurs premiers n'étant jamais de degré nul. Il faut donc biaiser.

Étant donnée une classe (de degré nul) $[\,\widetilde{\mathfrak{d}}_K]$ dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$, un entier n (arbitrairement grand) ayant été choisi, nous pouvons cependant écrire

$$[\,\widetilde{\mathfrak{d}}_K] = [\,\widetilde{\mathfrak{p}}_K] + \ell^n [\,\widetilde{\mathfrak{b}}_K],$$

avec $\mathfrak{p}_K$ premier pour un diviseur logarithmique convenable $\widetilde{\mathfrak{b}}_K$. Notant alors $\mathfrak{p}$ l'unique diviseur premier de $\boldsymbol{k}$ au-dessous de $\mathfrak{p}_K$, puis imposant à la ℓ-extension cyclique $F_{\mathfrak{d}}/\boldsymbol{k}$ d'être logarithmiquement non-ramifiée en dehors de $\mathfrak{p}$ et d'avoir pour indice de ramification logarithmique $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(F_{\mathfrak{d}}/\boldsymbol{k}) = \ell^n$, nous obtenons dans le pro-ℓ-groupe des diviseurs logarithmiques du compositum $L_{\mathfrak{d}} = F_{\mathfrak{d}}K$ l'identité entre diviseurs : $\widetilde{\mathfrak{p}}_K = \ell^n\, \widetilde{\mathfrak{a}}_{L_{\mathfrak{d}}}$, pour un certain diviseur ambige $\widetilde{\mathfrak{a}}_{L_{\mathfrak{d}}}$, ainsi dénommé car invariant par $\mathrm{Gal}(F_{\mathfrak{d}}/\boldsymbol{k})$. En fin de compte, il vient :

$$[\,\widetilde{\mathfrak{d}}_K] = \ell^n [\,\widetilde{\mathfrak{a}}_{L_{\mathfrak{d}}}] + \ell^n [\,\widetilde{\mathfrak{b}}_K] = \ell^n [\,\widetilde{\mathfrak{a}}_{L_{\mathfrak{d}}} + \widetilde{\mathfrak{b}}_K],$$

dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{L_{\mathfrak{d}}}^{\mathfrak{m}_{L_{\mathfrak{d}}}}$, pour un certain diviseur ambige $\widetilde{\mathfrak{a}}_{L_{\mathfrak{d}}} + \widetilde{\mathfrak{b}}_K$; de sorte que $\widetilde{\mathfrak{d}}_K$ se principalise dans $L_{\mathfrak{d}}$, dès lors que ℓ^n annule le sous-groupe ambige qui en contient la classe.

Finalement, prenant le compositum F des $F_{\mathfrak{d}}$ pour un système de représentants de générateurs de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$ et posant $L = FK$, on obtient bien un corps principalisant pour $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$.

La première étape consiste donc à préciser le nombre de classes d'ambiges dans une ℓ-extension cyclique, pour pouvoir le majorer indépendamment de n sous certaines conditions.

3 La formule des classes logarithmiques d'ambiges

Nous reprenons ci-dessous, en les modifiant légèrement pour les adapter aux classes logarithmiques de rayons, les calculs de classes invariantes effectués dans [9].

Supposons donc fixés un nombre premier ℓ et une ℓ-extension cyclique de corps de nombres L/K ; donnons-nous un ensemble fini T_K d'idéaux premiers de K ne divisant pas ℓ notons T_L l'ensemble des premiers de L au-dessus de $T_K^{(\ell)}$; posons enfin $\mathfrak{m}_K = \prod_{\mathfrak{q}_K \in T_K} \mathfrak{q}_K$ et $\mathfrak{m}_L = \prod_{\mathfrak{q}_L \in T_L} \mathfrak{q}_L$. Le résultat logarithmique s'énonce alors, en analogie avec le résultat classique (cf. [14], Prop. 3) :

Proposition 6. *Dans une ℓ-extension cyclique L/K de corps de nombres, le nombre de classes logarithmiques de rayons dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L}$ qui sont représentées par des diviseurs logarithmiques ambiges (i.e. invariants par $C = \mathrm{Gal}(L/K)$) est donné sous la conjecture de Gross-Kuz'min par la formule :*

$$(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L C} : \mathcal{P}\ell_L^{\mathfrak{m}_L C}) \;=\; |\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}| \, \frac{\prod_{\mathfrak{p}_\infty} d_{\mathfrak{p}_\infty}(L/K) \prod_{\mathfrak{p}_\circ \nmid \mathfrak{m}} \tilde{e}_{\mathfrak{p}_\circ}(L/K)}{\big(\deg_L \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L C} : \deg_L \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}\big)\,\big(\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\mathfrak{m}_K} : N_{L/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L})\big)}$$

Dans celle-ci $d_{\mathfrak{p}_\infty}$ désigne le degré local et $\tilde{e}_{\mathfrak{p}_\circ}$ l'indice de ramification logarithmique ; $\mathfrak{p}_\infty$ parcourt les places à l'infini de K et $\mathfrak{p}_\circ$ les places étrangères à $\mathfrak{m}_K$ logarithmiquement ramifiées dans L/K.

Preuve. Écrivons : $(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L C} : \mathcal{P}\ell_L^{\mathfrak{m}_L C}) \;=\; (\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L C} : \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K})\,(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K} : \mathcal{P}\ell_K^{\mathfrak{m}_K})\,/\,(\mathcal{P}\ell_L^{\mathfrak{m}_L C} : \mathcal{P}\ell_K^{\mathfrak{m}_K})$.

— L'indice $(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L C} : \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K})$ se calcule comme suit : dans la suite exacte courte canonique

$$1 \to \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L C}/\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K} \to \mathcal{D}\ell_L^{\mathfrak{m}_L C}/\mathcal{D}\ell_K^{\mathfrak{m}_K} \to \mathcal{D}\ell_L^{\mathfrak{m}_L C}/\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L C}\mathcal{D}\ell_K^{\mathfrak{m}_K} \to 1,$$

le terme de droite s'identifie via l'application *degré* au quotient $\deg_L \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L C} / \deg_L \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$. Et le groupe $\mathcal{D}\ell_L^{\mathfrak{m}_L C}$ des diviseurs logarithmiques ambiges étrangers à $\mathfrak{m}_L$ est engendré par les sommes $\sum_{\mathfrak{p}_L | \mathfrak{p}_K} \mathfrak{p}_L = \tilde{e}_{\mathfrak{p}_K}^{-1}(L/K)\,\mathfrak{p}_K$, lorsque $\mathfrak{p}_K$ décrit l'ensemble des premiers de K qui ne divisent pas $\mathfrak{m}_K$, d'où :

$$(\mathcal{D}\ell_L^{\mathfrak{m}_L C} : \mathcal{D}\ell_K^{\mathfrak{m}_K}) = \prod_{\mathfrak{p}_\circ \nmid \mathfrak{m}_K} \tilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K).$$

— Le quotient $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}/\mathcal{P}\ell_K^{\mathfrak{m}_K}$ est tout simplement le ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$ des classes logarithmiques de K, lequel est fini sous la conjecture de Gross-Kuz'min dans K.

— Enfin, tout comme dans le cas classique (cf. [14]), le lemme du serpent, appliqué ici à la suite exacte de cohomologie associée à la suite courte qui définit le sous-groupe principal

$$1 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L} \longrightarrow \mathcal{R}_L^{\mathfrak{m}_L} \longrightarrow \mathcal{P}\ell_L^{\mathfrak{m}_L} \longrightarrow 1,$$

montre que le quotient $\mathcal{P}\ell_L^{\mathfrak{m}_L C}/\mathcal{P}\ell_K^{\mathfrak{m}_K}$ s'identifie au premier groupe de cohomologie des unités logarithmiques $T_L^{(\ell)}$-infinitésimales $H^1(C, \widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L})$:

$$\mathcal{P}\ell_L^{\mathfrak{m}_L C}/\mathcal{P}\ell_K^{\mathfrak{m}_K} \simeq H^1(C, \widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L}),$$

dont l'ordre est le produit de celui du groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\mathfrak{m}_K}/N_{L/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L})) \simeq H^2(C, \widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L})$ par le quotient de Herbrand $q(C, \widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L})$, lequel ne dépend que du caractère des unités logarithmiques. Sous la conjecture de Gross-Kuz'min, ce dernier est donné par la formule (cf. [9], Th. 3.6) :

$$\chi_{\widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L}} = \chi_{\widetilde{\mathcal{E}}_L} = \sum_{\mathfrak{p}_\infty} \mathrm{Ind}_{D_{\mathfrak{p}_\infty}}^C 1_{D_{\mathfrak{p}}},$$

comme somme d'induits attachés aux sous-groupes de décomposition des places à l'infini de K. Il vient donc ici :

$$q(C, \widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L}) = q(C, \widetilde{\mathcal{E}}_L) = \prod_{\mathfrak{p}_\infty} d_{\mathfrak{p}_\infty}(L/K).$$

D'où la formule annoncée.

Remarque. Dans l'expression obtenue, le facteur $\big(\deg_L \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L C} : \deg_L \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}\big)$ vient remplacer le facteur $[L : K]$ au dénominateur de la formule analogue pour les classes de rayons ordinaires. Lorsque l'extension L/K est totalement ramifiée au sens logarithmique en un diviseur *primitif* $\mathfrak{p}_K$ (i.e. tel que $\deg_K \mathfrak{p}_K$ engendre $\mathrm{Gal}(K^c/K)$) qui ne divise pas $\mathfrak{m}_K$, il y a même égalité :

$$\big(\deg_L \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L C} : \deg_L \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}\big) = [L^c : K^c] = [L : K].$$

En général, cependant, on a simplement des relations de divisibilité.

4 Classes relatives d'ambiges et modules équivalents

Revenons au problème de la principalisation. En analogie avec le cas classique, nous cherchons L comme compositum FK pour une ℓ-extension cyclique $F/\boldsymbol{k}$ logarithmiquement ramifiée en une unique place $\mathfrak{p}$ de $\boldsymbol{k}$, complètement décomposée dans $K/\boldsymbol{k}$, ayant par ailleurs un indice de ramification logarithmique $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(F/\boldsymbol{k}) = \ell^n$, avec n assez grand qui sera précisé ultérieurement.

Malheureusement la condition de décomposition requise, en tuant le facteur degré au dénominateur, ruine toute possibilité de contrôler le quotient indépendamment de n en toute généralité.

Pour pallier cette difficulté, nous allons nous restreindre au sous-groupe des classes relatives, i.e. au noyau de la norme arithmétique $N_{K/\boldsymbol{k}}$ attachée à l'extension $K/\boldsymbol{k}$ (cf. Définition 3).

Notons d l'ordre de $G = \mathrm{Gal}(K/\boldsymbol{k})$; puis $\nu = \sum_{\sigma\in G}\sigma$ l'élément de G qui correspond à la norme $N_{K/\boldsymbol{k}}$; et $\bar\nu = \sum_{\sigma\in G}(1-\sigma) = d-\nu$. Le noyau de la norme *arithmétique* $N_{K/\boldsymbol{k}}$ est évidemment compris entre le noyau de la norme *algébrique* ν et l'image de l'opérateur complémentaire $\bar\nu$:

$$\mathrm{Im}\,\bar\nu \subset \mathrm{Ker}\,N_{K/\boldsymbol{k}} \subset \mathrm{Ker}\,\nu.$$

— Lorsque l'ordre d de G est étranger à ℓ, il est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}_\ell$, de sorte que les éléments $e_\nu = \frac{\nu}{d}$ et $e_{\bar\nu} = \frac{\bar\nu}{d}$ sont deux idempotents centraux complémentaires de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G]$. Et il vient donc : $\mathrm{Im}\,\bar\nu = \mathrm{Im}\,e_{\bar\nu} = \mathrm{Ker}\,e_\nu = \mathrm{Ker}\,\nu$. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de distinguer entre noyau arithmétique et noyau algébrique de la norme. Mieux encore, toute suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell[G]$-modules donne aussitôt deux suites exactes, l'une restreinte aux noyaux de la norme ν, l'autre aux images, par action des deux idempotents précédents.

— Dans le cas contraire, il faut distinguer. Cependant, eu égard au problème qui nous préoccupe, il est possible de contourner cette difficulté supplémentaire de la façon suivante :

Convention. *Convenons de dire que deux $\mathbb{Z}_\ell[G]$ modules finis M et N dépendant du paramètre n sont équivalents lorsque la ℓ-valuation du quotient de leurs ordres est bornée indépendamment de n ; ce que nous écrivons :*

$$M \sim N \iff |M| \approx |N| \iff v_\ell\big(\tfrac{|M|}{|N|}\big) \text{ borné (indépendamment de } n).$$

Lemme 7. *Pour tout $\mathbb{Z}_\ell[G]$-module fini M de $\mathbb{Z}_\ell$-rang borné (indépendamment de n), le noyau ${}_\nu M$ de ν et l'image $M^{\bar\nu}$ de $\bar\nu$ sont équivalents ; de même le noyau ${}_{\bar\nu}M$ de $\bar\nu$ et l'image M^ν de ν.*

Preuve. L'identité $\nu+\bar\nu = d$ montre que les deux quotients ${}_\nu M/M^{\bar\nu}$ et ${}_{\bar\nu}M/M^\nu$ sont tués par d.

En conséquence, quitte à travailler à un borné près, il est toujours possible, dès lors qu'on ne considère que des modules de rang borné (indépendamment de n), de raisonner comme si la condition de semi-simplicité $\ell \nmid d$ était toujours remplie. En particulier, pour toute suite exacte

$$1 \to N \to M \to P \to 1$$

de $\mathbb{Z}_\ell[G]$-modules finis de $\mathbb{Z}_\ell$-rang borné (indépendamment de n), on a les équivalences :

$$M^{\bar\nu} \sim {}_\nu M \sim {}_\nu N \oplus {}_\nu P \sim N^{\bar\nu} \oplus P^{\bar\nu} \qquad \& \qquad M^\nu \sim {}_{\bar\nu}M \sim {}_{\bar\nu}N \oplus {}_{\bar\nu}P \sim N^\nu \oplus P^\nu.$$

entre pseudo-composantes *relatives* (i.e. tuées par ν) à gauche et *induites* (tuées par $\bar\nu$) à droite.

Reprenons maintenant les calculs de classes d'ambiges effectués dans la section précédente. Dans la situation galoisienne considérée ici, les divers ℓ-groupes qui interviennent dans la preuve de la Proposition 6 sont des $\mathrm{Gal}(L/\boldsymbol{k})$-modules fixés par $C = \mathrm{Gal}(L/K)$, i.e. des $\mathbb{Z}_\ell[G]$-modules finis. En nous restreignant aux pseudo-composantes relatives (i.e. tuées par $\nu = \sum_{\sigma\in G}\sigma$) et en négligeant tout les modules d'ordre borné indépendamment de n, nous obtenons immédiatement :

Proposition 8. *Sous les hypothèses énoncées en début de section, l'ordre de la pseudo-composante relative ${}_\nu\big(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L C}/\mathcal{P}\ell_L^{\mathfrak{m}_L C}\big)$ du sous-groupe des classes logarithmiques de rayons dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L}$ qui sont représentées par des diviseurs logarithmiques ambiges (i.e. invariants par $C = \mathrm{Gal}(L/K)$) est donné sous la conjecture de Gross-Kuz'min (pour le premier ℓ et le corps L) par la formule :*

$$\big|\,{}_\nu\big(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L C}/\mathcal{P}\ell_L^{\mathfrak{m}_L C}\big)\,\big| \approx \ell^{n(d-1)}/\big({}_\nu\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\mathfrak{m}_K}/({}_\nu\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\mathfrak{m}_K} \cap N_{L/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L}))\big).$$

Preuve. De l'isomorphisme $\mathcal{D}\ell_L^{\mathfrak{m}_L C}/\mathcal{D}\ell_K^{\mathfrak{m}_K} \simeq (\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})[G]$, on tire : $|\,{}_\nu(\mathcal{D}\ell_L^{\mathfrak{m}_L C}/\mathcal{D}\ell_K^{\mathfrak{m}_K})\,| = \ell^{n(d-1)}$.

5 Minoration de l'indice normique des unités

Sous la conjecture de Gross-Kuz'min (pour le premier ℓ et le corps L) le théorème de représentation des unités logarithmiques rappelé plus haut (cf. [9], Th. 3.6) appliqué à l'extension galoisienne L/K nous assure que $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ et donc son sous-module d'indice fini $\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\mathfrak{m}_K}$ contiennent un sous-module monogène $\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon} = \varepsilon^{\mathbb{Z}_\ell[G]}$ de caractère χ_G^{aug}.

Rappelons que $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ est contenu dans le ℓ-adifié $\mathcal{E}'_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'_K$ du groupe des ℓ-unités de K (mais qu'il n'est pas en général, comme l'est $\mathcal{E}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_K$, le ℓ-adifié d'un sous-groupe de E'_K). Soit $n > 0$ un entier non nul ; choisissons dans le groupe E'_K un système de représentants R_K^ε du quotient $\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon}/\big(\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon} \cap \mathcal{E}'^{\ell^n}_K\big)$; notons μ_{ℓ^n} le ℓ-groupe des racines ℓ^n-ièmes de l'unité ; et considérons l'extension $K_n^\varepsilon = K\big[\mu_{\ell^n}, \sqrt[\ell^n]{R_K^\varepsilon}\,\big]$ engendrée sur $K_n = K[\mu_{\ell^n}]$ par les racines ℓ^n-ièmes des éléments de R_K^ε. Notons enfin $\widetilde{\mathcal{E}}^{\circ}_{K_n}$ la racine de $\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon}$ dans $\widetilde{\mathcal{E}}_{K_n}$, puis $\ell^{\tilde{\delta}_{\mathfrak{m}}}$ l'indice $(\widetilde{\mathcal{E}}^{\circ}_{K_n} : \widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon}\mu_{K_n})$, qui est ultimement indépendant de n. Par construction, le degré de l'extension kummérienne K_n^ε/K_n est alors donné, disons pour tout $n \geq n_K$, par la formule :

$$[K_n^\varepsilon : K_n] \;=\; |\,\mathrm{Rad}(K_n^\varepsilon/K_n)| = \big(\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon} : \widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon\,\ell^n}\big)/\big(\widetilde{\mathcal{E}}^{\circ}_{K_n} : \widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon}\mu_{K_n}\big) \;=\; \ell^{n(d-1)}/\ell^{\tilde{\delta}_{\mathfrak{m}}}.$$

Tout comme dans [14] §4, introduisons la sous-extension élémentaire K_n^e/K_n de K_n^ε/K_n ; notons $(\eta_1 K_n^{\times\ell}, \cdots, \eta_t K_n^{\times\ell})$ une $\mathbb{F}_\ell$-base de $\mathrm{Rad}(K_n^e/K_n) \subset K_n^\times/K_n^{\times\ell}$ représentée par des conjugués $\eta_i = \varepsilon^{\sigma_i}$ de ε dont $\eta_1 = \varepsilon$; et définissons $\bar{\tau}_n \in \mathrm{Gal}(K_n^e/K_n)$ par : $\sqrt[\ell]{\eta_1}^{\,(\bar{\tau}_n - 1)} = \zeta_\ell \quad \& \quad \sqrt[\ell]{\eta_i}^{\,(\bar{\tau}_n - 1)} = 1$, pour $i = 2, \cdots, t$. Faisons choix enfin d'un relèvement τ_n de $\bar{\tau}_n$ dans G_n. Il est clair que les conjugués de $\bar{\tau}_n$ engendrent $G_n/G_n^\ell = \mathrm{Gal}(K_n^e/K_n)$ donc que les conjugués de τ_n engendrent G_n.

Supposons choisi enfin un entier $m = m_K$ indépendant de n et soit alors une place $\mathfrak{p}_{_K} \nmid 2\ell\mathfrak{m}_{_K}$ de K au-dessus d'un premier p, complètement décomposé dans $K_n/\mathbb{Q}$, telle que l'application de Frobenius associée à l'extension abélienne K_n^ε/K_n envoie l'une des places $\mathfrak{p}_{_{K_n}}$ de K_n au-dessus de $\mathfrak{p}_{_K}$ sur la puissance ℓ^m-ième de l'automorphisme τ_n. Notant $s_{\mathfrak{m}_K}$ l'épimorphisme de semi-localisation de $\mathcal{R}_K$ sur $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{m}_K}} = \prod_{\mathfrak{q}_K | \mathfrak{m}_K} \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{q}_K}}$, nous concluons à l'identité :

$$\big\{\eta \in \widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon} \,|\, s_{\mathfrak{m}_K}(\eta) \in \prod_{\sigma \in G} \mathcal{U}^{\ell^n}_{K_{\mathfrak{p}_K^\sigma}}\big\} = \big\{\eta \in \widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon} \,|\, s_{\mathfrak{m}_K}(\eta) \in \prod_{\sigma \in G} \mathcal{R}^{\ell^n}_{K_{\mathfrak{p}_K^\sigma}}\big\} = \widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon} \cap \mathcal{R}_{K_n}^{\times \ell^{n-m}}.$$

Si donc la ℓ-extension cyclique $F/\boldsymbol{k}$ est logarithmiquement non-ramifiée en dehors de la place $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\boldsymbol{k}}$ au-dessous de $\mathfrak{p}_K$ avec un indice de ramification logarithmique $\tilde{e}_{\mathfrak{p}}(F/\boldsymbol{k}) = \ell^n$, les unités logarithmiques de K qui sont normes dans l'extension cyclique L/K sont exactement celles qui sont des puissances ℓ^n-ièmes locales aux places au-dessus de $\mathfrak{p}$; et il vient :

$$\big(\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon} : \widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon} \cap N_{L/K}(\mathcal{R}_L)\big) = \big(\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon} : \widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon} \cap {}^{-1}s_{\mathfrak{m}_K}\big(\prod_{\sigma \in G} \mathcal{U}^{\ell^n}_{K_{\mathfrak{p}_K^\sigma}}\big)\big) = \big(\,\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon} : \widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon} \cap \mathcal{R}_{K_n}^{\times \ell^{n-m}}\big) = \ell^{(n-m)(d-1)}/\ell^{\tilde{\delta}_{\mathfrak{m}}}$$

d'où la minoration (au sens de la divisibilité) :

$$\big|\,{}_\nu\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\mathfrak{m}}/\big({}_\nu\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\mathfrak{m}} \cap N_{L/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}})\big)\,\big| \succ \big(\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon} : \widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon} \cap N_{L/K}(\mathcal{R}_L)\big) \succ \ell^{(n-m)(d-1) - \tilde{\delta}_{\mathfrak{m}}}.$$

Il résulte alors de la Proposition 8 que l'ordre du ℓ-groupe ${}_\nu\big(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L C}/\mathcal{P}\ell_L^{\mathfrak{m}_L C}\big)$ est borné indépendamment de n. En résumé, sous la conjecture de Gross-Kuz'min dans L, il vient :

Proposition 9. *Soient ℓ un nombre premier, $K/\boldsymbol{k}$ une extension galoisienne de corps de nombres dans laquelle une au moins des places à l'infini est complètement décomposée, $T = T_{\boldsymbol{k}}$ un ensemble fini de premiers de $\boldsymbol{k}$ qui ne divisent pas ℓ et T_K l'ensemble des premiers de K au-dessus de T ; puis $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{k}} = \prod_{\mathfrak{q}_{\boldsymbol{k}} \in T_{\boldsymbol{k}}} \mathfrak{q}_{\boldsymbol{k}}$ et $\mathfrak{m}_K = \prod_{\mathfrak{q}_K \in T_K} \mathfrak{q}_K$. Soit enfin $m = m_K$ un entier arbitraire.*

Il existe alors un entier effectif n_K tel que pour tout $n \geq n_K$, si $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_k \nmid 2\ell\mathfrak{m}_{\boldsymbol{k}}$ est un idéal premier de $\boldsymbol{k}$ au-dessus d'un premier p de $\mathbb{Q}$ complètement décomposé dans l'extension $K[\zeta_{\ell^n}]/\mathbb{Q}$ et $F/\boldsymbol{k}$ une ℓ-extension cyclique $\mathfrak{p}$-logarithmiquement ramifiée avec pour indice de ramification logarithmique $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(F/\boldsymbol{k}) = \ell^n$ et tel que l'application de Frobenius envoie l'une des places $\mathfrak{p}_K$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ sur une puissance donnée $\tau_n^{\ell^m}$ de l'automorphisme τ_n, l'ordre du sous-groupe relatif de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L}$ attaché au compositum $L = \boldsymbol{k}F$ qui est engendré par les classes logarithmiques des diviseurs invariants par $C = \mathrm{Gal}(L/K)$ soit majoré indépendamment de n :

$$\big(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L C} : \mathcal{P}\ell_L^{\mathfrak{m}_L C}\big) \prec \ell^{\,\tilde{c}_{K,\mathfrak{m}}}.$$

6 Construction de l'extension principalisante

Résumons : étant donnée une extension galoisienne $K/\boldsymbol{k}$ de corps de nombres complètement décomposée en au moins une place à l'infini, un nombre premier ℓ et un diviseur $\mathfrak{m}_K$ de K sans facteur carré, étranger à ℓ et stable par $G = \mathrm{Gal}(K/\boldsymbol{k})$, ayant fait choix d'un sous-module E_K^{ε} de $E_K^{\mathfrak{m}_K}$ de caractère χ_G^{aug} et d'un entier $m = m_K$ indépendant de n, nous avons défini une constante $\widetilde{c}_{K,\mathfrak{m}_K}$; puis, pour une classe $[\mathfrak{d}_K]$ d'ordre ℓ-primaire dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$ et $n \geq \widetilde{c}_{K,\mathfrak{m}_K}$, nous cherchons :

— une place $\mathfrak{p}$ de $\boldsymbol{k}$ et une place $\mathfrak{p}_K$ de K au-dessus qui satisfasse les trois conditions suivantes :

  (i) $\mathfrak{p}_K$ est au-dessus d'un premier $p \neq \ell$ de $\mathbb{Q}$ complètement décomposé dans $K_n = K[\zeta_{\ell^n}]$;

  (ii) $\mathfrak{p}_K$ a même image que $\mathfrak{d}_K$ dans le quotient d'exposant ℓ^n de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$, i.e. a même image dans le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\widetilde{H}_n/K)$ de la sous-extension d'exposant ℓ^n de $\widetilde{H}_K^{\mathfrak{m}_K}/K$;

  (iii) l'une des places au-dessus $\mathfrak{p}_n$ dans K_n est d'image $\tau_n^{\ell^h}$ dans $\mathrm{Gal}\big(K_n\big[\sqrt[\ell^n]{E_K^{\varepsilon}}\big]/K_n\big)$;

— et une ℓ-extension $F/\boldsymbol{k}$ cyclique ∞-décomposée, logarithmiquement non-ramifiée en dehors de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}$-logarithmiquement ramifiée avec pour indice de ramification $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(F/\boldsymbol{k}) = \ell^n$.

Examinons d'abord cette dernière condition. Par la théorie ℓ-adique du corps de classes (cf. [10]), le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\widetilde{H}_k^{\mathfrak{p}}/\widetilde{H}_k)$ de la ℓ-extension abélienne $\mathfrak{p}$-logarithmiquement ramifiée ∞-décomposée maximale $\widetilde{H}_k^{\mathfrak{p}}$ du corps k relativement à sa sous-extension logarithmiquement non-ramifiée ∞-décomposée maximale $\widetilde{H}_k$ est donné par l'isomorphisme :

$$\mathrm{Gal}(\widetilde{H}_k^{\mathfrak{p}}/\widetilde{H}_k) \simeq \big(\mathcal{R}_{\boldsymbol{k}} \prod_{\mathfrak{q}\nmid\infty} \widetilde{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{k}_{\mathfrak{q}}} \prod_{\mathfrak{q}|\infty} \mathcal{R}_{\boldsymbol{k}_{\mathfrak{q}}}\big)/\big(\mathcal{R}_{\boldsymbol{k}} \prod_{\mathfrak{q}\neq\mathfrak{p}} \widetilde{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{k}_{\mathfrak{q}}} \prod_{\mathfrak{q}|\infty} \mathcal{R}_{\boldsymbol{k}_{\mathfrak{q}}}\big) \simeq \mu_{\boldsymbol{k}_{\mathfrak{p}}}/s_{\mathfrak{p}}(\widetilde{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}),$$

où $\mu_{\boldsymbol{k}_{\mathfrak{p}}} = \widetilde{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{k}_{\mathfrak{p}}}$ est le ℓ-groupe des racines de l'unité dans $\boldsymbol{k}_{\mathfrak{p}}$ et $s_{\mathfrak{p}}(\widetilde{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}})$ l'image locale du groupe des unités globales. Or, le quotient obtenu est cyclique d'ordre ℓ^m pour un $m \geq n$ si et seulement si le complété $\boldsymbol{k}_{\mathfrak{p}}$ contient les racines ℓ^n-ièmes de l'unité et si les éléments de $\widetilde{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}$ sont des puissances ℓ^n-ièmes locales dans $\boldsymbol{k}_{\mathfrak{p}}$; ce qui a lieu dès que la place $\mathfrak{p}$ est complètement décomposée dans l'extension $\boldsymbol{k}\big[\zeta_{\ell^n}, \widetilde{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}^{\ell^{-n}}\big]/\boldsymbol{k}$. Lorsque c'est le cas, l'extension $\widetilde{H}_k^{\mathfrak{p}}/\boldsymbol{k}$ possède donc une sous-extension cyclique ∞-décomposée et $\mathfrak{p}$-logarithmiquement ramifiée avec pour indice de ramification $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(F/\boldsymbol{k}) = \ell^n$. En fin de compte, l'existence de F est donc assurée dès lors que l'on remplace la condition (i) par :

(i') $\mathfrak{p}_K$ est au-dessus d'un premier $p \neq \ell$ complètement décomposé dans $K_n\big[\widetilde{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}^{\ell^{-n}}\big]/\mathbb{Q}$.

Et tout le problème est alors de s'assurer de la compatibilité des trois conditions (i'), (ii) et (iii).

D'un côté, $\widetilde{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}$ et $\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon}$ étant en somme directe, les extensions $K_n\big[\widetilde{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}^{\ell^{-n}}\big]/K_n$ et $K_n\big[\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon\,\ell^{-n}}\big]/K_n$ sont bien linéairement disjointes. D'un autre côté, ce n'est pas nécessairement le cas des deux extensions $\widetilde{H}_K^{\mathfrak{m}}/K_n$ et $K_n\big[(\widetilde{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon})^{\ell^{-n}}\big]/K_n$. Ce défaut demeure cependant borné.

Pour voir cela, notons ℓ^{m_K} l'ordre de μ_K ; puis $K_\infty = K[\zeta_{\ell^\infty}]$ l'extension cyclotomique engendrée par toutes les racines d'ordre ℓ-primaire de l'unité. Observant que $\widetilde{H}_K^{\mathfrak{m}}/K$ est abélienne et que $K_n\big[(\widetilde{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon})^{\ell^{-n}}\big]/K$ est logarithmiquement non-ramifiée en dehors de ℓ, nous avons :

$$\widetilde{H}_K^{\mathfrak{m}} \cap K_n\big[(\widetilde{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon})^{\ell^{-n}}\big] = \widetilde{H}_K \cap K_n\big[(\widetilde{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon})^{\ell^{-m_K}}\big] \text{ pour } n \geq m_K.$$

Et $\mathrm{Gal}\big(\big[\widetilde{H}_K \cap K_n\big[(\widetilde{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon})^{\ell^{-m_K}}\big]/K_n\big)$ est un groupe abélien d'exposant divisant ℓ^{m_K}. Si donc nous définissons l'entier m introduit dans la section précédente en prenant $m = m_K$, la compatibilité de (i') avec (iii) est automatique. Celle de (i') avec (ii) est alors immédiate sous la condition supplémentaire :

(iv) $[\mathfrak{d}_K]$ est une puissance ℓ^{m_K}-ième dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$.

Lorsque cette dernière est remplie, le théorème de densité de Čebotarev (cf. [4] ou e.g. [23]) appliqué dans la clôture galoisienne de l'extension $\widetilde{H}_n\big[\zeta_{\ell^n}, (\widetilde{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon})^{\ell^{-m_K}}\big]/\mathbb{Q}$ nous assure l'existence d'une infinité de premiers p possédant une place $\mathfrak{p}_K$ au-dessus qui satisfait les conditions requises (i'), (ii) et (iii) ; et donc l'existence d'une infinité de ℓ-extensions $F/\boldsymbol{k}$ convenables. Ainsi :

Proposition 10. *La construction de F est possible dès lors que la classe $[\mathfrak{d}_K]$ est une puissance ℓ^{m_K}-ième dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$, où $\ell^{m_K} = |\,\mu_K|$ est l'ordre du ℓ-groupe des racines de l'unité dans K.*

7 Preuve conditionnelle du résultat principal

Nous supposons dans cette section que les corps qui interviennent satisfont tous la conjecture de Gross-Kuz'min (pour le premier ℓ). Nous verrons plus loin comment lever cette restriction.

Plaçons nous d'abord dans le cas galoisien. Sous la conjecture de Gross-Kuz'min, nous avons :

Théorème 11. *Étant donnés une extension galoisienne $K/\boldsymbol{k}$ de corps de nombres complètement décomposée en au moins une place à l'infini, un nombre premier ℓ et un diviseur $\mathfrak{m}_K$ de K sans facteur carré, étranger à ℓ et stable par $G = \mathrm{Gal}(K/\boldsymbol{k})$, pour chaque classe $[\widetilde{\mathfrak{d}}_K]$ d'ordre ℓ-primaire dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$, il existe une infinité de ℓ-extensions abéliennes ∞-décomposées $F/\boldsymbol{k}$ telles que la classe $[\widetilde{\mathfrak{d}}_K]$ se principalise dans le groupe de classes de rayons $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L}$ du compositum $L = FK$.*

La première étape consiste à se ramener au cas où $[\widetilde{\mathfrak{d}}_K]$ est une puissance ℓ^{m_K}-ième dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$:

Proposition 12. *Sous la conjecture de Gross-Kuz'min, quitte à grossir K par composition avec une ℓ-extension abélienne ∞-décomposée de $\mathbb{Q}$, on peut supposer $[\widetilde{\mathfrak{d}}_K] \in (\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K})^{\ell^h}$ avec h arbitaire.*

Preuve. Notons K^c la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de K ; puis $K_\infty = K[\zeta_{\ell^\infty}] = K^c[\zeta_{2\ell}]$ l'extension engendrée par les racines d'ordre ℓ-primaire de l'unité ; et considérons la pro-ℓ-extension $\widetilde{H}_K^{\mathfrak{m}_K}[\zeta_{2\ell}]$.

— Si ℓ est impair et K vérifie la conjecture de Gross-Kuz'min pour ℓ, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\widetilde{H}_K^{\mathfrak{m}_K}[\zeta_{2\ell}]/K$ s'identifie au produit direct du groupe cyclique $\Delta = \mathrm{Gal}(\widetilde{H}_K^{\mathfrak{m}_K}[\zeta_{2\ell}]/\widetilde{H}_K^{\mathfrak{m}_K})$, du ℓ-groupe fini $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K} \simeq \mathrm{Gal}(\widetilde{H}_K^{\mathfrak{m}_K}/K^c)$ et du groupe procyclique $\Gamma = \mathrm{Gal}(K^c/K) \simeq \mathbb{Z}_\ell$.

— Si ℓ vaut 2, toujours sous la conjecture de Gross-Kuz'min, il faut distinguer :
  — Si $\widetilde{H}_K^{\mathfrak{m}_K}$ ne contient pas $i = \zeta_4$, la même décomposition vaut encore avec $\Delta \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
  — Si $\widetilde{H}_K^{\mathfrak{m}_K}$ contient i, l'extension $K[i]/K$ est localement cyclotomique ; et en remplaçant K par $K[i] = K\mathbb{Q}[i]$, qui vérifie les mêmes hypothèses, on est ramené au cas précédent.

Soit alors $\widetilde{K}_h/K$ la sous-extension d'exposant ℓ^h de $\widetilde{H}_K^{\mathfrak{m}_K}[\zeta_{2\ell}]/K$. Dans tous les cas, le théorème de Čebotarev appliqué dans la clôture galoisienne de $\widetilde{K}_h$ sur $\mathbb{Q}$ nous assure l'existence d'un premier $\mathfrak{q}_K \nmid \ell\mathfrak{m}_K$ de K au-dessus d'un premier q de $\mathbb{N}$ complètement décomposé dans $K[\zeta_{2\ell^h}]/\mathbb{Q}$ de même image que $\mathfrak{d}_K$ dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}/\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K \ell^h}$ (en notations multiplicatives).

Maintenant, le sous-corps réel du corps cyclotomique $\mathbb{Q}[\zeta_{2\ell^h}]$ contient un unique sous-corps $F_\circ$ cyclique de degré ℓ^h et totalement ramifié en q. De plus, comme q est pris complètement décomposé dans $K/\mathbb{Q}$, la place $\mathfrak{q}_K$ est totalement ramifiée dans l'extension composée $KF_\circ/K$; de sorte que l'étendue $[\widetilde{\mathfrak{d}}_{KF_\circ}]$ de $[\widetilde{\mathfrak{d}}_K]$ est bien une puissance ℓ^h-ième dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{KF_\circ}^{\mathfrak{m}_{KF_\circ}}$.

Preuve du Théorème. Revenons aux notations additives. D'après la Proposition 12, nous pouvons supposer $[\widetilde{\mathfrak{d}}_K] \in \ell^{m_K}\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$ sans restreindre la généralité, en notant ℓ^{m_K} l'ordre du ℓ-groupe μ_K. La Proposition 10 nous assure alors pour n arbitrairement grand l'existence d'une infinité de ℓ-extensions cycliques ∞-décomposées F de $\boldsymbol{k}$ logarithmiquement ramifiées en un unique premier $\mathfrak{p}$ avec pour indice $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(F/\boldsymbol{k}) = \ell^n$, qui satisfont les conditions (i), (ii) et (iii) de la section précédente.

En particulier la classe $[\widetilde{\mathfrak{d}}_K]$ de $\mathfrak{d}_K$ dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$ est représentée modulo $\ell^n\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$ par l'un des $[K:\boldsymbol{k}]$ idéaux $\mathfrak{p}_K$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, lequel se ramifie logarithmiquement dans l'extension composée $L/K = KF/K$ avec pour indice ℓ^n, de sorte qu'il vient : $[\widetilde{\mathfrak{d}}_K] = [\widetilde{\mathfrak{p}}_K] + \ell^n[\widetilde{\mathfrak{r}}_K]$ et $\widetilde{\mathfrak{p}}_K = \ell^n\,\widetilde{\mathfrak{q}}_L$ pour un diviseur logarithmique $\widetilde{\mathfrak{q}}_L$ invariant par $C = \mathrm{Gal}(L/K)$. D'après la Proposition 9 l'étendue $[\widetilde{\mathfrak{d}}_L] = \ell^n\,[\widetilde{\mathfrak{q}}_L + \widetilde{\mathfrak{r}}_K]$ de $[\mathfrak{d}_K]$ à L est ainsi la classe principale dès qu'on a : $n \geq \widetilde{c}_{K,\mathfrak{m}}$.

Scolie 13. *La conclusion du Théorème vaut encore lorsque $K/\boldsymbol{k}$ n'est pas supposée galoisienne.*

Preuve. Partons d'une classe d'ordre ℓ-primaire $[\widetilde{\mathfrak{d}}_K]$; introduisons la clôture galoisienne $\bar{K}/\boldsymbol{k}$ de $K/\boldsymbol{k}$ et notons ℓ^h la ℓ-partie du degré de $\bar{K}/K$. D'après la Proposition 12, quitte à grossir K par composition avec une ℓ-extension abélienne de $\boldsymbol{k}$ (ce qui n'augmente pas h), nous pouvons supposer que $[\widetilde{\mathfrak{d}}_K]$ est une puissance ℓ^h-ième dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$, donc la norme dans $\bar{K}/K$ d'une classe $[\widetilde{\mathfrak{d}}_{\bar{K}}]$ de $\mathcal{C}\ell_{\bar{K}}^{\mathfrak{m}_{\bar{K}}}$. Donnons-nous maintenant un corps principalisant F pour $[\mathfrak{d}_{\bar{K}}]$, i.e. une ℓ-extension abélienne ∞-décomposée $F/\boldsymbol{k}$ telle que l'étendue $[\widetilde{\mathfrak{d}}_{F\bar{K}}]$ de $[\widetilde{\mathfrak{d}}_{\bar{K}}]$ soit la classe triviale. Alors l'étendue à FK de sa norme $N_{\bar{K}/(\bar{K}\cap FK)}([\widetilde{\mathfrak{d}}_{\bar{K}}])$ est la classe triviale de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{FK}^{\mathfrak{m}_{FK}}$. Or, on a :

$$[\widetilde{\mathfrak{d}}_K] = N_{\bar{K}/K}([\widetilde{\mathfrak{d}}_{\bar{K}}]) = N_{(\bar{K}\cap FK)/K}\big(N_{\bar{K}/(\bar{K}\cap FK)}(([\widetilde{\mathfrak{d}}_{\bar{K}}])\big)\,;$$

de sorte que $[\widetilde{\mathfrak{d}}_K]$ se principalise dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{FK}^{\mathfrak{m}_{FK}}$.

8 Retour sur la conjecture de Gross-Kuz'min

L'objet de cette section est de mieux cerner le rôle exact de la conjecture de Gross-Kuz'min dans les diverses étapes de la preuve du résultat principal sur la principalisation. À l'analyse, dans celles-ci, la conjecture intervient essentiellement pour trois points-clés :

(i) Pour assurer la finitude des ℓ-groupes de classes logarithmiques de degré nul

Bien entendu, la capitulation ne peut concerner que des classes d'ordre fini. Si donc l'on veut se dispenser de la conjecture de Gross-Kuz'min, il convient de remplacer le pro-ℓ-groupe des classes logarithmiques de rayons $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$ par son sous-groupe de torsion, disons $\widetilde{\mathcal{T}}_K^{\mathfrak{m}_K}$, qui est toujours fini.

Dans ce cas, la sous-extension de $\widetilde{H}_K^{\mathfrak{m}_K}$ fixée par $\widetilde{\mathcal{T}}_K^{\mathfrak{m}_K}$ n'est plus, a priori, la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K^c de K, mais simplement le compositum des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions localement cyclotomiques. Son groupe de Galois sur K^c est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre dont la dimension mesure précisément le défaut de la conjecture de Gross-Kuz'min dans le corps K (pour le premier ℓ fixé).

(ii) Pour construire le sous-module $\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon}$

L'existence d'un sous-module monogène $\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon}$ isomorphe à l'idéal d'augmentation sous l'hypothèse de décomposition d'une place à l'infini repose sur l'expression du caractère des unités logarithmiques sous la conjecture de Gross-Kuz'min dans K. Mais, ici encore, il n'est nullement nécessaire de s'appuyer sur la conjecture : il est bien connu, en effet, que le groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ contient un sous-groupe canonique, noté $\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\nu}$ dans [12] §7, dit groupe des normes universelles de Kuz'min, qui possède le rang et donc le caractère attendus. De ce fait, le sous-groupe d'indice fini $\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\nu} \cap \widetilde{\mathcal{E}}_K^{\mathfrak{m}_K}$ contient bien un sous-module de type $\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\varepsilon}$ indépendamment de la conjecture de Gross-Kuz'min.

(ii) Pour évaluer le quotient de Herbrand $q(C, \widetilde{\mathcal{E}}_K^{\mathfrak{m}_K})$

Ce point est le plus sensible : les identités des classes logarithmiques d'ambiges dans l'extension cyclique L/K de groupe de Galois C font apparaître le quotient $\mathcal{P}\ell_L^{\mathfrak{m}_L C}/\mathcal{P}\ell_K^{\mathfrak{m}_K} \simeq H^1(C, \widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L})$ dont l'ordre coïncide, sous la conjecture de Gross-Kuz'min *dans* L, avec celui du groupe $H^2(C, \widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L})$, le quotient de Herbrand $q(C, \widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L}) = q(C, \widetilde{\mathcal{E}}_L)$ du groupe d'unités logarithmiques $\widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L}$ valant alors 1.

Or, ce quotient ne dépend que du caractère du groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_L$. Si le groupe C est cyclique d'ordre, disons, ℓ^h, la décomposition semi-simple de l'algèbre de groupe

$$\mathbb{Q}_\ell[C] \simeq \mathbb{Q}_\ell[X]/(X^{\ell^h} - 1) \simeq \mathbb{Q}_\ell \oplus \mathbb{Q}_\ell[\zeta_\ell] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}_\ell[\zeta_{\ell^h}]$$

conduit à la décomposition ℓ-adique irréductible du caractère régulier

$$\chi_C^{\text{rég}} = \chi_0 + \chi_1 + \cdots + \chi_h = \chi_0 + \chi_C^{\text{aug}},$$

où χ_0 désigne le caractère unité et χ_C^{aug} le caractère d'augmentation. Maintenant, pour tout $\mathbb{Z}_\ell[C]$-module projectif M de caractère $\chi_M = \sum n_i \chi_i$, un calcul élémentaire montre que l'ordre $h^2(M)$ du groupe $H^2(C, M)$ ne dépend que de n_0, tandis que l'ordre $h^1(M)$ du groupe $H^1(C, M)$ ne dépend que des n_i pour $i > 0$. Écrivons donc $\widetilde{\mathcal{E}}'_L = \widetilde{\mathcal{E}}_L/\widetilde{\mathcal{E}}_L^{\nu}$ le quotient du groupe des unités logarithmiques par le sous-groupe des normes universelles de Kuz'min introduit plus haut.

Sous la conjecture de Gross-Kuz'min *dans* K, le groupe $\widetilde{\mathcal{E}}'_K = \widetilde{\mathcal{E}}_K/\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\nu}$ est fini, de sorte que la composante unité du caractère de $\widetilde{\mathcal{E}}'_L$ est alors triviale. En particulier, son quotient de Herbrand $q(C, \widetilde{\mathcal{E}}'_L) = h^1(\widetilde{\mathcal{E}}'_L)/h^2(\widetilde{\mathcal{E}}'_L)$ est une puissance positive de ℓ. Et il vient donc :

$$h^1(\widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L}) = h^2(\widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L}) q(\widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L}) = h^2(\widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L}) q(\widetilde{\mathcal{E}}_L) = h^2(\widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L}) q(\widetilde{\mathcal{E}}'_L) \geq h^2(\widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L}),$$

en vertu de l'identité $q(C, \widetilde{\mathcal{E}}_L^{\nu}) = 1$ valable inconditionnellement.

En fin de compte, dès lors que le seul corps K vérifie la conjecture de Gross-Kuz'min pour ℓ, les calculs de la Proposition 6 fournissent la *majoration* du nombre de classes d'ambiges :

$$(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L C} : \mathcal{P}\ell_L^{\mathfrak{m}_L C}) \ \leq\ |\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}| \ \frac{\prod_{\mathfrak{p}_\infty} d_{\mathfrak{p}_\infty}(L/K) \prod_{\mathfrak{p}_\circ \nmid \mathfrak{m}} \tilde{e}_{\mathfrak{p}_\circ}(L/K)}{\left(\deg_L \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{\mathfrak{m}_L C} : \deg_L \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}\right) \left(\widetilde{\mathcal{E}}_K^{\mathfrak{m}_K} : N_{L/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_L^{\mathfrak{m}_L})\right)}$$

Et la conclusion de la Proposition 9 reste valable ; ce qui achève la démonstration du Théorème 4.

9 Conséquences arithmétiques

Dans toute cette section, nous supposons fixé le nombre premier ℓ.

Définition 14. *Soient $\boldsymbol{k}$ un corps de nombres et $T = T_{\boldsymbol{k}}$ un ensemble fini de premiers de $\boldsymbol{k}$ ne divisant pas ℓ. Pour toute extension algébrique N de $\boldsymbol{k}$ (non nécessairement de degré fini sur $\boldsymbol{k}$), convenons de noter T_N l'ensemble (éventuellement infini) des places de N au-dessus de T et, pour $[K:\boldsymbol{k}]$ fini, par $\mathfrak{m}_K$ le diviseur $\mathfrak{m}_K = \prod_{\mathfrak{q}_K \in T_K} \mathfrak{q}_K$. Nous disons que N est $T_N^{(\ell)}$-logarithmiquement principal lorsque son groupe des classes $T_N^{(\ell)}$-infinitésimales (défini comme limite inductive des ℓ-groupes logarithmiques de classes de rayons $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$ pour $K \subset N$ de degré fini) est trivial :*

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{T_N^{(\ell)}} = \varinjlim \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K} = 1.$$

Lorsque T est vide, nous disons tout simplement que N est logarithmiquement principal.

Cela posé, appliquons d'abord le Théorème principal avec $\boldsymbol{k} = \mathbb{Q}$ logarithmiquement principal.

Scolie 15. *Pour tout corps de nombres totalement réel K vérifiant la conjecture de Gross-Kuz'min en ℓ (par exemple un corps abélien réel) et tout ensemble fini $T = T_{\mathbb{Q}}$ de nombres premiers $p \neq \ell$, il existe une infinité d'extensions abéliennes réelles $F/\mathbb{Q}$ telles que les ℓ-classes logarithmiques de rayons modulo $\mathfrak{m}_K = \prod_{\mathfrak{q}_K \in T_K} \mathfrak{q}_K$ de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$ capitulent dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{FK}^{\mathfrak{m}_{FK}}$.*

Autrement dit, le groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathfrak{m}_K}$ capitule dans le sur-corps $K[\cos(2\pi/f)]$ pour une infinité de f.

Passant à la limite inductive dans le cas particulier $T = \emptyset$, nous obtenons :

Corollaire 16. *Le sous-corps réel maximal $\mathbb{Q}_+^{ab} = \bigcup_{f>0} \mathbb{Q}[\cos(2\pi/f)]$ du corps cyclotomique engendré par toutes les racines de l'unité $\mathbb{Q}^{ab} = \bigcup_{f>0} \mathbb{Q}[\zeta_f]$ est logarithmiquement principal.*

Plus généralement les extensions algébriques totalement réelles N de $\mathbb{Q}_+^{ab}$ qui vérifient la conjecture de Gross-Kuz'min en ℓ sont logarithmiquement principales.

Regardons maintenant le cas relatif en distinguant suivant la signature du corps de base $\boldsymbol{k}$:

Scolie 17. *Soit $\boldsymbol{k}$ un corps de nombres totalement réel et $T_{\boldsymbol{k}}$ un ensemble fini de places de $\boldsymbol{k}$ ne divisant pas ℓ. Alors, pour tout corps de nombres K qui contient $\boldsymbol{k}$, satisfait la conjecture de Gross-Kuz'min en ℓ et possède au moins une place réelle, il existe une infinité d'extensions abéliennes totalement réelles $F/\boldsymbol{k}$ telles que les classes logarithmiques de rayons modulo $\mathfrak{m}_K = \prod_{\mathfrak{q}_K \in T_K} \mathfrak{q}_K$ contenues dans le sous-groupe relatif $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K/\boldsymbol{k}}^{\mathfrak{m}_K}$ capitulent dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{FK}^{\mathfrak{m}_{FK}}$.*

Corollaire 18. *Soit $\boldsymbol{k}$ un corps de nombres totalement réel, $\boldsymbol{k}_+^{ab}$ sa plus grande extension abélienne totalement réelle et $T_{\boldsymbol{k}}$ un ensemble fini de places de $\boldsymbol{k}$ qui ne divisent pas ℓ.*

Si $\boldsymbol{k}$ est $T_{\boldsymbol{k}}^{(\ell)}$-logarithmiquement principal, toute extension algébrique K de k_+^{ab} qui satisfait la conjecture de Gross-Kuz'min et dont la clôture galoisienne possède au moins un plongement réel est encore $T_K^{(\ell)}$-logarithmiquement principale.

Preuve. Pour tout α dans K, le groupe de classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{\boldsymbol{k}[\alpha]}^{\mathfrak{m}_{\boldsymbol{k}[\alpha]}}$ du corps $\boldsymbol{k}[\alpha]$ capitule dans le sous-corps $\boldsymbol{k}_+^{ab}[\alpha]$ de K. Et K est donc bien $T_K^{(\ell)}$-logarithmiquement principal, comme annoncé.

Scolie 19. *Soit $\boldsymbol{k}$ un corps de nombres qui possède au moins une place complexe (par exemple un corps quadratique imaginaire) et $T_{\boldsymbol{k}}$ un ensemble fini de places de $\boldsymbol{k}$ ne divisant pas ℓ. Alors, pour tout corps de nombres K qui contient $\boldsymbol{k}$, il existe une infinité d'extensions abéliennes $F/\boldsymbol{k}$ complètement décomposées en toutes les places à l'infini et telles que les classes logarithmiques de rayons modulo $\mathfrak{m}_K = \prod_{\mathfrak{q}_K \in T_K} \mathfrak{q}_K$ contenues dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K/\boldsymbol{k}}^{\mathfrak{m}_K}$ capitulent dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{FK}^{\mathfrak{m}_{FK}}$.*

Corollaire 20. *Soient $\boldsymbol{k}$ un corps de nombres qui possède au moins une place complexe (par exemple un corps quadratique imaginaire), $\boldsymbol{k}_+^{ab}$ la plus grande extension abélienne de $\boldsymbol{k}$ complètement décomposées en toutes les places à l'infini, et $T_{\boldsymbol{k}}$ un ensemble fini de places de $\boldsymbol{k}$.*

Si $\boldsymbol{k}$ est $T_{\boldsymbol{k}}^{(\ell)}$-logarithmiquement principal, toute extension algébrique K de $\boldsymbol{k}_+^{ab}$ qui satisfait la conjecture de Gross-Kuz'min est encore $T_K^{(\ell)}$-logarithmiquement principale.

Appendice : Parallèle avec la conjecture de Grenberg

Le théorème principal de [13] (voir aussi [22] pour une autre approche) s'écrit encore :

Théorème A. *Soit K un corps de nombres totalement réel et ℓ un nombre premier donné. Sous la conjecture de Leopoldt dans K^c (par exemple pour K abélien), la conjecture de Greenberg pour K en ℓ revient à postuler que le ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ des classes logarithmiques du corps K capitule dans le corps totalement réel $K[\cos(2\pi/\ell^m)]$ pour tout m assez grand.*

Cette formulation est alors à mettre en parallèle avec le Scolie 15 plus haut, qui implique :

Théorème B. *Si K est un corps de nombres totalement réel qui vérifie la conjecture de Gross-Kuz'min pour un premier ℓ (par exemple si K vérifie la conjecture de Leopoldt en ℓ, notamment si K est abélien), le ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ capitule dans le corps totalement réel $K[\cos(2\pi/f]$ pour une infinité de f qui peuvent être pris étrangers à tout entier donné à l'avance.*

Ainsi la conjecture de Greenberg affirme qu'on peut imposer à f d'être ℓ-primaire, ce que la construction ne donne pas, qui dit seulement que f peut être pris étranger à tout entier donné.

Références

[1] K. Belabas, J.-F. Jaulent, *The logarithmic class group package in PARI/GP*, Pub. Math. Besançon (2016).

[2] S. Bosca, *Capitulations abéliennes*, Thèse, Bordeaux (2003).

[3] S. Bosca, *Principalization of ideals in Abelian extensions of number fields*, Int. J. Number Th. **5** (2009), 527–539.

[4] N. Chebotarev, *Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören*, Math. Ann. **95** (1926), 191–228.

[5] G. Gras, *Principalisation d'idéaux par extensions absolument abéliennes* J. Number Th. **62** (1997), 403–421.

[6] G. Gras, *Class Field Theory : From Theory To Practice*, Springer, 2005.

[7] G. Gras, *Invariant generalized ideal classes – structure theorems for p-class groups in p-extensions*, Proc. Math. Sc. **127** (2017), 1–34.

[8] G. Gras, J.-F. Jaulent, *Sur les corps de nombres réguliers*, Math. Z. **202** (1989), 343-365.

[9] J.-F Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1994), 301–325.

[10] J.-F. Jaulent, *Théorie ℓ-adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.

[11] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques et capitulation*, Functiones et Approximatio **54** (2016), 227–239.

[12] J.-F. Jaulent, *Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min*, Annales Math. Québec **41** (2017), 119–140.

[13] J.-F. Jaulent, *Note sur la conjecture de Greenberg*, J. Ramanujan Math. Soc. **34** (2019) 59–80 .

[14] J.-F. Jaulent, *Capitulation abélienne des groupes de classes de rayons*, https://arxiv.org/pdf/1801.07173.pdf.

[15] J.-F. Jaulent, C. Maire, *A propos de la tour localement cyclotomique d'un corps de nombres*, Abh. Math. Sem. Hamburg **70** (2000), 239-250.

[16] J.-F. Jaulent, C. Maire, *Radical hilbertien et tour localement cyclotomique*, Japan J. Math. **70** (2002), 203-213.

[17] J.-F. Jaulent, T. Nguyen Quang Do, *Corps p-réguliers, corps p-rationnels et ramification restreinte*, J. Théor. Nombres Bordeaux **5** (1993), 343-363.

[18] J.-F. Jaulent, F. Soriano, *Sur les tours localement cyclotomiques de corps de nombres*, Archiv der Math. **5** (1999), 132-140.

[19] M. Kurihara, *On the ideal class group of the maximal real subfields of number fields with all roots of unity*, J. European Math. Soc.**1** (1999), 35–49.

[20] L. V. Kuz'min, *The Tate module of algebraic number fields*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **36** (1972), 267-327.

[21] A. Movahhedi, *Sur les p-extensions des corps p-rationnels*, Math. Nachr. **149** (1990) 163–176.

[22] T. Nguyen Quang Do, *Formule des genres et conjecture de Greenberg*, Annales Math. Québec **42** (2018), 267–280.

[23] S. Lang, *Algebraic Number Theory*, GTM **110**, Springer, 1994.

Adresse : Institut de Mathématiques de Bordeaux, 351 Cours de la Libération, F-33405 Talence cedex
Courriel : jean-francois.jaulent@math.u-bordeaux.fr