Propagation de la 2-birationalité

par

Claire Bourbon & Jean-François Jaulent

Résumé. Nous étudions la propagation de la 2-birationalité dans les 2-extensions de corps de nombres. Nous prouvons que pour toute extension quadratique totalement imaginaire 2-birationnelle L d'un corps de nombres 2-rationnel totalement réel K, la propagation de la 2-birationalité par 2-extension de K n'est possible, à composition près par une 2-extension cyclotomique, que dans le cas quadratique. Nous la caractérisons complètement en termes de ramification modérée ce qui permet de construire des tours infinies de telles 2-extensions.

Abstract. Let L/K be a 2-birational CM-extension of a totally real 2-rational number field. We characterize in terms of tame ramification totally real 2-extensions K'/K such that the compositum $L' = LK'$ is still 2-birational. In case the 2-extensions K'/K is linearly disjoint from the cyclotomic $\mathbb{Z}_2$-extension K^c/K, we prove that K'/K is at most quadratic. In the other hand we construct infinite towers of such 2-extensions.

1 Introduction

La notion de corps S-rationnel a été introduite dans [8], en liaison avec les résultats de [13], pour généraliser la notion de corps de nombres ℓ-rationnel rencontrée implicitement dans des contextes variés par plusieurs auteurs puis explicitement définie et étudiée par [11] d'une part et [4] d'autre part (*cf.* [7]). Rappelons ce dont il s'agit : si ℓ est un nombre premier et S un sous-ensemble non vide de l'ensemble Pl_K^ℓ des places de K au-dessus de ℓ, on dit que le corps de nombres K est S-rationnel lorsque le groupe de Galois $\mathcal{G}_K = \mathrm{Gal}(M'/K)$ de sa pro-ℓ-extension (galoisienne) ℓ-ramifiée maximale est le pro-ℓ-produit libre

$$(i) \qquad \mathcal{G}_K \simeq \big(\mathop{\ast}_{\substack{\mathfrak{p}|\ell\infty \\ \mathfrak{p}\notin S}} \mathcal{G}_{K_\mathfrak{p}} \big) \ast \mathcal{F}$$

des groupes de Galois locaux $\mathcal{G}_{K_\mathfrak{p}} = Gal(\bar{K}_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p})$ respectivement attachés aux pro-ℓ-extensions maximales $\bar{K}_\mathfrak{p}$ des complétés $K_\mathfrak{p}$ de K aux places réelles ou ℓ-adiques qui ne sont pas dans S, et d'un pro-ℓ-groupe libre $\mathcal{F}$; dans ce cas, le nombre f de générateurs de $\mathcal{F}$ est donné par la formule

$$(ii) \qquad f = d - r - c - l + s + 1,$$

2010 *Mathematics Subject Classification* : Primary 11R37 ; Secondary 11R11 11R70.
Key words and phrases : class field theory, rational fields, birational fields

où d est la somme des degrés locaux $d = \sum_{\mathfrak{l} \in S}[K_{\mathfrak{l}} : \mathbb{Q}_\ell]$ et r, c, l, s sont respectivement les nombres de places réelles , complexes, ℓ-adiques ou dans S de K (cf. [8]), th 2.7). Lorsque S est un singleton $\{\mathfrak{l}\}$, on parle de corps $\mathfrak{l}$-rationnel et si Pl_K^ℓ est lui même un singleton, on dit tout simplement que K est ℓ-rationnel.

Dans ce dernier cas (*i.e.* pour $l = s = 1$), la formule (ii) ci-dessus donne $f = c + 1$; et la condition (i) affirme que $\mathcal{G}_K$ est le pro-ℓ-produit libre d'un pro-ℓ-groupe libre de dimension $c + 1$ (qui s'identifie au groupe de Galois de la sous-extension ∞-décomposée maximale M/K de M'/K) et des r sous-groupes de décomposition attachés aux places réelles de K. Lorsque le corps K contient en outre les racines ℓ-iémes de l'unité, ceci a lieu si et seulement si le ℓ-groupe $C\ell'_K$ des ℓ-classes de diviseurs de K (*i.e.* le quotient du ℓ-groupe des classes d'idéaux prises au sens restreint par le sous-groupe engendré par la classe de l'idéal premier au dessus de ℓ) est trivial (*cf. e.g.* [7]), ce qui s'écrit :

$$(iii) \qquad\qquad \mathcal{C}\ell'_K = 1,$$

de sorte que la notion de ℓ-rationalité coïncide alors avec celle de ℓ-régularité introduite par Kummer dans l'étude des corps cyclotomiques $\mathbb{Q}[\zeta_\ell]$.

La question de la propagation de la S-rationalité dans une ℓ-extension L/K de corps de nombres a été complètement résolue dans [8] pour les ℓ premiers impairs. Pour $\ell = 2$ et L/K quadratique il peut arriver que le corps de base K soit $\mathfrak{l}$-rationnel en une place 2-adique décomposée dans l'extension L/K et que L soit $\mathfrak{l}$-rationnel en chacune des deux places au-dessus de $\mathfrak{l}$; on dit alors que le corps L est *birationnel.* Le passage de la 2-rationalité à la 2-birationalité dans une 2-extension L/K a été complètement traité dans [9] pour K totalement réel. Rappelons le résultat principal :

Théorème 0. *Soit L/K une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps de nombres totalement réel. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le corps L est 2-birationnel,

(ii) Le corps K est 2-rationnel, son unique place 2-adique est décomposée dans L/K et l'extension L/K est ramifiée modérément soit en une place semi-primitive $\mathfrak{p}$ soit en deux places primitives $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$.

Dans ce contexte, une place finie $\mathfrak{p}$ du corps de base K est dite *primitive* lorsqu'elle est totalement inerte dans la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique K^c/K ; *semi-primitive* lorsqu'elle est décomposée dans le premier étage de K^c/K et inerte au-delà. Une telle place est, en particulier, modérée (*i.e.* ici étrangére à 2).

L'objet du présent travail est d'étudier la propagation de la 2-birationalité par 2-extension (galoisienne) du corps de base. Le problème est le suivant : étant donnés une extension quadratique à conjugaison complexe L d'un corps totalement réel K d'une part, une 2-extension totalement réelle K' de K d'autre part, nous regardons à quelle condition sur les extensions L/K et K'/K la 2-birationalité de L/K se propage à l'extension induite LK'/K'.

Le résultat *a priori* surprenant que nous obtenons est le suivant :

Théorème 1. *Lorsque la 2-extension totalement réelle K'/K est ramifiée modérément en une place $\mathfrak{p}$ (auquel cas celle-ci est primitive et c'est l'unique place modérée qui se ramifie dans K'/K), la propagation de la 2-birationalité de L/K à LK'/K' a lieu si et seulement si les deux conditions qui suivent sont réalisées :*

(i) l'extension L/K est ramifiée modérément en exactement deux places : en la place $\mathfrak{p}$ et en une autre place primitive $\mathfrak{q}$;

(ii) le corps K' provient, par composition avec un étage fini K_n de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique K^c/K, d'une extension quadratique K'' de K.

En d'autres termes, si l'on impose à K'/K d'être linéairement disjointe de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique K^c/K, la propagation de la birationalité est impossible lorsque L/K est modérément ramifiée en une place semi-primitive ; et lorsque L/K est modérément ramifiée en deux places primitives $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$, elle n'est possible que par extension quadratique $\mathfrak{p}$-modérément ou $\mathfrak{q}$-modérément ramifiée, ce qui conduit, comme nous le verrons, à deux possibilités (et deux seulement) pour K'. En itérant le processus, en revanche, il est alors facile de construire des tours infinies de telles extensions.

2 Corps 2-rationnels

Pour la commodité du lecteur nous rappelons brièvement ci-dessous quelques uns des résultats de [4] et [11] sur les notions de régularité et de rationalité :

Définition 2. *Soit ℓ un nombre premier. Un corps de nombres K est dit :*

(i) ℓ-régulier, lorsque le ℓ-sous-groupe de Sylow du noyau $R_2(K)$ dans $K_2(K)$ des symboles réguliers est trivial ;

(ii) ℓ-rationnel, si le groupe de Galois $\mathcal{G}_K = \mathrm{Gal}(M/K)$ de sa pro-extension maximale ℓ-ramifiée ∞-décomposée est un pro-ℓ-groupe libre.

Lorsque K contient le sous-corps réel maximal $\mathbb{Q}[\zeta + \zeta^{-1}]$ du ℓ-ième corps cyclotomique $\mathbb{Q}[\zeta]$, il est équivalent d'affirmer qu'il est ℓ-régulier ou qu'il est ℓ-rationnel (*cf.* [7], Théorème 1.2). C'est évidemment le cas pour $\ell = 2$. Ainsi :

Théorème 3. *K est 2-rationnel lorsqu'il vérifie les propriétés équivalentes :*

(i) La 2-partie du noyau dans $K_2(K)$ des symboles réguliers est trivial.

(ii) Le groupe de Galois $\mathcal{G}_K = \mathrm{Gal}(M/K)$ de sa pro-2-extension maximale de K 2-ramifiée et ∞-décomposée est un pro-2-groupe libre (nécessairement sur $1+c_K$ générateurs, si c_K est le nombre de places complexes de K).

(iii) Le groupe de Galois $\mathcal{G}_K^{ab} = \mathrm{Gal}(M^{ab}/K)$ de sa pro-ℓ-extension abélienne maximale 2-ramifiée ∞-décomposée est un $\mathbb{Z}_2$-module libre de rang $1+c_K$.

(iv) Le corps K vérifie la conjecture de Leopoldt (pour le nombre premier 2) et le sous-module de torsion $\mathcal{T}_K$ de $\mathrm{Gal}(M^{ab}/K)$ est trivial.

(v) K possède une unique place dyadique $\mathfrak{l}$ et son 2-groupe $\mathcal{C}\ell'_K$ des 2-classes d'idéaux au sens restreint est trivial.

L'équivalence des diverses assertions *(i)* à *(v)* n'est autre que la déclinaison pour $\ell = 2$ du Th. 1.2 de [7]. La formulation *(ii)* montre clairement que la 2-rationalité se propage par 2-extension 2-ramifiée ∞-décomposée, donc à chaque étage fini K_n de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique. En particulier les 2-groupes de 2-classes $\mathcal{C}\ell'_{K_n}$ sont tous triviaux et le 2-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ des 2-classes logarithmiques de K est ainsi trivial. Comme expliqué dans [6], il suit de lé qu'un tel corps satisfait aussi la conjecture de Gross (pour le nombre premier 2).

La question de la propagation de la ℓ-rationalité a été complètement résolue par [4] et [11]. Elle s'appuie sur la notion de place primitive. Pour $\ell = 2$, on a :

Définition 4. *étant donné un corps de nombres K, un ensemble S de places modérées de K (i.e. ici de places finies étrangères à 2) est dit primitif (relativement au premier 2) lorsque la famille des logarithmes de Gras de ces places (i.e. de leurs images dans le groupe de Galois $\mathcal{L} = \mathrm{Gal}(Z/K)$ du compositum Z des $\mathbb{Z}_2$-extensions de K) peut étre complétée en une $\mathbb{Z}_2$-base de $\mathcal{L}$.*

Ainsi, lorsque K un corps totalement réel qui satisfait la conjecture de Leopoldt (pour le premier 2), par exemple un corps 2-rationnel, les ensembles primitifs de places modérées de K sont exactement les singletons $S = \{\mathfrak{l}\}$, oé $\mathfrak{l}$ est une place de K totalement inerte dans la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique Z/K.

Définition 5. *Une 2-extension L/K est dite primitivement ramifiée lorsque l'ensemble $\mathcal{R}_{L/K}$ des places modérément ramifiées dans L/K est primitif.*

Le résultat de propagation (*cf.* [7], Théorème 3.5) s'énonce alors comme suit :

Théorème 6. *étant donné une 2-extension de corps de nombres L/K, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le corps L est 2-rationnel.

(ii) Le corps K est 2-rationnel et l'extension L/K est primitivement ramifiée.

Donnons par exemple la liste des corps multiquadratiques 2-rationnels :

Corollaire 7. *Les corps multiquadratiques réels K qui sont 2-rationnels sont les sous-corps des corps biquadratiques $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{p}]$ pour les nombres premiers p primitifs, c'est-é-dire vérifiant $p \equiv \pm 3 \mod 8$. En d'autres termes ce sont :*

(i) le corps des rationnels $\mathbb{Q}$;

(ii) les corps quadratiques $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2p}]$;

(iii) les corps biquadratiques $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{p}]$;

oé p est un premier primitif : $p \equiv \pm 3 \mod 8$.

Les corps multiquadratiques imaginaires 2-rationnels sont :

(iv) les corps quadratiques $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-p}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-2p}]$;

(v) les corps biquadratiques $\mathbb{Q}[\sqrt{-1},\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-1},\sqrt{p}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-2},\sqrt{p}]$;

(vi) les corps triquadratiques $\mathbb{Q}[\sqrt{-1},\sqrt{2},\sqrt{p}]$;

oé p est un premier primitif : $p \equiv \pm 3 \mod 8$.

Preuve. Le corps $\mathbb{Q}$ étant 2-rationnel, il suffit d'écrire que la ramification modérée ne peut concerner qu'au plus un premier impair p, lequel doit en outre étre primitif, *i.e.* inerte dans le premier étage $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$ de la $\mathbb{Z}_2$-extension de $\mathbb{Q}$; ce qui se traduit par la congruence annoncée : $p \equiv \pm 3 \mod 8$.

3 Corps 2-birationnels

Venons-en maintenant à la notion de corps 2-birationnel (*cf.* [8] et [9]) :

Définition 8. *Un corps de nombres K est dit $\mathfrak{l}$-rationnel en une place $\mathfrak{l}$ au-dessus de ℓ si sa ℓ-extension ℓ-ramifiée, $\mathfrak{l}$-décomposée maximale est triviale.*

Naturellement la trivialité du groupe de Galois de la pro-ℓ-extension ℓ-ramifiée, $\mathfrak{l}$-décomposée maximale se lit sur son abélianisé. On peut alors interpréter la notion de la pro-$\mathfrak{l}$-rationalité en termes de corps de classes. Introduisons pour cela quelques notations de la théorie ℓ-adique du corps de classes (*cf.* [6]).

Notons :

— $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ le compactifié ℓ-adique du groupe multiplicatif du complété $K_\mathfrak{p}$;
— $\mu_\mathfrak{p}$ le sous-groupe de torsion de $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$;
— $\mathcal{J}_K = \prod_\mathfrak{p}^{res} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ le ℓ-adifié du groupe des idèles de K ;
— $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes K^\times$ son sous-groupe principal ;
— $\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K / \mathcal{R}_K$ enfin le ℓ-groupe des classes d'idèles.

Le groupe $\mathcal{C}_K$ s'identifie au groupe de Galois de la pro-ℓ-extension abélienne maximale de K. Et d'après [8] Th. 1.7, il vient :

Proposition 9. *Le corps K est $\mathfrak{l}$-rationnel si et seulement si on a l'identité :*
$$\mathcal{J}_K = \mathcal{R}_K \mathcal{R}_{K_\mathfrak{l}} \prod_{\mathfrak{p} \nmid \ell\infty} \mu_\mathfrak{p} \; ;$$
ce qui a lieu si et seulement si les deux conditions suivantes se trouvent réunies :

(i) le groupe des ℓ-classes d'idéaux $\mathcal{C}\ell_K$ du corps K est trivial ;

ii) l'application de semi-localisation $s'_\mathfrak{l}$ induit une surjection du tensorisé $\mathcal{E}'_K$ du groupe des ℓ-unités de K sur le produit $\mathcal{R}'_l = \prod_{\mathfrak{p}|\ell\infty;\mathfrak{p}\neq\mathfrak{l}} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$.

Remarque. Sous les conditions précédentes, K est logarithmiquement principal en ce sens que son ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ est trivial. En particulier K vérifie banalement la conjecture de Gross généralisée (pour le premier ℓ).

Ces définitions générales étant posées, nous pouvons spécifier au cas $\ell = 2$.

Théorème 10. *Un corps totalement imaginaire L est dit 2-birationnel lorsqu'il est $\mathfrak{l}$-rationnel en chacune des places 2-adiques (en ce sens qu'il n'admet pas de 2-extension, 2-ramifiée, $\mathfrak{l}$-décomposée non triviale), ce qui a lieu si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) L admet exactement 2 places 2-adiques $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$;

(b) le 2-groupe $\mathcal{C}\ell_L$ des 2-classes d'idéaux de L est trivial, i.e. 2-groupe des classes d'idéaux de L est engendré par les images de $\mathfrak{l}$ et de $\mathfrak{l}'$.

(c) les plongements canoniques de $L^\times$ dans $L_\mathfrak{l}^\times$ et $L_{\mathfrak{l}'}^\times$ induisent des isomorphismes $\mathcal{E}'_L \simeq \mathcal{R}_{L_\mathfrak{l}} \simeq \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{l}'}}$ du tensorisé 2-adique $\mathcal{E}'_L$ du groupe des 2-unités de L sur les compactifiés locaux associés aux places 2-adiques.

Nous avons maintenant besoin d'introduire la notion de place semi-primitive.

Définition 11. *Soit K un corps de nombres totalement réel qui satisfait la conjecture de Leopoldt en $\ell = 2$ et K^c sa $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique. Nous disons qu'une place finie modérée (i.e. ici ne divisant pas 2) est :*

— primitive*, lorsque son image dans le groupe procyclique $Gal(K^c/K)$ n'est pas un carré, autrement dit lorsqu'elle n'est pas décomposée dans K^c/K ;*
— semi-primitive*, lorsqu'elle se décompose dans le premier étage de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique K^c/K mais pas au-delé.*

Cela posé, nous avons les résultats suivants (cf [9] Th. 4 & Prop. 5) :

Théorème 12. *Soit L/K une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps de nombres totalement réel. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le corps L est 2-birationnel.

(ii) Le corps K est 2-rationnel, son unique place 2-adique est décomposée dans L/K et l'extension L/K est ramifiée modérément soit en une place semi-primitive $\mathfrak{p}$ soit en deux places primitives $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$.

(iii) K est 2-rationnel ; L est 2-logarithmiquement principal ; et L/K est 2-décomposée et ramifiée modérément en au moins une place.

4 Corps multiquadratiques 2-birationnels

Nous nous nous proposons dans cette section de mettre en œuvre les équivalences données par le Th. 12 et la classification des corps multiquadratiques réels 2-rationnels explicitée dans le Cor. 7 pour dresser la liste des corps multiquadratiques 2-birationnels : un tel corps L s'obtient, en effet, par composition d'un corps quadratique imaginaire $k = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ et d'un corps multiquadratique réel K, qui est nécessairement 2-rationnel en vertu de la condition (ii) du Théorème.

Le résultat que nous obtenons est le suivant :

Théorème 13. *Soient L un corps multiquadratique imaginaire et K son sous-corps réel maximal. Le corps L est alors le compositum du corps multiquadratique réel K et d'un corps quadratique imaginaire $k = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$, pour un $d \geq 1$ sans facteur carré. Et L est 2-birationnel si et seulement si K est 2-rationnel (i.e. un sous-corps de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{p}]$ avec $p \equiv \pm 3 \mod 8$) et que l'on est dans l'une des quatre configurations suivantes :*

(a) Pour $K[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$:

  (i) $d = q$ premier avec $q \equiv 7 \mod 16$;

  (ii) $d = qq'$ avec q, q' premiers et $q \equiv -q' \equiv \pm 3 \mod 8$.

(b) Pour $K[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{p}]$:

  (i) $d = q \neq p$ premier avec $-q \equiv p \equiv \pm 3 \mod 8$ et $(\frac{p}{q}) = -1$;

  (ii) $d = q \neq p$ premier avec $-q \equiv p \equiv \pm 3 \mod 8$ et $(\frac{p}{q}) = +1$.

Pour démontrer cela, nous nous appuierons sur le lemme :

Lemme 14. *Soit L une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps totalement réel K. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit K_n le n-iéme étage de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique K^c de K et $L_n = K_nL$ le compositum. On a alors les équivalences :*

(i) K est 2-rationnel $\iff$ K_n est 2-rationnel.

(ii) L est 2-birationnel $\iff$ L_n est 2-birationnel.

Preuve. Commenéons par établir le Lemme 14.

Observons d'abord que la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique K^c/K étant 2-ramifiée, il en est de même de toutes ses sous-extensions finies K_n/K, de sorte que la 2-rationalité de K est bien équivalente à celle de chacun des K_n en vertu du Théorème 6 ; d'où l'équivalence (i) du Lemme.

Ce point acquis, intéressons-nous à la 2-birationalité de L. D'aprés la formulation (iii) donnée par le Théorème 12, celle-ci se caractérise par la 2-rationalité de K, la 2-décomposition de L/K et le trivialité du 2-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$; et il s'agit simplement de vérifier que ces conditions se propagent le long de la tour cyclotomique L^c/L. Or :

(i) La 2-rationalité de K_n se lit indifféremment à n'importe quel étage de la tour en vertu du point (i) ci-dessus.

(ii) Si K est 2-rationnel, il admet une unique place dyadique $\mathfrak{l}$ et il en est de même pour chacun des K_n ; l'unique place dyadique $\mathfrak{l}_n$ de K_n se décompose dans L_n/K_n si et seulement si $\mathfrak{l}$ est décomposée dans L/K.

(iii) Enfin, le 2-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$ étant le quotient des copoints fixes par $\Gamma = \mathrm{Gal}(L^c/L)$ de l'abélianisé $\mathcal{C}'_L$ du groupe de Galois de la pro-2-extension totalement décomposée maximale $\widetilde{L}$ de L (*cf.* [5, 6]), la trivialité de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$ affirme tout simplement l'égalité $\widetilde{L} = L$; ce qui se lit encore à n'importe quel étage de la tour, puisque $\widetilde{L}$ est aussi la pro-2-extension totalement décomposée maximale de chacun des L_n.

Preuve du Théorème. Si L est 2-birationnel, son sous-corps réel K est 2-rationnel *i.e.* (par le Corollaire 7) contenu dans un corps biquadratique $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{p}]$ pour un premier primitif $p \equiv \pm 3 \mod 8$. Cela étant, le Lemme 14 nous permet de remplacer K par n'importe quel étage fini de sa $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique, donc de supposer par exemple $K \supset \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Distinguons deux cas :

- Pour $K[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$:

Dans ce cas, toujours d'après le Lemme 14, nous pouvons remplacer K par $K[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ donc par $\mathbb{Q}$; de sorte que le corps L est 2-birationnel si et seulement si $k = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ l'est ; ce qui suppose, d'après le Théorème 12 (*ii*) :

(i) 2 décomposé dans l'extension $k/\mathbb{Q}$, *i.e.* $d \equiv -1 \mod 8$, et ;

(ii) $k/\mathbb{Q}$ ramifiée modérément soit en une place semi-primitive q, *i.e.* $d = q$ ou $2q$, avec $q \equiv \pm 7 \mod 16$; soit en deux places primitives q et q', *i.e.* $d = qq'$ ou $2qq'$, avec $q \equiv \pm q' \equiv \pm 3 \mod 8$.

En fin de compte, il vient $d = q \equiv 7 \mod 16$ ou $d = qq'$ avec $q \equiv -q' \equiv \pm 3 \mod 8$.

- Pour $K[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{p}]$:

Dans ce cas, toujours d'après le Lemme 14, nous pouvons remplacer K par $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ et L par $\mathbb{Q}[\sqrt{p},\sqrt{-d}]$; d'oé par le Théorème 12 (*ii*), les trois conditions :

(i) Le corps quadratique $K = \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ est 2-rationnel, *i.e.* on a : $p \equiv \pm 3 \mod 8$.

(ii) Son unique place dyadique $\mathfrak{l}$ est décomposée dans L/K ; autrement dit soit 2 est décomposé dans l'extension $k/\mathbb{Q}$, auquel cas on a : $d \equiv -1 \mod 8$; soit 2 est décomposé dans l'extension $\mathbb{Q}[\sqrt{-dp}]/\mathbb{Q}$, auquel cas on a : $dp \equiv -1 \mod 8$, conformément au schéma d'extensions :

$$\begin{tikzcd}
k = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}] \arrow[rr, dash] \arrow[dd, dash] & & L \arrow[dd, dash] \\
& k^* = \mathbb{Q}[\sqrt{-dp}] \arrow[ur, dash] & \\
\mathbb{Q} \arrow[rr, dash] \arrow[ur, dash] & & K = \mathbb{Q}[\sqrt{p}]
\end{tikzcd}$$

Et, dans les deux éventualités, d est donc impair.

(iii) L/K se ramifie modérément soit en une unique place semi-primitive $\mathfrak{q}$, soit en deux places primitives $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}'$.

— Dans le premier cas la place $\mathfrak{q}$ provient alors d'un premier $q \neq p$ ramifié dans $k/\mathbb{Q}$ mais inerte dans $K/\mathbb{Q}$, auquel cas on a : $d = q$ ou $d = pq$ et $(\frac{p}{q}) = -1$. Reste simplement à vérifier la semi-primitivité de $\mathfrak{q}$. Le schéma

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, dash, "dec"] \arrow[d, dash, "in"'] & K[\sqrt{2}] \arrow[r, dash, "in"] \arrow[d, dash, "dec"] & K[\sqrt{2+\sqrt{2}}] \arrow[r, dotted, dash] \arrow[d, dash, "dec"] & K^c \arrow[d, dotted, dash] \\
\mathbb{Q} \arrow[r, dash, "in"] & \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \arrow[r, dash, "in"] & \mathbb{Q}[\sqrt{2+\sqrt{2}}] \arrow[r, dotted, dash] & \mathbb{Q}^c
\end{tikzcd}$$

(oé est indiqué le comportement des places au-dessus de q) montre alors que celle-ci correspond à la primitivité de q, qui s'écrit : $q \equiv \pm 3 \mod 8$.

— Dans le second cas, $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}'$, du fait de leur primitivité, proviennent nécessairement d'un même premier $q \neq p$ ramifié dans $k/\mathbb{Q}$ et décomposé dans $K/\mathbb{Q}$, auquel cas on a : $d = q$ ou $d = pq$ et $(\frac{p}{q})$=+1, ainsi que la congruence $q \equiv \pm 3$ qui traduit la primitivité de q.

En fin de compte, quitte à échanger k et k^*, on obtient $d = q \neq p$ premier avec $-q \equiv p \equiv \pm 3 \mod 8$ et $(\frac{p}{q}) = -1$ dans le premier cas ; $(\frac{p}{q}) = +1$ dans le second ; ce qui achève la démonstration.

Remarque. Le cas (a) du Théorème 13 redonne naturellement la classification des corps quadratiques imaginaires 2-birationnels donnée dans [8] (Cor. 1.12), ainsi que la liste des corps quadratiques imaginaires 2-logarithmiquement principaux établie dans [12] (restreinte ici à ceux qui sont 2-décomposés) :

Corollaire 15. *Les corps quadratiques 2-birationnels sont les corps quadratiques imaginaires $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-p}]$ pour p premier de la forme $p \equiv 7 \mod 16$, et $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-pq}]$ pour p et q premiers $p \equiv -q \equiv 3 \mod 8$.*

5 Propagation de la birationalité

Dans le cas (b) du Théorème 13, on a $d = q$ ou $d = -pq$, de sorte que le corps $L = K[\sqrt{-d}]$ provient, par composition avec K , indifféremment du corps quadratique imaginaire $k = \mathbb{Q}[\sqrt{-q}]$ comme du corps $k^* = \mathbb{Q}[\sqrt{-pq}]$. Il est intéressant d'observer que, du fait des congruences satisfaites par p et q, un et un seul d'entre eux (é savoir k^*) se trouve être birationnel. Plus précisément, k^* est une extension 2-birationnelle de $\mathbb{Q}$ qui est ramifiée modérément en deux places primitives, dont l'une se ramifie dans $K/\mathbb{Q}$ tandis que l'autre se décompose.

Nous allons voir que cette sitation est, en fait, générale :

Théorème 16. *Soit K un corps 2-rationnel totalement réel ; $L = K[\sqrt{-\delta}]$ (avec $\delta >> 0$ dans K) une extension quadratique totalement imaginaire et K' une 2-extension totalement réelle non triviale de K linéairement disjointe de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique K^c ; soit enfin $L' = LK'$ le compositum.de L et de K'. Alors :*

(i) Si L'/K' est 2-birationnelle, l'extension L/K ne peut elle-même être 2-birationnelle que si sont réunies les deux conditions suivantes :

(a) L'extension K'/K est aussi quadratique : $[K' : K] = 2$.

(b) L'extension L/K vérifie l'une des deux propriétés qui suivent :

(b1) ou bien L/K est ramifiée modérément en une unique place primitive $\mathfrak{q}$, laquelle est inerte dans K'/K ;

(b2) ou bien L/K est ramifiée modérément en exactement deux places primitives $\mathfrak{p}$et $\mathfrak{q}$ et l'extension quadratique K'/K est ramifiée modérément en exactement l'une de ces deux places et décomposée en l'autre.

(ii) Réciproquement, lorsque les conditions ci-dessus sont réunies, la 2-birationalité de L/K se propage à L'/K'.

En particulier :

Scolie 17. *La propagation de la 2-birationalité par 2-extension du corps de base ne peut se faire que par extension quadratique.*

Scolie 18. *Cette propagation ne peut se faire que si l'extension de départ L/K est ramifiée modérément en deux places primitives.*

Preuve du Théorème. Supposons d'abord L'/K' 2-birationnelle. Le corps K' est alors une extension 2-rationnelle de K. Et, comme nous l'avons supposée linéairement disjointe de la 2-extension cyclotomique K^c/K, le Théorème 6 nous assure que l'extension K'/K est modérément ramifiée en une unique place modérée $\mathfrak{p}$, laquelle est primitive dans K. Plus précisément, il résulte de l'hypothèse de disjonction linéaire que la place $\mathfrak{p}$ est totalement ramifiée dans K'/K (puisque la pro-2-extension 2-ramifiée ∞-décomposée maximale de K est K^c). En particulier, l'unique place $\mathfrak{p}'$ de K' au-dessus de $\mathfrak{p}$ est primitive dans K'.

Considérons le schéma d'extensions :

$$\begin{array}{ccc} L = K[\sqrt{-\delta}] & \text{———} & L' = LK' \\ | & & | \\ K & \text{———} & K' \end{array}$$

Et examinons les deux possibilités décrites dans le Théorème 12 (ii) :

- L'/K' est ramifiée modérément en une unique place semi-primitive $\mathfrak{q}'$.

Dans ce cas, $\mathfrak{q}'$, qui n'est pas primitive, est distincte de $\mathfrak{p}'$ et provient d'une place $\mathfrak{q}$ de K qui se ramifie dans L/K mais ne se décompose pas dans K'/K. Ainsi $\mathfrak{q}$ est (totalement) inerte dans K'/K, ce qui montre déjà que K'/K est nécessairement cyclique. Plus précisément, puisque $\mathfrak{q}'$ est semi-primitive dans K', son degré d'inertie est (au plus) 2 et $\mathfrak{q}$ doit être primitive. Ainsi d'une part K'/K est quadratique ; et d'autre part L/K, qui est ramifiée en la place primitive $\mathfrak{q}$, dés lors qu'elle est 2-birationnelle se ramifie aussi en une autre place primitive (toujours en vertu du Théorème 12 (ii)), laquelle ne peut être que $\mathfrak{p}$.

- L'/K' est ramifiée modérément en deux places primitives $\mathfrak{q}'_1$ et $\mathfrak{q}'_2$.

Dans ce cas, $\mathfrak{q}'_1$ et $\mathfrak{q}'_2$ proviennent soit d'une même place primitive $\mathfrak{q}$ de K, soit de deux places primitives $\mathfrak{q}_1$ et $\mathfrak{q}_2$ distinctes, qui se ramifient dans L/K.

Dans cette dernière hypothèse, ni $\mathfrak{q}_1$ ni $\mathfrak{q}_2$ ne pourraient se décomposer dans K'/K, car L'/K' serait alors ramifiée modérément en quatre places ; elles ne pourraient non plus présenter de l'inertie, car $\mathfrak{q}'_1$ ou $\mathfrak{q}'_2$ ne serait plus primitive dans K' ; elles seraient donc toutes deux totalement ramifiées dans K'/K, contrairement au fait que $\mathfrak{p}$ est la seule place modérée ramifiée dans K'/K.

Il en résulte que $\mathfrak{q}'_1$ et $\mathfrak{q}'_2$ proviennent nécessairement d'une même place primitive $\mathfrak{q}$ de K dont l'indice de décomposition dans K'/K est égal à 2 et le degré d'inertie 1, puisque $\mathfrak{q}'_1$ et $\mathfrak{q}'_2$ sont primitives dans K'. De plus, $\mathfrak{q}$ est distincte de $\mathfrak{p}$, sans quoi $\mathfrak{q}'_1$ et $\mathfrak{q}'_2$ ne seraient pas ramifiées dans L'/K', donc non ramifiée dans K'/K.

En résumé $[K':K]$ est égal à 2 et $\mathfrak{q}'_1$ et $\mathfrak{q}'_2$ proviennent d'une même place primitive de K ramifiée dans L/K et décomposée dans K'/K. Comme dans le cas précédent, L/K, qui est ramifiée en la place primitive $\mathfrak{q}$, dés lors qu'elle est 2-birationnelle se ramifie nécessairement en une autre place primitive (toujours en vertu du Théorème 12 (ii)), laquelle ne peut être que $\mathfrak{p}$.

Intéressons nous maintenant à la montée en supposant L/K 2-birationnelle ramifiée modérément en deux places primitives $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$, dont l'une, disons $\mathfrak{p}$, est l'unique place modérée ramifiée dans l'extension quadratique K'/K. Et examinons successivement les deux possibilités recensées plus haut :

- La place $\mathfrak{q}$ est inerte dans K'/K.

Dans ce cas, la place $\mathfrak{q}'$ de K' au-dessus de $\mathfrak{q}$ est semi-primitive dans K' et c'est l'unique place modérée ramifiée dans L'/K', puisque $\mathfrak{p}$, qui est totalement ramifiée dans K'/K, ne peut l'étre aussi dans L'/K, son sous-groupe d'inertie étant cyclique. Ainsi K' est bien 2-rationnel en vertu du Théorème 6 et L' est 2-birationnel d'aprés le Théorème 12 (ii).

- La place $\mathfrak{q}$ est décomposée dans K'/K.

Dans ce cas, les deux place $\mathfrak{q}'_1$ et $\mathfrak{q}'_2$ de L' au-dessus de $\mathfrak{q}$ sont encore primitives et ce sont les seules places modérées qui se ramifient dans L'/K', puisque, comme précédemment $\mathfrak{p}$, qui est totalement ramifiée dans K'/K, ne peut l'être aussi dans L'/K. On conclut comme plus haut que L'/K' est 2-birationnelle.

6 Tours d'extensions 2-birationnelles

Le Théorème 16 limite aux seules extensions quadratiques la possibilité de réaliser la propagation de la 2-rationalité par 2-extension (galoisienne) du corps de base K. Mais il laisse ouverte la possibilité de construire des tours infinies (donc non-galoisiennes) de telles extensions. Comme chaque montée quadratique n'est possible qu'é partir d'une extension birationnelle L/K biramifiée modérément, la seule contrainte pour que la construction puisse se poursuivre est de ne fabriquer à chaque étage n que des extension birationnelles L_n/K_n qui soient encore biramifiées.

En d'autres termes, la question de la propagation indéfinie de la 2-birationalité se ramène à construire, pour une extension 2-birationnelle L/K donnée, ramifiée modérément en exactement deux places primitives $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$, une extension quadratique totalement réelle K' de K décomposée en $\mathfrak{q}$ et ramifiée modérément en $\mathfrak{p}$ seulement (la ramification sauvage étant indifférente).

En vertu de la théorie 2-adique du corps de classes, une telle extension existe si et seulement si le 2-groupe des $\infty\mathfrak{q}$-classes $2\mathfrak{p}$-infinitésimales est non trivial.

Regardons si c'est bien le cas. Rappelons le contexte de notre étude :

1. K est un corps de nombres totalement réel qui est 2-rationnel ; ce qui peut se traduire par les deux propriétés suivantes :
   (a) K posséde une seule place dyadique $\mathfrak{l}$; d'où : $[K_{\mathfrak{l}}:\mathbb{Q}_2]=[K:\mathbb{Q}]=r$;

(b) sa 2-extension abélienne 2-ramifiée ∞-décomposée maximale est sa $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique K^c ; ainsi le groupe d'idèles qui définit l'extension cyclotomique est donnée par la formule suivante :

$$\widetilde{\mathcal{J}}_K = \prod_{\mathfrak{r} \neq \mathfrak{l}} \mu_{\mathfrak{r}} \mathcal{R}_K$$

2. L est une extension quadratique totalement imaginaire de K qui se ramifie modérément en exactement deux places $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$, qui sont primitives. En termes idèliques, cette primitivité s'écrit :

$$\mathcal{J}_K = \widetilde{\mathcal{J}}_K \mathcal{R}_{K\mathfrak{p}} = \widetilde{\mathcal{J}}_K \mathcal{R}_{K_\mathfrak{q}}$$

Cela étant, nous cherchons une extension quadratique K'/K satisfaisant les quatre propriétés suivantes :

(i) elle est ramifiée modérément en $\mathfrak{p}$ seulement,

(ii) elle est décomposée en $\mathfrak{q}$,

(iii) elle est non décomposée en 2,

(iv) elle est complètement décomposée à l'infini (*i.e.* totalement réelle).

Pour l'instant, considérons la 2-extension abélienne maximale N de K qui est totalement réelle, $\mathfrak{p}$-modérément ramifiée et $\mathfrak{q}$-décomposée. Le sous-groupe d'idèles qui lui correspond est ainsi :

$$\prod_{\mathfrak{r} | \infty} \mu_{\mathfrak{r}} \Big(\prod_{\mathfrak{r} \nmid \mathfrak{l}\mathfrak{p}\infty} \mu_{\mathfrak{r}} \Big) \mathcal{R}_{K_\mathfrak{q}} \mathcal{R}_K .$$

Et il vient donc :

$$\mathrm{Gal}(N/K) = \mathcal{J}_K / \prod_{\mathfrak{r} \nmid \mathfrak{p}\mathfrak{l}} \mu_{\mathfrak{r}} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{q}} \mathcal{R}_K \simeq \mu_{\mathfrak{p}} / \mu_{\mathfrak{p}} \cap \Big(\prod_{\mathfrak{r} \nmid \mathfrak{p}\mathfrak{l}} \mu_{\mathfrak{r}} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{q}} \mathcal{R}_K \Big),$$

en vertu des égalités rappelées plus haut :

$$\mathcal{J}_K = \widetilde{\mathcal{J}}_K \mathcal{R}_{K_\mathfrak{q}} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\mathcal{J}}_K = \prod_{\mathfrak{r} \neq \mathfrak{l}} \mu_{\mathfrak{r}} \mathcal{R}_K .$$

Dans le quotient obtenu, les idèles principaux (*i.e.* les éléments de $\mathcal{R}_K$) qui apparaissent au dénominateur sont dans $\prod_{\mathfrak{r} \neq \mathfrak{l}} \mu_{\mathfrak{r}}$: ce sont des $\mathfrak{q}$-unités infinitésimales. Or, nous avons ici :

Lemme 19. *Dans un corps de nombres 2-rationnel totalement réel, pour toute place modérée $\mathfrak{q}$ de K le pro-2-groupe $\mathcal{E}_\infty^\mathfrak{q}$ des $\mathfrak{q}$-unités infinitésimales est trivial.*

Preuve. Il s'agit de vérifier que l'image locale $s_\mathfrak{l}(\mathcal{E}^\mathfrak{q})$ du 2-adifié $\mathcal{E}^\mathfrak{q} = \mathbb{Z}_2 \otimes_\mathbb{Z} E^\mathfrak{q}$ du groupe des $\mathfrak{q}$-unités de K est encore un $\mathbb{Z}_2$-module de rang $r = [K : \mathbb{Q}]$. Pour voir cela, observons que K, puisqu'il est présumé 2-rationnel, vérifie la conjecture de Leopoldt ; autrement dit que le 2-adifié groupe des unités $\mathcal{E} = \mathbb{Z}_2 \otimes_\mathbb{Z} E$ s'injecte dans le groupe des unités locales $\mathcal{U}_\mathfrak{l}$ attaché à l'unique place dyadique $\mathfrak{l}$ de K. En particulier $\mathcal{E}$, qui est de rang $r - 1 = [K : \mathbb{Q}] - 1$, s'envoie avec un indice fini dans la préimage $\mathcal{U}_\mathfrak{l}^*$ dans $\mathcal{U}_\mathfrak{l}$ du groupe $\mu_2 = \{\pm 1\}$ des racines de l'unité pour la norme arithmétique $\nu = N_{K/\mathbb{Q}}$. Soit alors x l'image canonique dans $\mathcal{E}^\mathfrak{q}$ d'un générateur arbitraire d'une puissance principale de l'idéal $\mathfrak{q}$. La norme x^ν est (au signe prés) une puissance non triviale de $N\mathfrak{q}$, et son logarithme 2-adique n'est donc pas nul. De sorte que le $\mathbb{Z}_2$-module $s_\mathfrak{l}(\mathcal{E}^\mathfrak{q})$, qui contient $s_\mathfrak{l}(\mathcal{E})$ et $s_\mathfrak{l}(x)$, est de rang au moins $(r-1)+1=r$; et finalement de rang exactement r, tout comme $\mathcal{U}_{\mathfrak{l}}$. En d'autres termes, le sous-module $\mathcal{E}_\infty^{\mathfrak{q}}$ des $\mathfrak{q}$-unités infinitésimales est bien trivial.

Ce point acquis, nous avons obtenu :

Proposition 20. *Pour toute place primitive $\mathfrak{q}$ d'un corps 2-rationnel totalement réel K, la 2-extension abélienne maximale N de K qui est totalement réelle, $\mathfrak{q}$-décomposée et ramifiée modérément en une unique place $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, est cyclique, de groupe de Galois :*

$$\mathrm{Gal}(N/K) \simeq \mu_{\mathfrak{p}}.$$

En particulier, N/K contient une unique sous-extension quadratique K'/K.

Il suit de là que, sous les hypothèses de la proposition, l'unique sous-extension quadratique K'/K de N/K est l'unique extension quadratique qui satisfait aux conditions (i), (ii) et (iv) listées plus haut. Reste à voir si elle vérifie également la condition (iii) qui postule l'existence d'une unique place dyadique dans K'. Or c'est lé qu'intervient précisément la condition de primitivité de la place $\mathfrak{p}$, que nous n'avons pas utilisée jusqu'ici : les résultats sur la propagation de la 2-rationalité rappelés dans le chapitre 1 assurent que K' est encore 2-rationnel si et seulement si la place $\mathfrak{p}$ est primitive dans K. Lorsque c'est le cas, K' ne peut alors contenir qu'une seule place dyadique ; et la condition (iii) est, de ce fait, automatiquement vérifiée.

L'ensemble de cette discussion peut donc se résumer comme suit :

Théorème 21. *Soient K un corps 2-rationnel totalement réel et L une extension quadratique 2-birationnelle totalement imaginaire de K ramifiée modérément en deux places primitives $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$. Il existe alors exactement deux extensions quadratiques K'/K totalement réelles, 2-rationnelles et ramifiées modérément, telles que l'extension composée $L' = LK'$ soit 2-birationnelle : celle qui est ramifiée modérément en $\mathfrak{p}$ et décomposée en $\mathfrak{q}$; et celle qui est ramifiée modérément en $\mathfrak{q}$ et décomposée en $\mathfrak{p}$.*

Comme vu plus avant, l'extension L'/K' vérifie à son tour les mémes hypothèses que l'extension de départ. Itérant le théorème, on obtient ainsi :

Scolie 22. *Sous les hypothèses du théorème, il existe une infinité de tours infinies d'extensions relativement quadratiques $K \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_i \subset \cdots$ de corps 2-rationnels totalement réels telles que les extensions composées $L_i = LK_i$ pour $i \in \mathbb{N}$ soient 2-birationnelles.*

Il convient, en effet, à chaque étage $i \in \mathbb{N}$ déjà construit, de choisir celle des deux places primitives du corps K_i ramifiées dans L_i/K_i qu'on autorise à se ramifier modérément dans l'extension quadratique K_{i+1}/K_i.

7 Appendice : identités du miroir

Il peut être instructif de relire les résultats ci-dessus à la lumière des identités du miroir qui fournissent une seconde preuve du Théorème 21

Reprenons pour cela les calculs effectués plus haut : l'isomorphisme donné par le corps de classes

$$\mathrm{Gal}(N/K) \simeq \mu_{\mathfrak{p}}/\mu_{\mathfrak{p}} \cap \big(\prod_{\mathfrak{r} \nmid \mathfrak{p}\mathfrak{l}} \mu_{\mathfrak{r}} \mathcal{R}_{\mathfrak{q}} \mathcal{R}_K\big),$$

nous assure que l'extension N/K est cyclique (éventuellement triviale). Posons $S = \{\mathfrak{q}\infty\}$ et $T = \{\mathfrak{l}\mathfrak{p}\}$. Par construction, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(N/K)$ s'identifie alors au 2-groupe des S-classes T-infinitésimales $\mathcal{C}\ell_T^S$; et le résultat précédent se lit tout simplement :

$$rg_2\, \mathcal{C}\ell_T^S \leq 1.$$

Nous allons à présent minorer ce rang grâce à la formule de réflexion de Gras (*cf.* Th. 4.6, p. 45 de [3]).

Reprenant les notations de Gras, nous avons : $S = \{\mathfrak{q}\infty\}$, $T = \{\mathfrak{l}\mathfrak{p}\}$, $S_0 = \{\mathfrak{q}\}$, $T_2 = \{\mathfrak{l}\}$, $S_2 = \varnothing$ et $\Delta_\infty = \varnothing$; donc :

$$rg_2\, \mathcal{C}\ell_T^S \;-\; rg_2\, \mathcal{C}\ell_{\{\mathfrak{q}\}}^{\{\mathfrak{l}\mathfrak{p}\}} = |T| + [K_{\mathfrak{l}} : \mathbb{Q}_2] - r - |S_0| - |\Delta_\infty| = 2 + r - r - 1 - 0 = 1$$

De cette formule, il suit en particulier :

$$rg_2\, \mathcal{C}\ell_T^S \geq 1;$$

de sorte qu'en fin de compte nous avons simultanément :

$$rg_2\, \mathcal{C}\ell_T^S = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}\ell_{\{\mathfrak{q}\}}^{\{\mathfrak{l}\mathfrak{p}\}} = 1.$$

Le groupe $\mathcal{C}\ell_T^S$ est donc cyclique mais non trivial (comme nous l'avons déjà établi à l'aide du lemme d'indépendance 19 plus haut), tandis que le ℓ-groupe $\mathcal{C}\ell_{\{\mathfrak{q}\}}^{\{\mathfrak{l}\mathfrak{p}\}}$ des $\{\mathfrak{l}\mathfrak{p}\}$-classes $\{\mathfrak{q}\}$-infinitésimales, lui, est nécessairement trivial.

De l'identité $rg_2\, \mathcal{C}\ell_T^S = 1$, on conclut qu'il existe une unique extension quadratique K'/K qui est non-ramifiée modérément en dehors de $\mathfrak{p}$ et $\infty\mathfrak{q}$-décomposée. Il reste alors à vérifier que cette extension est effectivement ramifiée en $\mathfrak{p}$ et qu'elle est non-décomposée en 2, pour qu'elle réalise la propagation de la 2-birationalité. Or :

— Le premier point est évident, puisque le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(N/K)$ est engendré par l'image du sous-groupe d'inertie de la place $\mathfrak{p}$.

— Il reste à voir que la place dyadique $\mathfrak{l}$ est non décomposée. Pour cela, reprenons le raisonnement précédent en échangeant les rôles de $\mathfrak{p}$ et de $\mathfrak{q}$. Ce faisant, nous obtenons : $rg_2\, \mathcal{C}\ell_{\{\mathfrak{p}\}}^{\{\mathfrak{l}\mathfrak{q}\}} = 0$, i.e. $\mathcal{C}\ell_{\{\mathfrak{q}\}}^{\{\mathfrak{l}\mathfrak{p}\}} = 1$; ce qui est précisément le résultat attendu.

En conclusion, nous retrouvons le fait que pour un couple de places $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ primitives fixé, il existe une unique extension K'/K vérifiant les hypothèses du théorème 16 et permettant la propagation de la 2-birationalité.

De ce fait, ce processus peut être réitéré à l'infini et ainsi nous pouvons construire des extensions K' de K de degrés arbitrairement grands, disjointes de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique, de telle manière que le corps L' obtenu soit encore 2-birationnel.

Références

[1] C. Bourbon, *Propagation de la 2-rationalité*, Thèse, Univ. Bordeaux, 2011.

[2] G. Gras, *Théorèmes de réflexion*, J. Théor. Nombres de Bordeaux **10** (1998), 399–499.

[3] G. Gras, *Class Field Theory : From Theory To Practice*, Springer-Verlag, 2003.

[4] G. Gras & J.-F. Jaulent, *Sur les corps de nombres réguliers*, Math. Z. **202** (1989), 343–365.

[5] J.-F Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1994), 301–325.

[6] J.-F. Jaulent, *Théorie ℓ-adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.

[7] J.-F. Jaulent & T. Nguyen Quang Do, *Corps p-réguliers, corps p-rationnels et ramification restreinte*, J. Théor. Nombres Bordeaux **5** (1993), 343–363.

[8] J.-F. Jaulent & O. Sauzet, *Pro-ℓ-extension de corps $\mathfrak{l}$-rationnels*, J. Number Th. **65** (1997), 240–267 ; *ibid.* **80** (2000), 318–319.

[9] J.-F. Jaulent & O. Sauzet, *Extensions quadratiques 2-birationnelles de corps totalement réels*, Pub. Matemàtiques **44** (2000), 343–351.

[10] A. Movahhedi, *Sur les p-extensions des corps p-rationnels*, Math. Nachr. **149** (1990) 163–176.

[11] A. Movahhedi & T. Nguyen Quang Do, *Sur l'arithmétique des corps de nombres p-rationnels*, Sém. Th. Nombres Paris (1987/1988), Prog. in Math. **89** (1990), 155–200.

[12] F. Soriano, *Classes logarithmiques ambiges des corps quadratiques*, Acta Arith. **78** (1997), 201–219.

[13] K. Wingberg, *On Galois groups of p-closed algebraic number fields with restricted ramification*, J. reine angew. Math. **400** (1989), 185–202 ; *ibid.* **416** (1991), 187–194.

Adresses des auteurs

Claire Bourbon
Univ. Bordeaux, Institut de Mathématiques de Bordeaux, 351 Cours de la Libération, F-33405 Talence cedex
CNRS, Institut de Mathématiques de Bordeaux, 351 Cours de la Libération, F-33405 Talence cedex
`claire.bourbon@math.u-bordeaux.fr`

Jean-François Jaulent
Univ. Bordeaux, Institut de Mathématiques de Bordeaux, 351 Cours de la Libération, F-33405 Talence cedex
CNRS, Institut de Mathématiques de Bordeaux, 351 Cours de la Libération, F-33405 Talence cedex
`jean-francois.jaulent@math.u-bordeaux.fr`