Sur les tours localement cyclotomiques*

Jean-François Jaulent et Florence Soriano

Résumé. Nous construisons sur chaque corps de nombres K une tour de ℓ-extensions relativement abéliennes K_n localemement cyclotomiques sur K, analogues aux ℓ-tours de Hilbert non ramifiées, et pour lesquelles nous donnons des critères de finitude et des critères d'infinitude ; les corps ayant qui ont une tour finie ont caractérisés en termes de théorie d'Iwasawa.

Abstract. For a given number field K and any prime ℓ we construct an increasing sequence of ℓ-extensions K_n of K which are locally cyclotomic over K. We give various criterious of finiteness or non-finiteness of this ℓ-tower and we characterise the number fields which have such a finite tower in terms of Iwasawa theory.

1. Introduction

On sait que le ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ d'un corps de nombres K s'identifie, via la théorie ℓ-adique du corps de classes, au groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{lc}/K^c)$ de la pro-ℓ-extension abélienne localement cyclotomique maximale K^{lc} de K relativement à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $K^c = \mathbb{Q}^c \cdot K$ (cf.[5]). En d'autres termes, le groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$, dont la finitude constitue ce qu'il est convenu d'appeler la conjecture de Gross généralisée, mesure l'obstruction globale au problème de plongement dans la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique pour un corps de nombres donné K.

Notre propos dans cet article est de discuter l'existence (ou la non existence) pour un tel K donné, d'une extension finie N de K pour laquelle cette obstruction soit triviale, autrement dit d'un corps trivialisant pour les classes logarithmiques. Nous construisons canoniquement pour ce faire une tour d'extensions $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée de ℓ-extensions (galoisiennes) localement cyclotomiques sur K, dont nous montrons que la réunion $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, si elle est de degré fini sur K, est en un certain sens la plus petite extension N de K qui possède la propriété attendue, i.e. dont le ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_N$ est trivial ; lorsque $[K_\infty : K]$ est infini, nous montrons qu'en revanche K ne possède aucune extension finie qui soit logarithmiquement principale. La tour localement cyclotomique K_∞/K peut être regardée comme l'analogue dans le cadre logarithmique de la ℓ-tour de Hilbert pour les ℓ-classes de diviseurs au sens habituel. En particulier, l'arithmétique des ℓ-groupes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}$ étant susceptible des mêmes techniques que celle des ℓ-groupes de classes $\mathcal{C}\ell$, il est possible, tout comme pour les ℓ-tours de Hilbert, de donner d'une part des critères de finitude (via notamment la théorie des genres)

*Archiv der Math. **73** (1999), 132–140

et d'autre part des critères d'infinitude (par une adaptation ad hoc du classique théorème de Golod et Šafarevič.

Enfin, du point de vue de la théorie d'Iwasawa, le ℓ-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ s'interprète comme quotient des ℓ-genres dans l'extension procyclique K^c/K. Sa trivialité exprime donc que le corps surcirculaire K^c n'admet aucune ℓ-extension partout ℓ-décomposée non triviale ; ce qui nous amène à introduire la notion de ℓ-principalité stricte pour un tel corps.

2. Notations

Le nombre premier étant supposé fixé une fois pour toutes, nous utilisons dans ce qui suit (en omettant systématiquement l'indice ℓ) les notations de la théorie ℓ-adique du corps de classes exposée dans [6]. En particulier, étant donné un corps de nombres K, nous notons :

$\mathcal{I}_K = \prod_{\mathfrak{p}}^{res} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ le ℓ-adifié du groupe des idèles de K, i.e. le produit restreint des compactifiés ℓ-adiques $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \varprojlim K_{\mathfrak{p}}^{\times}/K_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^n}$ des groupes multiplicatifs des complétés de K,

$\widetilde{\mathcal{I}}_K$ le noyau dans de la formule du produit pour les valeurs absolues ;

$\widetilde{\mathcal{U}}_K = \prod_{\mathfrak{p}} \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ le sous-groupe des unités logarithmiques logarithmiques locales, i.e. le produit des noyaux respectifs $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} = \operatorname{Ker} \widetilde{v}_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ des valuations logarithmiques $\widetilde{v}_{\mathfrak{p}}(.) = -\frac{\operatorname{Log}|.|_{\mathfrak{p}}}{\deg \mathfrak{p}}$ construites sur les logarithmes des valeurs absolues ℓ-adiques ;

$\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^{\times}$ le sous-groupe principal de $\mathcal{I}_K$;

$\widetilde{\mathcal{E}}_K = \mathcal{R}_K \cap \widetilde{\mathcal{U}}_K$ le sous-groupe des unités logarithmiques globales ;

$\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K = \widetilde{\mathcal{I}}_K / \widetilde{\mathcal{U}}_K$ le ℓ-groupe des diviseurs logarithmiques (de degré nul) ;

$\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K = \mathcal{R}_K \widetilde{\mathcal{U}}_K / \widetilde{\mathcal{U}}_K$ le groupe des diviseurs logarithmiques principaux ;

$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K / \widetilde{\mathcal{P}\ell}_K$ le ℓ-groupe des classes logarithmiques de K ;

$\mathcal{C}\ell'_K$ le ℓ-groupe des ℓ-classes du corps K, i.e. le ℓ-sous-groupe de Sylow du quotient du groupe des classes (au sens habituel) de K par le sous-groupe engendré par les classes des places au-dessus de ℓ.

Rappelons que les classes logarithmiques ressemblent aux classes au sens habituel puisque les valuations logarithmiques $\widetilde{v}_{\mathfrak{p}}$ sont équivalentes à celles habituelles $v_{\mathfrak{p}}$ pour $\mathfrak{p} \nmid \ell$; mais qu'elles s'en distinguent substantiellement pour $\mathfrak{p}|\ell$.

Nous renvoyons à [4] pour une étude détaillée des principales propriétés des groupes logarithmiques répertoriés ci-dessus.

3. Construction "canonique" de la tour localement cyclotomique

Pour chaque corps de nombres K, notons K^c sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique (i.e. le compositum avec K de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $\mathbb{Q}^c$ de $\mathbb{Q}$) et K^{lc} sa pro-ℓ-extension abélienne localement cyclotomique maximale (i.e. la plus grande pro-ℓ-extension abélienne de K qui est complètement décomposée sur K^c en chacune de ses places). La théorie ℓ-adique du corps de classes identifie le groupe de Galois relatif $\mathrm{Gal}(K^{lc}/K^c)$ au quotient $\widetilde{\mathcal{I}}_K/\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K$ i.e. au ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K/\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K$ des classes logarithmiques du corps K quotient du ℓ-groupe des diviseurs logarithmiques de degré nul par le sous-groupe des diviseurs logarithmiques principaux ; et le choix d'un relèvement γ dans $\mathrm{Gal}(K^{lc}/K^c)$ d'un générateur topologique du quotient procyclique $\Gamma = \mathrm{Gal}(K^c/K) \simeq \mathcal{I}_K/\widetilde{\mathcal{I}}_K$ permet d'écrire (non canoniquement) le groupe $\mathrm{Gal}(K^{lc}/K)$ comme produit direct :

$$\mathrm{Gal}(K^{lc}/K^c) \simeq \mathcal{I}_K/\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K \simeq \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \times \gamma^{\mathbb{Z}_\ell}.$$

Le sous-corps K_γ de K^{lc} fixé par $\gamma^{\mathbb{Z}_\ell}$ est alors un "complément" de K^c dans K^{lc}, c'est à dire que l'on a $K_\gamma K^c = K^{lc}$ et $K_\gamma \cap K^{lc} = K^c$; d'où $\mathrm{Gal}(K_\gamma/K) \simeq \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$. En particulier K_γ coïncide avec K si et seulement si l'on a $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = 1$, i.e. si K est logarithmiquement principal.

Pour des raisons de canonicité, nous allons remplacer K_γ par le compositum des K_γ pour tous les relèvements γ :

Proposition 1. *Etant donné un corps de nombres K, notons $\widetilde{K}$ le compositum des extensions K' de K^{lc} qui vérifient les deux propriétés : $K'K^c = K^{lc}$ & $K' \cap K^{lc} = K^c$ (en d'autres termes, $\widetilde{K}$ est le compositum des extensions K_γ qui proviennent d'un relèvement γ dans $\mathrm{Gal}(K^{lc}/K)$).*

(i) Si la conjecture de Gross est en défaut dans K (pour le nombre premier ℓ), le corps $\widetilde{K}$ coïncide avec la pro-ℓ-extension abélienne localement cyclotomique maximale K^{lc} ; il est alors de degré infini sur K.

(ii) Sinon, $\widetilde{K}$ est le sous-corps de K^{lc} fixé par $\gamma^{\exp \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K}$, où γ désigne n'importe quel relèvement dans $\mathrm{Gal}(K^{lc}/K^c)$ d'un générateur topologique du quotient procyclique $\Gamma = \mathrm{Gal}(K^c/K)$, et $\exp \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ est l'exposant du ℓ-groupe (supposé alors fini) des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$.

En particulier, $\widetilde{K}$ coïncide avec K si et seulement si K est logarithmiquement principal.

Preuve. Distinguons les deux cas :

(i) Si K ne satisfait pas la conjecture de Gross, autrement dit si le groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ est infini, chacun des corps K_γ est de degré infini sur K et il en est a fortiori de même de leur compositum $\widetilde{K}$. Plus précisément, il est clair que si γ et γc sont deux relèvements d'un même générateur topologique de Γ tels que c soit d'ordre infini dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$, on a $\gamma^{\mathbb{Z}_\ell} \cap (\gamma c)^{\mathbb{Z}_\ell} = 1$, i.e. $K_\gamma \cdot K_{\gamma c} = K^{lc}$, et finalement $\widetilde{K} = K^{lc}$.

(ii) Si K satisfait la conjecture de Gross, notons e l'exposant du ℓ-groupe fini $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$. Cela étant, si γ et γc sont deux relèvements d'un même générateur topologique de Γ, on a $\gamma^{\mathbb{Z}_\ell} \cap (\gamma c)^{\mathbb{Z}_\ell} \supset \gamma^{e\mathbb{Z}_\ell}$; et l'égalité a lieu si et seulement si c est d'ordre e dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$. Il suit comme annoncé $\bigcap_{c \in \widetilde{\mathcal{C}\ell}} (\gamma c)^{\mathbb{Z}_\ell} = \gamma^{e\mathbb{Z}_\ell}$; et $\widetilde{K}$ est le sous-corps de K^{lc} fixé par $\gamma^{e\mathbb{Z}_\ell}$, ce qui se traduit par le schéma d'extensions :

$$\begin{tikzcd}[arrows=-] K^c \arrow[r] \arrow[d] & K^{lc} \arrow[d] \\ \cdot \arrow[d] & \widetilde{K} \arrow[d] \\ K \arrow[r] & K' \end{tikzcd}$$

avec $\Gamma = \mathrm{Gal}(K^c/K)$ et $[\widetilde{K} : K'] = \exp \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = e$. De plus, on a bien l'équivalence $\widetilde{K} = K \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{K} = K'$ et $K' = K \quad \Leftrightarrow \; \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = 1$. □

Par itération du procédé, nous sommes dès lors en mesure de construire la tour localement cyclotomique :

Définition 2. Nous appelons *tour localement cyclotomique* attachée à un corps de nombres K (et à un nombre premier ℓ) la suite croissante de ℓ-extensions (galoisiennes) de K définie par :

$$K_0 = K \qquad \text{et la formule de récurrence} \quad K_{n+1} = \widetilde{K}_n.$$

(i) Si, par ce procédé, il apparaît un corps K_n qui n'est pas de degré fini (ce qui a lieu si et seulement si le corps K_{n-1} contredit la conjecture de Gross), la suite n'est pas définie au-delà du rang n ; et nous disons qu'elle est *indéfinie*.

(ii) Sinon deux cas se présentent :

- ou bien la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante : le corps $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est de degré infini sur K et nous disons que la tour localement cyclotomique est *infinie* ;

- ou bien la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire : $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est alors une ℓ-extension finie de K, et nous disons que la tour localement cyclotomique est *finie*.

Preuve. Le seul point à vérifier est que les K_n sont bien des ℓ-extensions (galoisiennes) de K. Or cela résulte d'une récurrence immédiate puisque, si K_i est une ℓ-extension (galoisienne) de K, le corps K_{i+1}, s'il est défini, n'est autre que la (pro)-ℓ-extension abélienne localement cyclotomique d'exposant $e_i = \exp \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_i}$ maximale de K_i, et que cette propriété est invariante par K-conjugaison. □

Proposition 3. *Soit K un corps de nombres possèdant une tour localement cyclotomique définie $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a alors à chaque étage fini de la tour : $K_n^{lc} = K_{n+1}^c$. En particulier,*

- si la tour est infinie, la réunion $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ vérifie $K_\infty = K_\infty^c = K_\infty^{lc}$;

- si la tour est finie, K_∞ est une ℓ-extension finie de K qui est logarithmiquement principale.

Preuve. L'identité $K_n^{lc} = K_{n+1}^c$ est immédiate, par construction. Par passage à la limite nous obtenons $K_\infty^{lc} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n^{lc} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_{n+1}^c = K_\infty^c$ comme annoncé ; et deux cas se présentent :

- si la tour est infinie, l'égalité $[K_{n+1} \cap K_n^c : K_n] = \exp \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_n} \geqslant \ell$, valable pour tout n, montre que K_∞ contient la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K^c de K, i.e. que l'on a $K_\infty = K_\infty^c = K_\infty^{lc}$;

- si la tour est finie, K_∞ est alors un corps de nombres et l'identité $K_\infty^c = K_\infty^{lc}$ affirme qu'il est logarithmiquement principal. $\square$

4. Finitude de la ℓ-tour localement cyclotomique

Du point de vue théorique, la finitude de la tour localement cyclotomique est caractérisée par le théorème suivant :

Théorème 4. *Un corps de nombres K a une tour localement cyclotomique finie si et seulement s'il possède une extension finie L qui est logarithmiquement principale (i.e. qui vérifie $L^{lc} = L^c$).*

Exemple. Pour $\ell = 2$ et $\ell = 3$, les corps quadratiques réels $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ de discriminant $d \leqslant 130$ ont une ℓ-tour localement cyclotomique finie puisque l'extension $\mathbb{Q}(i, \sqrt{d})$(resp.$\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{\mathrm{d}})$) est 2-logarithmiquement (resp. 3-logarithmiquement) principale d'après l'algorithme présenté dans [2].

La proposition 3 nous dit que si K possède une tour localement cyclotomique finie $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le corps $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est alors une ℓ-extension finie de K qui est logarithmiquement principale, ce qui démontre le caractère nécessaire de la condition caractéristique proposée par le théorème. Pour établir qu'elle est également suffisante nous aurons besoin d'introduire la notion de corps surciculaire strictement ℓ-principal : rappelons qu'un corps *surciculaire* C est, par définition, la $\mathbb{Z}_\ell$-extension K^c cyclotomique d'un corps de nombres K ; en d'autres termes, c'est une extension finie de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $\mathbb{Q}^c$ de $\mathbb{Q}$.

Théorème 5. *pour tout corps surcirculaire C les trois assertions suivantes sont équivalentes : (i) le corps C ne possède aucune (pro-)ℓ-extension (galoisienne) non triviale complètement décomposée partout ;*

(ii) le corps C ne possède aucune (pro-)ℓ-extension abélienne non triviale complètement décomposée partout ;

(iii) le corps K est logarithmiquement principal.

Définition 6. Un corps surcirculaire qui vérifie les trois conditions equivalentes précédentes est dit est dit *strictement ℓ-principal*. Et nous disons que deux corps de nombres H et K sont *surciculairement équivalents* lorsqu'ils définissent le même corps surciculaire $H^c = K^c$. Le théorème 5 affirme alors en particulier que deux tels corps sont simultanément logarithmiquement principaux ou pas.

Exemple. Les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ sont 2-circulairement équivalents puisque le premier étage de leur $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique est $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{2})$.

Preuve du théorème 5. Ecrivons $C = K^c$ et notons Γ le groupe procyclique $\mathrm{Gal}(C/K)$; désignons enfin par $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(C_{cd}/C)$ le groupe de Galois de la pro-ℓ-extension complètement décomposée partout maximale de C, notons $\mathcal{G}^{ab}$ son abélianisé et $\mathcal{G}^{ab}_\Gamma \simeq \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ le plus grand quotient de $\mathcal{G}^{ab}$ sur lequel Γ agit trivialement. Par une propriété classique des pro-ℓ-groupes, nous obtenons alors :

$$\mathcal{G} = 1 \Leftrightarrow \mathcal{G}^{ab} = 1 \Leftrightarrow \mathcal{G}^{ab}_\Gamma = 1, \text{ i.e. } (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii).$$

$\square$

Preuve du théorème 4. Soit maintenant K un corps de nombres admettant une extension finie logarithmiquement principale L. De l'inclusion $K \subset L$, nous concluons alors $K^{lc} \subset L^{lc} = L^c$ donc $[K^{lc} : K^c] \leq [L^c : K^c] \leq [L : K]$; ce qui montre que K satisfait bien la conjecture de Gross, et que le premier étage $K_1 = \widetilde{K}$ de sa tour localement cyclotomique vérifie encore ${K_1}^c = K^{lc} \subset L^c$. Procèdons donc par récurrence en supposant construits les k premiers étages $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_k$ avec $K_k^c \subset L^c$. Le compositum L_k de K_k et de L est alors surciculairement équivalent à L et le théorème 5 nous dit qu'il est alors logarithmiquement principal. De l'inclusion $K_k \subset L_k$ nous concluons donc comme plus haut que K_k satisfait la conjecture de Gross et qu'on a pour $K_{k+1} = \widetilde{K}_k$ l'inclusion attendue $K_{k+1}^c = K_k^{lc} \subset L_k^{lc} = L_k^c = L^c$, ce qui permet de poursuivre la construction. Bien entendu, nous avons alors $K_\infty^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n^c \subset L^c$, d'où

$$\prod_{n=0}^{\infty} [K_{n+1}^c : K_n^c] = [K_\infty^c : K^c] \leq [L^c : K^c] \leq [L : K],$$

et la tour est finie. □

Corollaire 7. *Si K est un corps de nombres qui possède une ℓ-tour localement cyclotomique finie, le corps surciculaire K_∞^c est le plus petit corps surciculaire strictement ℓ-principal contenant K.*

Preuve. Cela résulte clairement de la démonstration du théorème 4. □

Théorème 8 (Caractérisation de la finitude). *Soient K un corps de nombres, $C = K^c$ sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique et $\mathcal{G}_K = \mathrm{Gal}(C_{cd}/C)$ le groupe de Galois relatif de la pro-ℓ-extension complètement décomposée (partout) maximale C_{cd} de C. Cela posé, le corps K possède une tour localement cyclotomique finie si et seulement si $\mathcal{G}_K$ est fini, auquel cas on a : $K_\infty^c = C_{cd}$.*

Définition 9. Nous résumons cette situation en disant que K est *quasi-logarithmiquement principal.*

Preuve. Si K admet une tour localement cyclotomique finie $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la réunion $K_\infty^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n^c$ est alors un corps surciculaire qui est ℓ-principal et c'est aussi par construction une ℓ-extension complètement décomposée de $C = K^c$. Ainsi C_{cd} est alors un corps surciculaire contenant K et strictement ℓ-principal, de sorte que $[C_{cd} : C] = [K_\infty^c : K^c]$ est fini.

Réciproquement, si $\mathcal{G}$ est fini, C_{cd} est alors un corps surciculaire contenant K et strictement ℓ-principal de sorte que K a une tour localement cyclotomique finie d'après le théorème 4. □

Il est intéressant de relire le théorème 8 à la lumière de la théorie d'Iwasawa : le corps K étant donné, notons $C = K^c$ sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique, Γ le groupe procyclique $\mathrm{Gal}(K^c/K)$ et $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\Gamma]]$ l'algèbre d'Iwasawa associée, puis $\mathcal{G}_K = \mathrm{Gal}(C_{cd}/C)$ le groupe de Galois relatif de la pro-ℓ-extension complètement décomposée maximale C_{cd} de C. L'abélianisé $\mathcal{G}_K^{ab}$ de $\mathcal{G}_K$ s'interprète alors, via la théorie ℓ-adique du corps de classes, comme la limite du système projectif (pour les applications normes) des ℓ-groupes de ℓ-classes $\mathcal{C}\ell'_L$ attachés aux étages finis L de la tour cyclotomique K^c/K :

$$\mathcal{G}_K^{ab} \simeq \varprojlim \mathcal{C}\ell'_L.$$

Le groupe $\mathcal{G}_K^{ab}$ est un Λ-module noetherien et de torsion dont nous noterons λ'_K et μ'_K les invariants d'Iwasawa. Cela étant :

Scolie 10. *Avec les notations précédentes, on a les équivalences et l'implication :*

(i) K est logarithmiquement principal $\Leftrightarrow \mathcal{G}_K = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathcal{G}_K^{ab} = 1 \;\Leftrightarrow\; \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = 0.$

(ii) K est quasi-logarithmiquement principal $\Leftrightarrow \mathcal{G}_K$ *fini* $\Rightarrow\; \mathcal{G}_K^{ab}$ *fini* $\;\Leftrightarrow\; \lambda'_K = \mu'_K = 0.$

Remarques. (i) L'invariant μ'_K coïncide avec l'invariant μ_K habituel (cf., par exemple, [3]) ; il est conjecturalement nul et effectivement pour K absolument abélien d'après un résultat de Ferrero et Washington.

(ii) L'invariant λ'_K est en général strictement plus petit que l'invariant λ_K habituel (cf. [3]) ; lorsque K est totalement réel, sa nullité conjointement à celle de μ'_K constitue la conjecture de Greenberg.

(iii) Par un argument classique de théorie d' Iwasawa, la finitude du groupe de Galois $\mathcal{G}_K^{ab} = \varprojlim \mathcal{C}\ell'_L$ équivaut à la principalité du corps surciculaire K^c, i.e. à la trivialité du ℓ-groupe des ℓ-classes $\mathcal{C}\ell'_{K^c} = \varinjlim, \mathcal{C}\ell'_L$ (cf. [1]).

Le scolie 10 laisse donc ouvert le cas où le corps surciculaire K^c est ℓ-principal ($\mathcal{C}\ell'_{K^c} = 1$) mais non strictement ℓ-principal ($\mathcal{G}_K^{ab} \neq 1$). Un argument de théorie des genres permet cependant de conclure dès lors que $\mathcal{G}_K^{ab}$ est cyclique :

Proposition 11. *Si le groupe de Galois relatif $\mathcal{G}_K^{ab}$ de la pro-ℓ-extension abélienne complètement décomposée maximale du corps surciculaire K^c est cyclique, la tour localement cyclotomique de K est alors finie.*

Preuve. Ecrivons $K^c = C$, notons $L = C_{cd}^{ab}$ la pro-ℓ-extension abélienne complètement décomposée maximale de C et $N = L_{cd}^{ab}$ celle de L. Observons que N est galoisienne sur C, notons G le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(N/C)$ et H le sous-groupe abélien $\mathrm{Gal}(N/L)$. Nous avons par construction $H = G'$, le sous-groupe dérivé de G (puisque L est la sous-extension maximale de N abélienne sur K) et, par hypothèse, $G/H = \mathcal{G}_K^{ab}$ cyclique engendré par, disons, σ. Maintenant G/H opère sur H par conjugaison et puisqu'il est cyclique, le sous-groupe $H^{1-\sigma}$ fixe la sous-extension maximale L de N qui est abélienne sur K. Il vient donc $H = H^{1-\sigma}$ i.e. $H = 1$; et L est ainsi une extension finie de C qui est donc ℓ-principale. En d'autres termes L est la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique d'une extension finie de K qui est logarithmiquement principale. $\square$

5. Critères d'infinitude pour la tour localement cyclotomique

Le scolie 10 ci-dessus nous donne, par passage à la contraposée un premier critère de non finitude pour la tour localement cyclotomique : il suffit que l'un au moins des invariants λ'_K ou μ'_K d'Iwasawa ne soit pas nul. Un inconvénient de ce critère est qu'il ne se lit pas directement dans K mais dans sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K^c.

Nous allons donner dans cette section un deuxième critère basé sur une adaptation ad hoc du théorème de Golod-Šafarevič sur les tours de Hilbert (cf. [11]) :

Théorème 12. *Soit K un corps de nombres ayant r places réelles et $2c$ places complexes ; posons $\delta = 1$ ou 0 selon que K contient ou non les racines ℓ-ièmes de l'unité. Si le ℓ-rang du groupe des classes logarithmiques de K vérifie l'inégalité*

$$\mathrm{rg}_\ell(\widetilde{\mathcal{C}\ell}) \geq 1 + 2\sqrt{r + c + \delta + 1},$$

alors la ℓ-tour localement cyclotomique de K n'est pas finie.

Exemple. Si K est un corps quadratique $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, les éléments d'ordres 2 du groupe 2-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}$ sont exactement ceux invariants par $\mathrm{Gal}[K/\mathbb{Q}]$. La formule des 2-classes logarithmiques ambiges (cf.[5], th. 4.5 et [11], th. 5.2) montre alors que le 2-rag du groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}$ est égal à 5 dès que 7 places au moins sont ramifiées au sens logarithmiques dans $K/\mathbb{Q}$ dont une primitivement. Le plus petit exemple réel est ainsi $\mathbb{Q}[\sqrt{3.5.7.11.13.17}]$, qui correspond à $d = 255\,255$, et le plus petit exemple imaginaire est $\mathbb{Q}[\sqrt{3.5.7.11.13.19}]$, qui correspond à $d = -285\,285$. Dans ce dernier cas, comme observé dans [7], le corps K a, en outre, une 2-tour de Hilbert infinie.

Preuve. Rappelons que le ℓ-rang d'un (pro)-ℓ-groupe G est le nombre minimal $\mathrm{rg}_\ell G = \dim_{F_\ell} H^1(G, \mathbb{F}_\ell)$ de générateurs de celui-ci et que, si G est fini, il est bien connu (cf. [12], §2, p.245) que l'on a :

$$\frac{1}{4}[\mathrm{rg}_\ell(G)]^2 - \mathrm{rg}_\ell\,(G) < \mathrm{rg}_\ell\, \hat{H}^{-3}(G, \mathbb{Z}_\ell).$$

Raisonnons par contraposée en supposant que K possède une tour localement cyclotomique finie K_∞, et appliquons le résultat précédent au groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. Nous obtenons ainsi :

$$(\star) \qquad \frac{1}{4}[\mathrm{rg}_\ell(G)]^2 - \mathrm{rg}(G) < \mathrm{rg}_\ell\, \hat{H}^{-1}(G, \mathcal{C}_{K_\infty}),$$

où $\mathcal{C}_{K_\infty} = \mathcal{I}_{K_\infty}/\mathcal{R}_{K_\infty}$ est le ℓ-groupe des classes d'idèles du corps K_∞, en vertu des isomorphismes du corps de classes $\hat{H}^i(G, \mathbb{Z}_\ell) \simeq \hat{H}^{i+2}(G, \mathcal{C}_{K_\infty})$ (cf., par exemple, [14], p.197, §11.3). Introduisons à présent le sous-groupe $\widetilde{\mathcal{I}}_{K_\infty}/\mathcal{R}_{K_\infty}$ des classes d'idèles de degré nul. La suite exacte courte canonique

$$1 \to \widetilde{\mathcal{I}}_{K_\infty}/\mathcal{R}_{K_\infty} \to \mathcal{I}_{K_\infty}/\mathcal{R}_{K_\infty} \to \mathcal{I}_{K_\infty}/\widetilde{\mathcal{I}}_{K_\infty} \simeq \mathbb{Z}_\ell \to 1$$

nous donne la suite de cohomologie

$$\hat{H}^{-1}(G, \widetilde{\mathcal{I}}_{K_\infty}/\mathcal{R}_{K_\infty}) \to \hat{H}^{-1}(G, \mathcal{C}_{K_\infty}) \to \hat{H}^{-1}(G, \mathbb{Z}_\ell),$$

où le dernier groupe à droite est nul (cf. [13], p.193, §11.1). En particulier le morphisme à gauche est surjectif, ce qui nous donne la deuxième inégalité :

$$\mathrm{rg}_\ell\, \hat{H}^{-1}(G, \mathcal{C}_{K_\infty}) \leqslant \mathrm{rg}_\ell\, \hat{H}^{-1}(G, \widetilde{\mathcal{I}}_{K_\infty}/\mathcal{R}_{K_\infty}) \;=\; \mathrm{rg}_\ell\, \hat{H}^{-1}(G, \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\infty}\mathcal{R}_{K_\infty}/\mathcal{R}_{K_\infty})$$

$$(\star\star) \qquad \mathrm{rg}_\ell\, \hat{H}^{-1}(G, \mathcal{C}_{K_\infty}) \leqslant \mathrm{rg}_\ell\, \hat{H}^{-1}(G, \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\infty}/\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty}),$$

puisque, le groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_\infty} = \widetilde{\mathcal{I}}_{K_\infty}/\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\infty}\mathcal{R}_{K_\infty}$ du corps K_∞ est trivial en vertu de la proposition 3. Les groupes de cohomologie $\hat{H}^i(G,\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\infty})$ étant tous nuls (comme établi dans le lemme 13 ci-après), nous avons enfin la troisième inégalité :

$$(\star\star\star) \qquad \mathrm{rg}_\ell\, \hat{H}^{-1}(G,\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\infty}/\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty}) \;=\; \mathrm{rg}_\ell\, \hat{H}^0(G,\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty}) \leq \mathrm{rg}_\ell \widetilde{\mathcal{E}}_K \;=\; r+c+\delta,$$

puisque l'hypothèse de finitude implique que le corps K satisfait la conjecture de Gross, de sorte que le ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ des unités logarithmiques globales est le produit du ℓ-groupe des racines de l'unité dans K et d'un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de dimension $r+c$ (cf. [J_3], prop. 3.4.). En fin de compte, il vient donc :

$$\frac{1}{4}[\mathrm{rg}_\ell(G)]^2 - \mathrm{rg}_\ell(G) < \; r+c+\delta, \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{rg}_\ell(G) < 2 + 2\sqrt{r+c+\delta+1}.$$

Et comme $G = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ admet $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_\infty} \times \big(\mathbb{Z}_\ell/\exp\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_\infty}\mathbb{Z}_\ell\big) \;\simeq\; \mathrm{Gal}(K_1/K)$ comme quotient, il vient bien, comme attendu :

$$\mathrm{rg}_\ell(\widetilde{\mathcal{C}\ell}) \leq \mathrm{rg}_\ell G \;-1 < 1 + 2\sqrt{r+c+\delta+1}\ ;$$

ce qui achève la démonstration, compte tenu du : □

Lemme 13. *Si L/K est une ℓ-extension localement cyclotomique de corps de nombres, de groupe de Galois G. Alors le groupe des unités logarithmiques locales est G-cohomologiquement trivial ; i.e. on a :*

$$\hat{H}^i(G,\widetilde{\mathcal{U}}_L) = 1, \qquad \forall\ i \in\ \mathbb{Z}.$$

Preuve. Pour chaque place finie $\mathfrak{p}$ de K, faisons choix d'une place $\mathfrak{P}$ de L au-dessus de K et notons $G_\mathfrak{p} = \mathrm{Gal}(L_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p})$ le groupe de décomposition associé. Le lemme de Shapiro nous donne l'isomorphisme :

$$\hat{H}^i(G,\widetilde{\mathcal{U}}_L) = \hat{H}^i(G,\prod_{\mathfrak{P}}\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}) = \prod_{\mathfrak{p}}\hat{H}^i(G,\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}) = \prod_{\mathfrak{P}}\hat{H}^i(G_\mathfrak{p},\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p})$$

où les groupes $G_\mathfrak{p}$ sont réputés cycliques puisque par hypothèse les extensions $L_\mathfrak{p}$ sont contenues dans la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de $K_\mathfrak{p}$. Maintenant, comme les unités logarithmiques sont précisément les normes cyclotomiques (cf. [4]), la norme locale $\mathrm{N}_{L_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}}$ est surjective de $\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$ dans $\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p} \;=\; \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}^{G_\mathfrak{p}}$; ce qui nous donne directement $\hat{H}^0(G_\mathfrak{p},\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}) \;=\; 1$. Et puisque le caractère de $G_\mathfrak{p}$ défini par $\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$ est le caractère régulier, le quotient de Herbrand $q(G_\mathfrak{p},\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}) = \mid \hat{H}^0(G_\mathfrak{p},\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}) \mid / \mid \hat{H}^1(G_\mathfrak{p},\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}) \mid$ vaut 1. Finalement il vient aussi $\hat{H}^1(G_\mathfrak{p},\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}) = 1$ et le lemme s'ensuit par périodicité. □

Références bibliographiques

[1] M. Grandet & J.-F. Jaulent, *Sur la capitulation dans une $\mathbb{Z}_\ell$-extension,* J. reine angew. Math. **362** (1985), 213–217.

[2] F. Diaz y Diaz & F. Soriano, *Approche algorithmique du groupe des classes logarithmiques,* J. Number Theory (à paraître).

[3] J.-F. Jaulent, *Représentation ℓ-adiques associées aux invariants cyclotomiques,* Proc. japan Acad. 61 (1985), 213–217.

[4] J.-F. Jaulent, *Noyau Universel et Valeurs absolues,* Journées Arithmétiques de Marseille-Luminy. Astérisque 198-199-200 (1991), 187–207.

[5] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres,* J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1985), 303–327.

[6] J.-F. Jaulent, *Théorie ℓ-adique globale du corps de classes,* J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.

[7] J. Martinet, *Tours de corps de classes et estimation des discriminants,* Invent. Math. **44** (1978), 65–73.

[8] C. Maire, *Compléments à un résultat de Šafarevič,* Math. Nachr. **198** (1999), 149–168.

[9] C. Maire, *Finitude de tours et p-tours T-ramifiées modérées S-décomposées,* J. Théor. Nombres Bordeaux **8** (1996), 47–73.

[10] M. Perret, *Tours ramifiées infinies de corps de classes,* J. Number Theory **38** (1991), 300–322.

[11] P. Roquette, *On class field towers,* in J.-W.-S. Cassels & A. Fröhlich, Algebraic number theory, Academic Press, London **362** (1985), 213–217.

[12] F. Soriano, *Classes logarithmiques ambiges des corps quadratiques,* Acta Arith. **78.3** (1997), 201–219.

[13] F. Soriano, *Sur les classes logarithmiques des CM-extensions,* C.R. Acad. Sci. Paris **324.I** (1985), 737–739.

[14] J. Tate, *Global class field theory,* in J.-W.-S. Cassels & A. Fröhlich, Algebraic number theory, Academic Press, London (1967), 162–203.

Jean-François Jaulent
Université Bordeaux 1
Institut de Mathématiques
351, cours de la Libération
F-33405 TALENCE Cedex
jaulent@math.u-bordeaux.fr

Florence Soriano
Département de Mathématiques
Université de Metz
Ile du Saulcy
F-57045 METZ Cedex
soriano@poncelet.univ-metz.fr

Références de l'article

[1] J.-F Jaulent et F. Soriano, *Sur les tours localement cyclotomiques,* Archiv der Math. **73** (1999), 132-140.