A propos de la tour localement cyclotomique d'un corps de nombres*

Jean-François JAULENT et Christian MAIRE

Résumé. Nous adaptons des résultats récents sur le problème de la tour de Hilbert d'un corps de nombres au cas de la ℓ-tour localement cyclotomique.

Abstract. We adapt some recent results on Hilbert ℓ-towers of number fields to locally cyclotomic ℓ-towers (i.e. logarithmic towers).

Introduction

Soient k un corps de nombres, ℓ un nombre premier, et $\widetilde{Cl}_k$ le ℓ-groupe des classes logarithmiques de k (cf. [5]). On sait que la conjecture de Gross généralisée postule la finitude de ce groupe.

Ainsi dans toute la suite, nous supposerons vérifiée cette conjecture dans les corps que nous considérons, autrement dit que les ℓ-groupes des classes logarithmiques qui interviennent sont finis.

A partir de k et de ce groupe, il est défini dans [6] une ℓ-tour localement cyclotomique de k, construite sur le modèle de la ℓ-tour de Hilbert. Nous nous proposons donc de regarder certains résultats autour du problème de la tour de Hilbert dans ce cadre précis.

Tout d'abord nous rappelons la définition du groupe des classes logarithmiques (§1), puis celle de la ℓ-tour localement cyclotomique, ainsi que les premières propriétés de cette tour. Nous appliquons ensuite un résultat de théorie des genres à l'extension K/k afin de donner un critère d'infinitude de la ℓ-tour localement cyclotomique de K portant sur le nombre de places logarithmiquement ramifiées dans K/k (§2). Nous illustrons ceci en donnant de nombreux exemples de corps quadratiques ayant une 2-tour localement cyclotomique infinie (§3).

Dans la dernière section enfin nous donnons quelques renseignements sur le groupe des ℓ-classes logarithmiques du premier étage de la tour, que nous illustrons pour $\ell \neq 2$ par des exemples quadratiques (§4).

*Abh. Math. Sem. Hamburg **70** (2000), 239–250.

1. Rappels sur le ℓ-groupe des classes logarithmiques

Pour toute la suite ℓ désigne un nombre premier fixé. Les résultats de [4] et [5] que nous utilisons peuvent se résumer comme suit:

Valeur absolue ℓ-adique et valuation logarithmique. Si K/k désigne une extension de corps de nombres et $\mathfrak{P}$ une place finie de K, la quantité

$$\widetilde{e}_{\mathfrak{P}}(K/k) = [K_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{P}} \cap k_{\mathfrak{p}}\widehat{\mathbb{Q}_p}],$$

où $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}|p$ et $\widehat{\mathbb{Q}_p}$ est la $\hat{\mathbb{Z}}$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_p$ (i.e. le produit des $\mathbb{Z}_q$-extensions cyclotomiques de $\mathbb{Q}_p$ pour tous les q) est, par convention *l'indice de ramification logarithmique* de $\mathfrak{P}$ dans K/k. Lorsque l'extension K/k est galoisienne, le groupe de Galois $Gal(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}} \cap k_{\mathfrak{p}}\widehat{\mathbb{Q}_p})$ est dit groupe de ramification logarithmique $\mathfrak{P}$ dans K/k et noté $\widetilde{In}_{\mathfrak{P}}(K/k)$; il peut donc être vu comme un sous-groupe de $Gal(K/k)$.

Le *degré résiduel logarithmique* est, lui :

$$\widetilde{f}_{\mathfrak{P}}(K/k) = [K_{\mathfrak{P}} \cap k_{\mathfrak{p}}\widehat{\mathbb{Q}_p} : k_{\mathfrak{p}}] = [K_{\mathfrak{P}} : k_{\mathfrak{p}}]/\widetilde{e}_{\mathfrak{P}}(K/k).$$

Par suite, comme dans le cas classique, le produit $\widetilde{e}_{\mathfrak{P}}(K/k)\widetilde{f}_{\mathfrak{P}}(K/k)$ coïncide avec le degré local $[K_{\mathfrak{P}} : k_{\mathfrak{p}}]$.

Soit maintenant k un corps de nombres et $\mathfrak{p}$ un premier de k. La valeur absolue ℓ-adique et la valuation logarithmique sont définies sur le compactifié ℓ-adique $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \varprojlim k_{\mathfrak{p}}^{\times}/k_{\mathfrak{p}}^{\times\,\ell^n}$ du groupe multiplicatif $k_{\mathfrak{p}}^{\times}$; pour $x \in \mathbb{Z}_{\ell}{}^{\times}$, notons $\langle x \rangle$ l'élément du sous-groupe des unités principales qui apparait dans la factorisation canonique de x ; la *valeur absolue ℓ-adique* est définie alors par la formule :

$$|x|_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} \langle N\mathfrak{p}^{-v_{\mathfrak{p}}(x)} \rangle, & \text{si } \mathfrak{p} \not| \ell \\ \langle N_{\mathfrak{p}}(x) N\mathfrak{p}^{-v_{\mathfrak{p}}(x)} \rangle, & \text{si } \mathfrak{p} | \ell \end{cases}$$

N étant la norme absolue, $N_{\mathfrak{p}}$ la norme de $k_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_{\ell}$, et $v_{\mathfrak{p}}$ la valuation en $\mathfrak{p}$.

Pour p étranger à ℓ, il est commode de poser $deg(p) = Log_{Iw} p$, puis $deg(\ell) = \ell$ pour $\ell \neq 2$, et $deq(\ell) = 4$ sinon. On définit ensuite le *degré* de $\mathfrak{p}$ par

$$deg(\mathfrak{p}) = \widetilde{f}_{\mathfrak{p}}(k/\mathbb{Q}) deg(p).$$

La *valuation logarithmique* est alors donnée à partir de la valeur absolue ℓ-adique $|.|_{\mathfrak{p}}$ et du degré résiduel logarithmique par la formule :

$$\widetilde{v}_{\mathfrak{p}} = \frac{-\log |.|_{\mathfrak{p}}}{deg(\mathfrak{p})}.$$

Unités logarithmiques locales et globales. Le ℓ-groupe des *unités logarithmiques locales* est le noyau $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ de $\widetilde{v}_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$. Remarquons que si $\mathfrak{p}$ et ℓ sont étrangers, $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ s'identifie au sous-groupe de ℓ-torsion des unités locales de k en $\mathfrak{p}$. Par contre, si $\mathfrak{p}$ divise ℓ, $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ est le produit direct du sous-groupe des racines de l'unité d'ordre ℓ-primaire contenue dans $k_{\mathfrak{p}}$ par un $\mathbb{Z}_{\ell}$-module libre de rang $[k_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_{\ell}]$ (cf. [5]). Enfin, pour une place infinie $\mathfrak{p}$, le groupe $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ coïncide avec le groupe classique des unités locales. On voit par là que $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ ne se distingue du sous-groupe unité $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ que pour $\mathfrak{p}|\ell$.

Par suite, le ℓ-adifié $\mathcal{J}_k$ du groupe des idèles, défini comme le produit $\prod^{res}\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ restreint aux familles $(x_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ dont tous les termes, à l'exception d'un nombre fini d'entre eux, tombent dans $\mathcal{U}_\mathfrak{p}$, contient comme sous-module compact le produit $\widetilde{\mathcal{U}}_k$ des $\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$, qui est ainsi le sous-groupe des *unités logarithmique semi-locales.*

Comme $\mathcal{J}_k$ contient par ailleurs le rayon $\mathcal{R}_k = \mathbb{Z}_\ell \otimes k^\times$ ou *ℓ-groupe des idèles principaux*, l'intersection $\widetilde{\mathcal{E}}_k = \mathcal{R}_k \cap \widetilde{\mathcal{U}}_k$ est le ℓ-groupe des *unités logarithmiques globales* de k. *Sous la conjecture de Gross*, ce groupe est le produit direct du sous-groupe des racines de l'unités d'ordre ℓ-primaire par un $\mathbb{Z}_\ell$-module de rang $r_k + c_k$, où r_k est le nombre de places réelles de k et c_k celui de places complexes.

Diviseurs et classes logarithmiques. Le ℓ-groupe Dl_k des *diviseurs logarithmiques* de k est le $\mathbb{Z}_\ell$-module libre construit sur les places finies de k ; c'est encore l'image du quotient $\mathcal{J}_k/\widetilde{\mathcal{U}}_k$ par la famille des valuations logarithmiques $(\widetilde{v}_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$

$$Dl_k = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in Pl_k^0} \mathbb{Z}_\ell \ \mathfrak{p} \simeq \mathcal{J}_k/\widetilde{\mathcal{U}}_k.$$

Le *degré* d'un diviseur logarithmique $\mathfrak{d} = \sum a_\mathfrak{p}\mathfrak{p}$ de k est par convention la quantité

$$deg_k(\mathfrak{d}) = \sum a_\mathfrak{p} deg(\mathfrak{p}).$$

Le sous-module $\widetilde{Dl}_k$ de Dl_k formé des diviseurs de degré nul est ainsi l'image $\widetilde{\mathcal{J}}_k/\widetilde{\mathcal{U}}_k$ dans Dl_k du noyau $\widetilde{\mathcal{J}}_k$ dans $\mathcal{J}_k$ de la formule du produit pour les valeurs absolues ℓ-adiques. L'application $\mathbb{Z}_\ell$-linéaire dl_k :

$$x \in \mathcal{R}_k \mapsto \sum \widetilde{v}_\mathfrak{p}(x)\mathfrak{p},$$

envoie alors $\mathcal{R}_k$ sur un sous-module $\widetilde{\mathcal{P}l}_k$ de $\widetilde{Dl}_k$ (cf. [5]) ; on dit que $\widetilde{\mathcal{P}l}_k$ est le *sous-groupe principal* de $\widetilde{Dl}_k$, et le quotient

$$\widetilde{Cl}_k = \widetilde{Dl}_k/\widetilde{\mathcal{P}l}_k \simeq \widetilde{\mathcal{J}}_k/\widetilde{\mathcal{U}}_k\mathcal{R}_k$$

est par définition le *ℓ-groupe des classes logarithmiques* du corps k. Lorsqu'il est trivial on dit que k est *logarithmiquement principal*, ou encore *log-principal.*

2. Compléments sur la ℓ-tour localement cyclotomique

Partons de l'interprétation naturelle du ℓ-groupe des classes logarithmiques comme groupe de Galois d'une ℓ-extension abélienne : soit k^{lc} la ℓ-extension abélienne localement cyclotomique maximale de k i.e. la plus grande pro-ℓ-extension abélienne de k qui est complétement décomposée sur la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique k^c de k en chacune de ses places. D'après [5], le sous-groupe normique de $\mathcal{J}_k$ attaché à k^{lc} par la théorie ℓ-adique du corps de classes est $\widetilde{\mathcal{U}}_k\mathcal{R}_k$, tandis que celui attaché à k^c est $\widetilde{\mathcal{J}}_k$. Il vient donc canoniquement :

$$Gal(k^{lc}/k^c) \simeq \widetilde{\mathcal{J}}_k/\widetilde{\mathcal{U}}_k\mathcal{R}_k \simeq \widetilde{Cl}_k,$$

de sorte que le groupe $\widetilde{Cl}_k$ mesure bien l'obstruction globale au problème du plongement dans la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique.

Cela étant, il est construit dans [6] une suite d'extensions comme suit :

Partant de $k_0 = k$, on définit k_{n+1} comme la ℓ-extension abélienne localement cyclotomique maximale de k_n d'exposant celui de $\widetilde{Cl}_{k_n}$ (c'est à dire comme le compositum des sous-corps de k_n^{lc} fixés par les $\gamma.c$, où γ désigne un relèvement arbitraire à $Gal(k_n^{lc}/k_n)$ d'un générateur topologique de $Gal(k_n^c/k_n) \simeq \mathbb{Z}_\ell$, et c parcourt $\widetilde{Cl}_{k_n} \simeq Gal(k_n^{lc}/k_n^c)$. Et on pose finalement $k_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} k_n$.

Si $[k_\infty : k]$ est fini, on dit que la tour est finie ; sinon on dit qu'elle est infinie. Le premier cas se produit si et seulement si k possède une extension finie K qui est log-principale (cf. [6]) ; dans le deuxième cas aucune extension K finie de k n'admet elle-même une telle tour finie ; en d'autres termes la pro-ℓ-extension localement cyclotomique maximale $\bar{K}^{lc}$ est alors de degré infini sur sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K^c.

Il peut être intéressant dans ce dernier cas de préciser le comportement des groupe $\widetilde{Cl}_k$ dans la ℓ-tour localement cyclotomique k_∞/k : convenons de dire qu'une suite $(F_n/k)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-extensions finies de k_∞/k est *exhaustive* lorsqu'on a $k_\infty = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. F. Hajir [3] a noté que si un ℓ-groupe G passe le test de Golod-Shafarevich, i.e s'il vérifie $d^2 \geq 4r$ (où d est le nombre minimal de générateurs et r celui de relations), alors G n'est pas pro-ℓ-analytique et qu'ainsi pour toutes suites G_i d'ouverts de G, le ℓ-rang des G_i tend vers l'infini. En particulier, cette remarque s'adapte parfaitement à notre situation.

Théorème 2.1. *Soit r_k le nombre de places réelles de k et c_k le nombre de places complexes, $\delta_k = 1$ si k contient ζ_ℓ et 0 sinon. Si le ℓ-rang $d_\ell\widetilde{Cl}_k$ de $\widetilde{Cl}_k$ est supérieur ou égal à $1+2\sqrt{r_k + c_k + 1 + \delta_k}$, alors pour toute suite exhaustive de sous-extensions finies F_n/k de k_∞/k, l'ordre du ℓ-groupe $\widetilde{Cl}_{F_n}$ des classes logarithmiques de F_n tend vers l'infini avec n.*

Preuve. En effet, d'après [6], $G = Gal(k_\infty/k)$ passe le test de Golod et Shafarevich dès que l'on a l'inégalité $d_\ell\widetilde{Cl}_k \geq 1 + 2\sqrt{r_k + c_k + 1 + \delta_k}$. □

Nous allons voir comment améliorer ce critère à l'aide de la théorie logarithmique des genres dans le cas d'une ℓ-extension cyclique K/k de corps de nombres, en nous inspirant des méthodes existantes pour les tours de Hilbert. Le résultat principal de cette section s'énonce comme suit :

Théorème 2.2. *Soit K/k une extension cyclique de degré ℓ. Conservons les notations précédentes et notons alors $\rho_{K/k}$ la somme du nombre de places réelles de k se complexifiant dans K/k et du nombre de places finies de k ayant un indice de ramification logarithmique non trivial.*

Alors l'inégalité

$$\rho_{K/k} \geq 2 + 2\sqrt{r_k + c_k + 1 + \delta_k} + d_\ell\widetilde{\mathcal{E}}_k,$$

implique que la ℓ-tour localement cyclotomique K_∞/K est infinie.

Corollaire 2.3 (Application aux cas quadratiques).
i) Soit $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un corps quadratique réel. S'il y a au moins 8 places qui se ramifient dans $F/\mathbb{Q}$, alors la 2-tour F_∞/F est infinie.

ii) Soit $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ un corps quadratique imaginaire : S'il y a au moins 7 places finies qui se ramifient dans $F/\mathbb{Q}$, alors la 2-tour F_∞/F est infinie.

Bien entendu, ce résultat peut être amélioré par exemple si 2 est logarithmiquement ramifiée dans $F/\mathbb{Q}$: ainsi dans [6], il est donné les deux exemples suivants : $\mathbb{Q}(\sqrt{3.5.7.11.13.17})$, et $\mathbb{Q}(\sqrt{-3.5.7.11.13.19})$.

La preuve du théorème 2.2 repose sur un résultat général de la théorie logarithmique des genres que nous allons maintenant établir.

Théorème 2.4 (Suite exacte des ℓ-genres logarithmiques)**.** *Soit K/k une ℓ-extension abélienne et M le ℓ-corps des genres logarithmiques relatifs à l'extension K^{lc}/k, c'est à dire la plus grande sous-extension de K^{lc} qui est abélienne sur k. Pour chaque place $\mathfrak{p}$ de k, notons $D_p(K/k)$ (resp. $\widetilde{In}_{\mathfrak{p}}(K/k)$ le groupe de décomposition (resp.*

sous-groupe d'inertie logarithmique) dans l'extension abélienne M/k. Les symboles locaux de reste normique conduisent alors à la suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}}_k/(\widetilde{\mathcal{E}}_k \cap \mathcal{N}^{loc}_{K/k}) \xrightarrow{\Phi} \bigoplus_{p|\infty} D_{\mathfrak{p}}(M/k) \bigoplus_{p \in Pl^0_k} \widetilde{In}_{\mathfrak{p}}(M/k) \xrightarrow{\Psi} Gal(M/k^{lc}) \longrightarrow 1.$$

Preuve du Théorème 2.4. Rappelons tout d'abord l'ordre de $Gal(M/k^{lc})$ (cf. [5]) :

$$|Gal(M/k^{lc})| = \frac{\prod_{\mathfrak{p}|\infty} d_{\mathfrak{p}}(K/k) \prod_{\mathfrak{p}\in Pl^0_k} \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(K/k)}{(\widetilde{\mathcal{E}}_k : \widetilde{\mathcal{E}}_k \cap \mathcal{N}^{loc}_{K/k})}, \tag{1}$$

où $d_{\mathfrak{p}}(K/k)$ est l'ordre du sous-groupe de décomposition de $\mathfrak{p}$ dans K/k, et $\widetilde{\mathcal{E}}_k \cap \mathcal{N}^{loc}_{K/k}$ le groupe des unités logarithmiques de k qui sont normes locales partout dans K/k. Les deux morphismes Φ et Ψ sont définis de la manière suivante :

$$\Phi : \varepsilon \mapsto \oplus_{\mathfrak{p}} (\varepsilon, M/k)_v$$

est donné par les symboles locaux de réciprocité $(., M/k)_v$, et le second Ψ par la formule du produit :

$$\Psi : \oplus_v \sigma_v \mapsto \prod_v \sigma_v.$$

Bien entendu, on a $\mathrm{Im}(\Psi) \subset ker(\Phi)$ et $\mathrm{Im}(\Phi) = Gal(M/k^{lc})$ par maximalité de k^{lc}. Cela étant, les égalités immédiates $\widetilde{\mathcal{E}}_k \cap \mathcal{N}^{loc}_{M/k} = \widetilde{\mathcal{E}}_k \cap \mathcal{N}^{loc}_{K/k}$ et $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(M/k) = \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(K/k)$ assurent alors l'exactitude de la suite. □

Preuve du Théorème 2.2. La suite exacte du théorème 2.4 conduit à l'inégalité :

$$\begin{aligned} d_\ell \widetilde{Cl}_K &\geq d_\ell Gal(M/k^c) - d_\ell Gal(K/k) \\ &\geq \rho_{K/k} - d_\ell \widetilde{\mathcal{E}}_k - 1. \end{aligned}$$

La fin provient du théorème 2.1. □

3. Applications aux corps quadratiques

Nous nous proposons de donner des exemples de corps quadratiques ayant peu de ramification et une 2-tour localement cyclotomique infinie. Pour cela nous nous inspirons des constructions classiques dans le cadre des ℓ-tours de Hilbert (cf. [8] par exemple).

Rappelons en le principe : Soit $\mathbf{Q}_\infty$ la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$ et $\mathbf{Q}_i$ le i-ème étage de $\mathbf{Q}_\infty$ (i.e. $\mathbf{Q}_0 = \mathbb{Q}$, $\mathbf{Q}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, etc).

Nous partons de $k = \mathbf{Q}_h$, avec $[k : \mathbb{Q}] = 2^h$; étant donné un corps quadratique réel ou imaginaire $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, avec d sans facteur carré, on pose $K = kF$. Ainsi sont au moins logarithmiquement ramifiées dans K/k les places divisant d étrangères à 2. Ce nombre est élevé si ces places sont décomposés dans $k/\mathbb{Q}$, ce qui se traduit par une condition de congruence modulo 2^h.

Soit maintenant Cl_F le 2-groupe des classes de F (au sens classique). On a le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Notons F' l'extension abélienne 2-décomposée maximale de F. Alors*

1) Si 2 est inerte dans $F/\mathbb{Q}$, l'exposant de Cl_F divise l'exposant de $\widetilde{Cl}_F$,

2) Si 2 est ramifié dans $F/\mathbb{Q}$ et si $\mathbf{Q}_1F$ n'est pas inclus dans F' (en particulier si $\mathbf{Q}_1F/F$ est ramifiée), $exp(Cl_F)/2$ divise $exp(\widetilde{Cl}_F)$,

3) Si 2 est ramifié dans $F/\mathbb{Q}$ et si $\mathbf{Q}_1F$ est inclus dans F', $exp(Cl_F)/4$ divise $exp(\widetilde{Cl}_F)$.

Preuve du lemme. Distinguons deux cas :

Si 2 est inerte dans $F/\mathbb{Q}$, le 2-groupe des 2-classes Cl'_F de F (au sens classique) coïncide avec Cl_F. Par ailleurs, comme la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique de F est totalement ramifiée en 2, on a que Cl'_F est un quotient de $\widetilde{Cl}_F$, d'où le premier point.

Si 2 est ramifié dans $F/\mathbb{Q}$, l'ordre de la classe dans Cl_F du premier au-dessus de 2 est au plus 2. Maintenant, le corps $F' \cap \mathbf{Q}_\infty F$ est soit F, soit $\mathbf{Q}_1 F$. Ainsi $exp(Cl_F)/2$ divise $exp(Cl'_F)$ dans le premier cas, et $exp(Cl_F)/4$ divise $exp(Cl'_F)$ dans le second cas. □

Si l'on prend suffisamment de places divisant d, il suit du théorème 2.2 que K a une 2-tour localement cyclotomique infinie. De plus si l'exposant de $\widetilde{Cl}_F$ est au-moins égal à 2^h, alors le premier étage F_1 de la 2-tour de F contient K. Cela implique en particulier que la 2-tour localement cylotomique de F est infinie d'après le paragraphe 2.

Proposition 3.2. *Il existe une infinité de corps quadratiques imaginaires F avec seulement trois places ramifiées sur $\mathbb{Q}$, qui ont 2-tour localement cyclotomique infinie ; par exemple le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-3.7.47})$.*

De même, il existe une infinité de corps quadratiques réels F avec seulement quatre places ramifiées sur $\mathbb{Q}$, qui ont 2-tour localement cyclotomique infinie ; par exemple le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{5.31.79.1249})$.

Preuve. Posons $k = \mathbf{Q}_2$ et distinguons les deux cas :

a) Considérons d'abord les corps quadratiques imaginaires $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-l_1.l_2.l_3})$ avec $l_3 \equiv 1 \pmod{16}$, ${l_2}^2 \equiv 1 \pmod{16}$,
$\left(\dfrac{l_1}{l_3}\right) = \left(\dfrac{l_2}{l_3}\right) = 1$ et $l_1.l_2.l_3 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 8)$.

Nous pouvons alors noter que l_3 se décompose totalement dans $k/\mathbb{Q}$. Soit $K = kF$. Le théorème 2.2 appliqué à K/k montre que K a une 2-tour localement cyclotomique infinie dès que $\rho_{K/k}$ est supérieur à 12. Or ici quatre places réelles se complexifient dans K/k, quatre places au-dessus de l_3 sont logarithmiquement ramifiées dans K/k, deux places au-dessus de l_2, une au moins au-dessus de l_1, et la place au-dessus de 2 ; il vient donc $\rho_{K/k} \geq 12$.

Pour conclure, il suffit alors de noter que par le choix des l_i, le 4-rang de Cl_F est au moins égal à 1 (cf. [2]). Ainsi d'après le lemme 3.1 (point 1), il suit que 4 divise $exp(\widetilde{Cl}_F)$.

b) Regardons maintenant les corps quadratiques réels $F = \mathbb{Q}(\sqrt{l_1.l_2.l_3.l_4})$, avec pour $i = 1, 2, 3$, $l_i \equiv \pm 1 \pmod{16}$,
$\left(\dfrac{l_1}{l_2}\right) = \left(\dfrac{l_2}{l_3}\right) = \left(\dfrac{l_1}{l_3}\right) = \left(\dfrac{l_4}{l_2}\right) = \left(\dfrac{l_4}{l_3}\right) = 1$, et $l_1.l_2.l_3.l_4 \equiv 5 \pmod{8}$. Nous concluons comme précédemment. □

Pour terminer cette partie, nous recherchons des corps quadratiques ayant le moins de ramification possible ou bien ayant un petit discriminant et une 2-tour localement cyclotomique infinie. Ces exemples sont obtenus de deux façons différentes : la première famille d'exemples provient de la connaissance du groupe des classes. La seconde est obtenue après un calcul direct de $\widetilde{Cl}_F$ à partir du programme élaboré par F. Diaz y Diaz et F. Soriano (cf. [1]).

Proposition 3.3.

1) Soit p un nombre premier congru à $1 \ (mod\ 64)$. Supposons que l'ordre du groupe des classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ soit divisible par 32. Alors $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ a une 2-tour localement cyclotomique infinie ; par exemple $\mathbb{Q}(\sqrt{-1217})$.

2) Soit p un nombre premier congru à -1 $(mod\, 64)$. Supposons que l'ordre du groupe des classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{-2.p})$ soit divisible par 64. Alors $\mathbb{Q}(\sqrt{-2.p})$ a une 2-tour localement cyclotomique infinie ; par exemple $\mathbb{Q}(\sqrt{-2.1087})$.

3) Soient l_1 et l_2 deux premiers, vérifiant $l_1 \equiv -l_2 \equiv 1$ $(mod\, 64)$, et tels que le 2-groupe des classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{l_1.l_2})$ soit d'ordre au moins divisible par 32. Alors $\mathbb{Q}(\sqrt{l_1.l_2})$ a une 2-tour localement cylotomique infinie ; par exemple $\mathbb{Q}(\sqrt{383.1409})$.

Preuve. Prenons $k = \mathbf{Q}_4$, puis notons par exemple que pour le point 2, nous sommes dans la situation 3 du lemme 3.1. □

Proposition 3.4. *Il existe des corps quadratiques imaginaires avec une seule place finie ramifiée sur $\mathbb{Q}$ (au sens classique et logarithmiquement), ayant une 2-tour localement cyclotomique infinie ; par exemple les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ avec*

$$p = 3967, 4159.$$

Preuve. Considérons les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ avec $p \equiv -1 \pmod{64}$ et prenons $k = \mathbf{Q}_4$. Pour les exemples donnés plus haut, nous calculons $\widetilde{Cl}_F$, et remarquons que 16 divise $exp(\widetilde{Cl}_F)$. Ce sont les seuls corps sous ces conditions avec $p \leq 5000$. □

Proposition 3.5. *Il existe des corps quadratiques réels avec seulement deux places ramifiées sur $\mathbb{Q}$ (au sens classique et logarithmiquement) ayant une 2-tour localement cyclotomique infinie ; par exemple les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{l_1.l_2})$ avec*

$$l_1.l_2 = 127.1151, 1151.1663,$$

ou encore avec

$$l_1.l_2 = 193.257, 193.1217, 449.577, 577.1601, 641.769.$$

Preuve. Nous considérons les corps quadratiques $F = \mathbb{Q}(\sqrt{l_1.l_2})$ avec $l_1 \equiv l_2 \equiv \pm 1 \pmod{64}$, et $l_1.l_2 \equiv +1 \pmod{64}$. Nous nous assurons ensuite que 16 divise $exp(\widetilde{Cl}_F)$. Nous obtenons ainsi les deux familles d'exemples. Nous avons énoncé tous ceux avec $l_1, l_2 \leq 2000$.

Il est à noter que pour $l_1 \equiv l_2 \equiv -1 \pmod{64}$, le 2-groupe des classes de F (au sens classique) est trivial. □

Enfin citons les deux corps quadratiques imaginaires suivants, en remarquant que ceux-ci ont un petit discriminant :

Proposition 3.6. *Les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-7.193})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-17.127})$ ont une 2-tour localement cyclotomique infinie.*

Preuve. Pour $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-l_1.l_2})$, nous avons :

- 8 divise $exp(\widetilde{Cl}_F)$,
- $l_1 \equiv \pm 1 \pmod{32}$
- ${l_2}^4 \equiv 1 \pmod{32}$

Il suffit alors pour conclure de prendre $k = \mathbf{Q}_3$. □

4. Etude du premier étage de la tour localement cyclotomique

Fixons un corps de nombres K et notons $G = Gal(K_\infty/K)$. Observons que G est un ℓ-groupe et posons $G_\ell^{ab} = G/G^\ell[G;G]$. Nous nous proposons de transporter dans le cadre logarithmique les résultats de [7] basés sur le raffinement homologique de l'inégalité de Golod et Shafarevich donné par Schoof (cf. [10]). Notons que cette transposition n'est pas automatique : par exemple le quotient G^{ab} de G ne s'identifie pas au groupe de Galois de K_1 sur K. En effet, le sous-corps K_∞^{ab} de K_∞ fixé par $[G,G]$ est la sous-extension abélienne (localement cyclotomique) maximale de K contenue dans K_∞. Elle contient en particulier $K_\infty \cap K^c$ qui n'est pas, à priori, contenu dans K_1. Sa sous-extension élémentaire en revanche coïncide bien, elle, avec celle de K_1 puisque celle-ci contient par construction le premier étage de la tour cyclotomique K^c/K.

En particulier, il suit :

$$G_\ell^{ab} \simeq \frac{Gal(K^1/K)}{Gal(K^1/K)^\ell} \simeq \widetilde{Cl}_K/\widetilde{Cl}_K^\ell \times \mathbb{Z}_\ell/\ell\mathbb{Z}_\ell.$$

Notons I l'idéal d'augmentation de l'algèbre $\mathbb{F}_\ell[G]$, d_G le nombre minimal de générateurs de G, c'est à dire le ℓ-rang de $H_1(G,\mathbb{F}_\ell)$, puis r_G le nombre minimal de relations de G, c'est à dire le ℓ-rang de $H_2(G,\mathbb{F}_\ell) \simeq H_1(G,I)$. La différence $r_G - d_G$ est alors le ℓ-rang de $H_2(G,\mathbb{Z}_\ell) = H^{-3}(G,\mathbb{Z}_\ell)$ (cf. [9], lemme 9) de sorte que l'inégalité donnée dans [6] (cf. §5, preuve du th 11) s'écrit ici :

Proposition 4.1. *Lorsque G est fini, on a $r_G - d_G \leq \widetilde{e}_K$, où $\widetilde{e}_K = r_K + c_K + \delta_K$ est le ℓ-rang du groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ des unités logarithmiques de K, c'est à dire, sous la conjecture de Gross généralisée, la somme des nombres r_K et c_K des places complexes et réelles de K, augmentée de 1 si K contient les racines ℓ-ièmes de l'unité.*

C'est ce résultat que nous nous proposons d'améliorer ci-dessous lorsque G est abélien. Introduisons pour cela les quantités

$$a_G = \dim_{\mathbb{F}_\ell}(I^2/I^3)$$

et

$$b_G = \dim_{\mathbb{F}_\ell}(H_1(G,I)/\mathrm{Im}(H_1(G,I^2) \to H_1(G,I))).$$

D'après [7], prop. 6.1, il vient :

Proposition 4.2. *Pour tout ℓ-groupe fini G, on a : ${d_G}^2 = a_G + b_G$.*

Examinons successivement les deux termes de la somme. D'un côté, d'après [7], §3, nous avons :

Proposition 4.3. *Sous la restriction $\ell \neq 2$, si G est abélien il vient : $a_G = \frac{1}{2}d_G(d_G+1)$.*

De l'autre côté l'inégalité immédiate $b_G \leq d_\ell H_1(G,I) \leq d_G + \mathrm{rg}_\ell H_2(G,\mathbb{Z}_\ell)$ fait apparaitre le groupe $H_2(G,\mathbb{Z}_\ell) = H^{-3}(G,\mathbb{Z}_\ell) \simeq H^{-1}(G,\widetilde{\mathcal{C}}_{K_\infty})$ où $\widetilde{\mathcal{C}}_{K_\infty}$ est le ℓ-groupe des classes d'idèles du corps K_∞ ; les calculs de [6] §5 montrent que le ℓ-rang du groupe $H^{-1}(G,\widetilde{\mathcal{C}}_{K_\infty})$ est majoré par celui du groupe $H^0(G,\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty})$ donc finalement par le ℓ-rang $\widetilde{e}_K$ du groupe des unités logarithmiques de K. Autrement dit :

Proposition 4.4. *Lorsque G est fini, on a : $b_G \leq d_G + \widetilde{e}_K$.*

Nous pouvons dès lors énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème 4.5. *Supposons $\ell \neq 2$. Alors si le ℓ-rang $\widetilde{r}_K$ du ℓ-groupe $\widetilde{Cl}_K$ des classes logarithmiques du corps K vérifie l'inégalité :*

$$2\widetilde{r}_K - 1 > \sqrt{1 + 8(\widetilde{e}_K + 1)},$$

où $\widetilde{e}_K = r_K + c_K + \delta_K$ désigne le ℓ-rang des unités logarithmiques de K, la ℓ-tour localement cyclotomique K_∞/K ne s'arrête pas au premier étage K_1/K.

Scolie 4.6. *L'inégalité obtenue est en général strictement plus faible que celle donnée dans [6] (cf. th. 11) qui peut être reécrite sous la forme*

$$2\widetilde{r}_K - 1 \geq 1 + 4\sqrt{\widetilde{e}_K + 1},$$

et assure, elle, l'infinitude de la ℓ-tour localement cyclotomique.

Preuve du théorème. Supposons la ℓ-tour localement cyclotomique de longueur 1. Dans ce cas, il vient $G = Gal(K_1/K)$ donc $d_G = \widetilde{r}_K + 1$ et les propositions 4.2 à 4.4 ci-dessus nous permettent alors d'écrire :

$$\begin{aligned}(\widetilde{r}_K + 1)^2 &= {d_G}^2 \\ &= a_G + d_G \\ &\leq \frac{1}{2}d_G(d_G+1) + (d_G + \widetilde{e}_K) = \frac{1}{2}(\widetilde{r}_K+1)(\widetilde{r}_K+2) + (\widetilde{r}_K + \widetilde{e}_K + 1)\end{aligned}$$

i.e. $(2\widetilde{r}_K - 1)^2 \leq 1 + 8(\widetilde{e}_K + 1)$, comme attendu. □

Pour $\ell \neq 2$, le théorème 4.5 montre que pour un corps quadratique réel $\widetilde{r}_K \geq 4$ implique $K_\infty \neq K_1$. Nous allons voir ci-dessous que ce dernier résultat peut encore être amélioré à l'aide de la théorie des représentations.

Supposons désormais K/k abélienne de groupe de Galois Δ, d'ordre étranger et plaçons nous dans le cas où la ℓ-tour s'arrête au premier étage. L'abélianisé élémentaire G_l^{ab} de G, le quotient $A_G = I^2/I^3$ et le groupe d'homologie $B_G = (H_1(G,I)/\mathrm{Im}(H_1(G,I^2) \to H_1(G,I)))$ sont des $\mathbb{F}_\ell[\Delta]$-modules finis dont nous pouvons comparer les caractères en reécrivant les inégalités 4.1 à 4.4 en termes de représentations.

Désignant par $\chi[M]$ le caractère d'un $\mathbb{F}_l[\Delta]$-module M, nous obtenons en effet successivement :

$$\chi[G_\ell^{ab}] = \chi[A_G] + \chi[B_G] \quad \text{(cf. prop. 4.2);} \tag{2}$$

et le premier terme à droite est le carré symétrique du caractère $\chi[G_l^{ab}]$. D'après [7], si $\chi[G_\ell^{ab}] = \sum_{i=0}^{s} r_i\psi_i$ est la décomposition absolument irréductible de $\chi[G_\ell^{ab}]$, il est donné par la formule :

$$\chi[A_G] = \sum_{i=0}^{s}\left(\frac{1}{2}r_i(r_i+1)\psi_i^2 + \sum_{j>i} r_i r_j \psi_i\psi_j\right) \quad \text{(cf. prop. 4.3).} \tag{3}$$

Le terme antisymétrique $\chi[B_G]$ satisfait, lui, l'inégalité :

$$\chi[B_G] \leq \chi[G_\ell^{ab}] + \chi[H_2(G,\mathbb{Z}_\ell)/\ell.H_2(G,\mathbb{Z}_\ell)] \leq \chi[G_\ell^{ab} + \chi[\frac{\widetilde{\mathcal{E}}_K}{\widetilde{\mathcal{E}}_K^\ell N_{K_\infty/K}\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty}}]; \tag{4}$$

d'où la troisième formule :

$$\chi[B_G] \leq \chi[G_\ell^{ab}] + \chi[\widetilde{\mathcal{E}}_K/\widetilde{\mathcal{E}}_K^\ell] \quad \text{(cf. prop. 4.4).} \tag{5}$$

Enfin, le caractère $\chi[\widetilde{\mathcal{E}}_K/\widetilde{\mathcal{E}}_K^\ell]$ du quotient d'exposant ℓ du groupe des unités logarithmiques est donné par [6] ; c'est la somme des induits à Δ des caractères unités des sous-groupes de dcómposition $\Delta_\mathfrak{p}$ des places infinies de k, disons $\sum \chi_\mathfrak{p}$, augmenté du caractère (nul ou de dimension 1) du ℓ-groupe μ_K/μ_K^ℓ construit sur les racines de l'unité dans K :

$$\chi[\frac{\widetilde{\mathcal{E}}_K}{\widetilde{\mathcal{E}}_K^\ell}] = \sum_{\mathfrak{p}|\infty} \mathrm{Ind}_{\Delta_\mathfrak{p}}^\Delta 1_{\Delta_\mathfrak{p}} + \omega = \sum_{\mathfrak{p}|\infty} \chi_\mathfrak{p} + \omega. \tag{6}$$

Récapitulant le tout, nous obtenons en fin de compte l'inégalité entre caractères :

$$\sum_{i=0}^{s} \left(\frac{1}{2} r_i(r_i-1)\psi_i^2 + -r_i\psi_i \sum_{j>i} r_i r_j \psi_i \psi_j \right) \leq \sum_{\mathfrak{p}|\infty} \chi_\mathfrak{p} + \omega. \tag{7}$$

Appliquant alors ce résultat avec $k = \mathbb{Q}$, nous obtenons :

Théorème 4.7. *Le nombre premier ℓ étant supposé impair, soit K une extension abélienne de $\mathbb{Q}$ de groupe de Galois Δ de degré étranger à ℓ. Et soit $\widetilde{\chi} = \sum \widetilde{r}_\phi \phi$ la décomposition absolument irréductible du caractère du $\mathbb{F}_\ell[\Delta]$-module $\widetilde{Cl}_K/\widetilde{Cl}_K^\ell$. Alors, si la ℓ-tour localement cyclotomique K_∞/K s'arrête au premier étage, on a l'inégalité entre caractères :*

$$\sum_\phi \frac{1}{2}\widetilde{r}_\phi(\widetilde{r}_\phi - 1)\phi^2 + \sum_{\phi\neq\psi} \widetilde{r}_\phi \widetilde{r}_\psi \phi\psi \leq 1 + \chi_\infty + \omega,$$

où la deuxième somme à gauche porte sur les paires de caractères distincts (et non sur les couples), χ_∞ est l'induit à Δ du caractère unité du sous-groupe de décomposition de la place à l'infini, et ω est la caractère (éventuellement nul) de l'action de Δ sur le sous-groupe des racines ℓ-ièmes de l'unité dans K.

Preuve. Le ℓ-groupe $\widetilde{Cl}_\mathbb{Q}$ des classes logarithmiques de $\mathbb{Q}$ étant trivial, le caractère unité n'est pas représenté dans $\widetilde{\chi}$. L'inégalité 7 appliquée à partir de la décomposition

$$\chi[G/G^\ell] = 1 + \chi[\widetilde{Cl}_K/\widetilde{Cl}_K^\ell] = 1 + \sum_\phi \widetilde{r}_\phi \phi = 1 + \sum_{\phi\neq 1} \widetilde{r}_\phi \phi$$

conduit alors au résultat énoncé. □

Corollaire 4.8. *Avec les notations du théorème, si l'on a :*

(i) $\widetilde{r}_\phi \geq 3$ *pour au moins un* ϕ, *ou*

(ii) $\widetilde{r}_\phi \geq 2$ *pour au moins deux* ϕ, *ou*

(iii) $\widetilde{r}_\phi = 2$ *pour un* ϕ *et* $\widetilde{r}_\psi = 1$ *pour un* $\psi \neq \phi^{-1}$,

alors la ℓ-tour cyclotomique ne s'arrête pas au premier étage.

Preuve. Dans l'inégalité du théorème seul le caractère unité apparait 2 fois à droite, tous les autres caractères apparaissant au plus une fois. Or la condition (i) fait apparaitre à gauche un terme $\frac{1}{2}\widetilde{r}_\phi(\widetilde{r}_\phi - 1)\phi^2 \geq 3\phi^2$; la condition (ii) un terme $\widetilde{r}_\phi\widetilde{r}_\psi\phi\psi \geq 4\phi\psi$; et la condition (iii) un terme $\widetilde{r}_\phi\widetilde{r}_\psi\phi\psi \geq 2\psi\phi$ avec $\phi\psi \neq 1$. □

Exemple 4.9. *Si K est un corps quadratique, la ℓ-tour cyclotomique K_∞/K ne s'arrête pas au premier étage pour $\ell \neq 2$ dès que l'on a $rg_\ell \widetilde{Cl}_K \geq 3$.*

En effet, Δ possède un unique caractère non-trivial ; et l'on conclut par (i).

Bibliographie

[1] F. Diaz y Diaz et F. Soriano, *Approche algorithmique du groupe des classes logarithmiques,* J. of Number Theory **76** (1999), 1-15.

[2] G. Gras, *Sur les ℓ-classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier ℓ,* Ann. Institut Fourier **23** fasc. 4 (1973), 1-44.

[3] F.Hajir, *On the growth of p-class groups in p-class field towers,* J. Algebra **188** (1997), 256-271.

[4] J.-F. Jaulent, *Théorie ℓ-adique du corps de classes,* J. Th. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355-397.

[5] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres,* J. Th. Nombres Bordeaux **6** (1995), 301-325.

[6] J.-F Jaulent et F. Soriano, *Sur les tours localement cyclotomiques,* Archiv der Math. **73** (1999), 132-140.

[7] C. Maire, *Tours de Hilbert des extensions cubiques cycliques de $\mathbb{Q}$,* Manuscripta Math. **92** (1997), 303-323.

[8] J. Martinet, *Tours de corps de classes et estimations de discriminants,* Invent. Math. **44** (1978), 65-73.

[9] P. Roquette, *On class field towers*, in *Algebraic Number Theory*, J.W.S. Cassels and A. Fröhlich, A.P. Londres New York (1967), 231-249.

[10] R. Schoof, *Infinite class field towers of quadratics fields,* J. reine angew. Math. **372** (1986), 209-220.

Jean-François Jaulent
Institut de Mathématiques
Université Bordeaux I
351, cours de la libération
F-33405 Talence Cedex
email : jaulent@math.u-bordeaux.fr

Christian Maire
Institut de Mathématiques
Université Bordeaux I
351, cours de la libération
F-33405 Talence Cedex
email : maire@math.u-bordeaux.fr