Radical hilbertien et tour localement cyclotomique*

Jean-François JAULENT et Christian MAIRE

Résumé. Nous déterminons le module des relations du groupe de Galois de la pro-ℓ-extension localement cyclotomique maximale d'un corps de nombres K à l'aide du radical hilbertien de ce corps.

Abstract. We determine the module of relations of the Galois group of the maximal locally cyclotomic pro-ℓ-extension of a number field K using the hilbertian radical of this field.

1. Introduction

Soient K un corps de nombres de signature (r_K, c_K), ℓ un nombre premier, et K^c la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de K. Nous nous intéressons dans ce qui suit à la pro-ℓ-extension localement cyclotomique maximale K^c_∞ de K, i.e. à la plus grande pro-ℓ-extension de K qui est totalement décomposée sur K^c en chacune de ses places. Il est défini dans [5] une tour de ℓ-extensions $K_\infty = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_{(n)}$ associée à K de telle sorte qu'on ait $K^c_\infty = (K_\infty)^c$ si K_∞ est un corps de nombres (i.e. si $[K_\infty : K]$ est fini), $K^c_\infty = K_\infty = (K_\infty)^c$ sinon. Cette tour K_∞ est appelé *ℓ-tour localement cyclotomique* de K et est construite sur le modèle de la ℓ-tour de Hilbert classique K_H à ceci près que le ℓ-groupe des classes est remplacé par son analogue logarithmique. Cette nouvelle tour K_∞ est sauvagement ramifiée.

Un des objets les plus étudiés dans le problème des ℓ-tours est le module des relations du groupe de Galois de celles-ci. Pour la ℓ-tour de Hilbert K_H, lorsque celle-ci est finie, il en est donné dans [8] une interprétation kummerienne.

Nous proposons de donner ici une interprétation hilbertienne du module des relations de la ℓ-tour localement cyclotomique K_∞. Plus précisément :

Théorème 1.1. *Soit K un corps de nombres et ℓ un nombre premier. Notons K_∞ la ℓ-tour localement cyclotomique de K et supposons K_∞/K finie. Soit alors $G = \mathrm{Gal}(K^c_\infty/K)$ le groupe de Galois sur K de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K^c_∞ de K_∞. Il existe un isomorphisme naturel entre le groupe d'homologie $H_2(G, \mathbb{F}_\ell)$ et le quotient $\Lambda_K / N_{K_\infty/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty})\mathcal{R}^\ell_K$, où $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes K^\times$ est le ℓ-adifié de $K^\times$, le groupe $\Lambda_K = \{x \in \mathcal{R}_K / x \in \widetilde{\mathcal{J}}^\ell_K \widetilde{\mathcal{U}}_K\}$ est le radical hilbertien attaché à K et $\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty}$ est le groupe des unités logarithmiques de K_∞.*

Dans [5] est établie une majoration du nombre minimal de relations du groupe $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ lorsque celui-ci est fini. Comme corollaire à la preuve du théorème 1.1, nous étendons cette majoration au cas où $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ est infini pour obtenir :

Corollaire 1.2. *Le nombre minimal de relations du groupe $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ est majoré par la quantité $d_\ell\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K + r_K + c_K + \delta$, où $d_\ell\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ est le ℓ-rang de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ et où δ vaut 1 si K contient une racine primitive ℓ-ème de l'unité, 0 sinon.*

Ce résultat permet de préciser la démonstration du théorème 2.1 de [4].

*Japan. J. Math. **28** (2002), 203–213.

2. Présentation du problème

2.a Notations

Dans toute la suite ℓ est un nombre premier fixé et K un corps de nombres.

Soit $\mathfrak{p}$ un premier de K puis $K_{\mathfrak{p}}$ le complété associé. Le *compactifié ℓ-adique* $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ de $K_{\mathfrak{p}}^{\times}$ est défini comme la limite projective $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \varprojlim K_{\mathfrak{p}}^{\times}/K_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^n}$. Le ℓ-groupe des *unités logarithmiques locales* est le sous-groupe $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ associé par la théorie du corps de classes à la $\mathbb{Z}_{\ell}$-extension cyclotomique de $K_{\mathfrak{p}}$. Remarquons que si $\mathfrak{p}$ est une place finie étrangère à ℓ, le groupe $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ s'identifie au sous-groupe de ℓ-torsion des unités locales de K en $\mathfrak{p}$. Par contre, si $\mathfrak{p}$ divise ℓ, le groupe $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ est le produit direct du sous-groupe des racines de l'unité d'ordre ℓ-primaire contenues dans $K_{\mathfrak{p}}$ par un $\mathbb{Z}_{\ell}$-module libre de rang $[K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_{\ell}]$ (cf. [2]). On voit par là que pour une place finie $\mathfrak{p}$, le groupe $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ ne se distingue du sous-groupe unité $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ que pour $\mathfrak{p}|\ell$. Enfin, pour une place infinie $\mathfrak{p}$, le groupe $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ coïncide avec le groupe $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$.

Par suite, le ℓ-adifié $\mathcal{J}_k$ du groupe des idèles (défini comme le produit $\prod^{res} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ restreint aux familles $(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ dont tous les termes, à l'exception d'un nombre fini d'entre eux, tombent dans $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$), contient comme sous-module compact le produit $\widetilde{\mathcal{U}}_K$ des $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$, qui est ainsi le sous-groupe des *unités logarithmique semi-locales*.

Comme $\mathcal{J}_K$ contient par ailleurs le rayon $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_{\ell} \otimes K^{\times}$ ou *ℓ-groupe des idèles principaux*, l'intersection $\widetilde{\mathcal{E}}_K = \mathcal{R}_K \cap \widetilde{\mathcal{U}}_K$ est le ℓ-groupe des *unités logarithmiques globales* de K. *Sous la conjecture de Gross*, ce groupe est le produit direct du sous-groupe des racines de l'unités d'ordre ℓ-primaire par un $\mathbb{Z}_{\ell}$-module de rang $r_K + c_K$, où r_K est le nombre de places réelles de K et c_K celui de places complexes.

Rappelons ensuite que la $\mathbb{Z}_{\ell}$-extension cyclotomique K^c de K est associé par la théorie du corps de classes au sous-groupe d'idèle $\widetilde{\mathcal{J}}_K$, où $\widetilde{\mathcal{J}}_K$ est le noyau dans $\mathcal{J}_K$ de la formule du produit pour les valeurs absolues ℓ-adiques (cf. [2]).

Notons finalement K^{lc} la ℓ-extension abélienne maximale de K dont tous les complétés $K_{\mathfrak{p}}^{lc}$ de K^{lc} en chacune de ses places $\mathfrak{p}$ tombent dans la $\mathbb{Z}_{\ell}$-extension cyclotomique $K_{\mathfrak{p}}^c$ de $K_{\mathfrak{p}}$; ou encore K^{lc} est la plus grande ℓ-extension abélienne de K contenant K^c, totalement décomposée sur cette dernière. Alors par maximalité, K^{lc} est associée par la théorie du corps de classes au sous-groupe d'idèles $\mathcal{R}_K\widetilde{\mathcal{U}}_k$. On a donc $\mathrm{Gal}(K^{lc}/K^c) \simeq \widetilde{\mathcal{J}}_K/\mathcal{R}_K\widetilde{\mathcal{U}}_K$. Ce quotient

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = \widetilde{\mathcal{J}}_K/\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K$$

est par définition le *ℓ-groupe des classes logarithmiques* du corps K et sa finitude est assurée par la conjecture de Gross. Lorsqu'il est trivial on dit que K est *logarithmiquement principal*, ou encore *log-principal*.

Posons enfin $\Lambda_K = \mathcal{R}_K \cap \widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{J}_K^{\ell} = \mathcal{R}_K \cap \widetilde{\mathcal{U}}_K\widetilde{\mathcal{J}}_K^{\ell}$. Le quotient $\Lambda_K/\mathcal{R}_K^{\ell}$ est par convention le *radical hilbertien* attaché au corps K. En présence des racines ℓ-ièmes de l'unité, il s'interprète comme le noyau dans le radical kummerien $\mathcal{R}_K/\mathcal{R}_K^{\ell}$ des symboles de Hilbert $\left(\dfrac{\zeta, x}{\mathfrak{p}}\right)$ construits sur les racines ℓ-èmes de l'unité (cf. [3]).

2.b La ℓ-tour localement cyclotomique

Il est construit dans [5] une suite d'extensions de la façon suivante : Partant de $K_0 = K$, on définit K_{n+1} comme la ℓ-extension abélienne localement cyclotomique maximale de K_n d'exposant celui de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_n}$ (c'est à dire comme le compositum des sous-corps de K_n^{lc} fixés par les $\gamma.c$, où γ désigne un relèvement arbitraire à $Gal(K_n^{lc}/K_n)$ d'un générateur topologique du groupe $Gal(K_n^c/K_n) \simeq \mathbb{Z}_{\ell}$, et c parcourt $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_n} \simeq Gal(K_n^{lc}/K_n^c)$). Et on pose finalement : $K_{\infty} = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

Si $[K_{\infty} : K]$ est fini, on dit que la tour est finie ; sinon on dit qu'elle est infinie. Le premier cas se produit si et seulement si K possède une extension finie

F qui est log-principale (cf. [5]) ; dans le deuxième cas aucune extension F finie de K n'admet elle-même une telle tour finie ; en d'autres termes la pro-ℓ-extension localement cyclotomique maximale de K est alors de degré infini sur sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K^c.

2.c Groupe d'inertie logarithmique

Si K/k désigne une extension de corps de nombres et $\mathfrak{P}$ une place finie de K, la quantité

$$\widetilde{e}_{\mathfrak{P}}(K/k) = [K_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{P}} \cap k_{\mathfrak{p}}\widehat{\mathbb{Q}_p}],$$

où $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}|p$ et $\widehat{\mathbb{Q}_p}$ est la $\hat{\mathbb{Z}}$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_p$ (i.e. le produit des $\mathbb{Z}_q$-extensions cyclotomiques de $\mathbb{Q}_p$ pour tous les premiers q) est, par convention *l'indice de ramification logarithmique* de $\mathfrak{P}$ dans K/k. Lorsque l'extension K/k est galoisienne, le groupe de Galois $Gal(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}} \cap k_{\mathfrak{p}}\widehat{\mathbb{Q}_p})$ est dit *groupe de ramification logarithmique* de $\mathfrak{P}$ dans K/k et noté $\widetilde{I}_{\mathfrak{P}}(K/k)$ (ou encore $\widetilde{I}_{\mathfrak{p}}(K/k)$; il peut donc être vu comme un sous-groupe de $Gal(K/k)$.

Le *degré résiduel logarithmique* est, lui :

$$\widetilde{f}_{\mathfrak{P}}(K/k) = [K_{\mathfrak{P}} \cap k_{\mathfrak{p}}\widehat{\mathbb{Q}_p} : k_{\mathfrak{p}}] = [K_{\mathfrak{P}} : k_{\mathfrak{p}}]/\widetilde{e}_{\mathfrak{P}}(K/k).$$

En particulier, le produit $\widetilde{e}_{\mathfrak{P}}(K/k)\widetilde{f}_{\mathfrak{P}}(K/k)$ coïncide avec le degré local $[K_{\mathfrak{P}} : k_{\mathfrak{p}}]$.

Notons que pour une extension abélienne locale, l'image de $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ par le symbole de réciprocité local est exactement le groupe d'inertie logarithmique. Plus généralement, pour une extension galoisienne non nécessairement abélienne, l'image de $U_{\mathfrak{p}}$ est le quotient :

$$\frac{\widetilde{I}_{\mathfrak{p}}(K/k)}{[\widetilde{I}_{\mathfrak{p}}(K/k), \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}})]}. \tag{1}$$

C'est là est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 2.1. *Soit k un corps de nombres, K/k une extension galoisienne éventuellement infinie ; soit $\mathfrak{p}$ une place finie de k, puis $K_{\mathfrak{p}}$ et $k_{\mathfrak{p}}$ les complétés respectifs de K et k. Notons $D_{\mathfrak{p}}$ le groupe de Galois de $K_{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}$ et $\widetilde{I}_{\mathfrak{p}}$ le groupe d'inertie logarithmique dans cette extension. Il suit :*

$$[D_{\mathfrak{p}}, D_{\mathfrak{p}}] = [D_{\mathfrak{p}}, \widetilde{I}_{\mathfrak{p}}].$$

Preuve. Cela provient du fait que $D_{\mathfrak{p}}/\widetilde{I}_{\mathfrak{p}}$ est cyclique ou procyclique. □

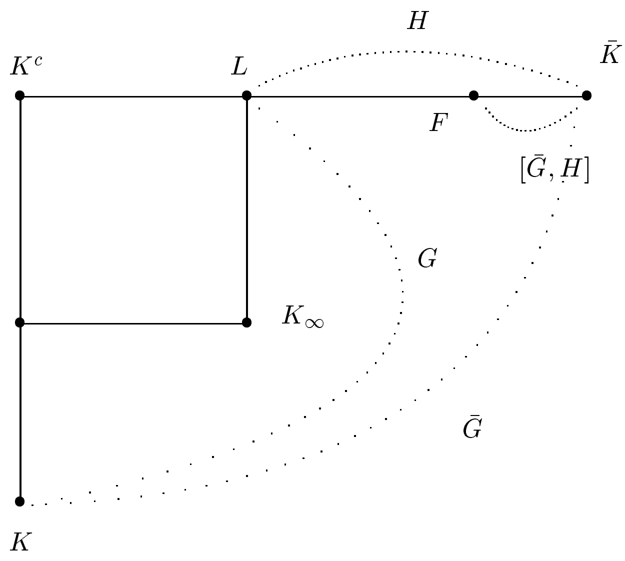
2.d La pro-ℓ-extension maximale $\bar{K}$ de K

Notons $\bar{K}$ la pro-ℓ-extension maximale de K et $\bar{G} = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$. Soit H le sous-groupe de $\bar{G}$ engendré par les groupes d'inertie logarithmique de toutes les places $\mathfrak{p}$ de $\bar{K}$. Observons que $\widetilde{I}_{\mathfrak{p}}(\bar{K}/K)$ est le groupe de Galois de l'extension locale $\bar{K}_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}^c$ vu comme sous-groupe du groupe de décomposition de $\mathfrak{p}$ dans $\bar{K}/K$. Bien entendu H est un sous-groupe distingué de $\bar{G}$. D'autre part le sous-corps fixé par H est $K_\infty^{lc} = K_\infty^c$, ceci par maximalité.

Pour la suite, nous noterons :

$$L = K_\infty^{lc} = K_\infty^c.$$

Soient maintenant $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ et F le sous-corps de $\bar{K}$ fixé par $[\bar{G}, H]$. Nous obtenons le schéma d'extensions (où la sous-extension F/K_∞ est évidemment abélienne) :



3. Suites exactes classiques et lemmes fondamentaux

3.a Suite exacte du radical hilbertien.

Le groupe Λ_K apparait dans la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \frac{\widetilde{\mathcal{E}}_K}{\widetilde{\mathcal{E}}_K^\ell N_{K_\infty/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty})} \longrightarrow \frac{\Lambda_K}{\mathcal{R}_K^\ell N_{K_\infty/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty})} \longrightarrow {}_\ell\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \longrightarrow 1. \tag{2}$$

En effet à $x = uy^\ell \in \Lambda_K$, avec $u \in \widetilde{\mathcal{U}}_k$ et $y \in \widetilde{\mathcal{J}}_K$, on associe la classe de y dans le sous-groupe de ℓ-torsion ${}_\ell\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ du groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$.

3.b Suite exacte d'homologie

La suite exacte courte canonique donnée par la multiplication par ℓ

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{F}_\ell \longrightarrow 1$$

fournit la suite exacte d'homologie :

$$1 \longrightarrow H_2(G, \mathbb{Z})_\ell \longrightarrow H_2(G, \mathbb{F}_\ell) \longrightarrow H_1(G, \mathbb{Z})[\ell] \longrightarrow 1. \tag{3}$$

Ensuite, il est clair que l'on a :

$${}_\ell H_1(G, \mathbb{Z}) = {}_\ell G^{ab} \simeq {}_\ell \operatorname{Gal}(K^{lc}/K) \simeq {}_\ell\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K. \tag{4}$$

La difficulté principale va être l'interprétation du groupe de cohomologie $H_2(G, \mathbb{Z})$. Ce sera l'objet du théorème 4.3 de la section §4. Mais avant de passer à celle-ci, énonçons les lemmes clefs à propos des corps de nombres log-principaux.

3.c Corps de nombres log-principaux

Précisons tout d'abord quelques notations. Pour un corps de nombres F de $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique F^c, notons par F_n les étages de F^c/F (F_n est l'unique sous-corps de F^c de degré ℓ^n sur F), par Γ_n le groupe de Galois de F_n/F et par Γ celui de F^c/F. Notons ensuite par $N_{F^c/F}(\widetilde{\mathcal{E}}_{F^c})$ le sous-groupe de $\widetilde{\mathcal{E}}_F$ formé des éléments qui sont normes d'unités logarithmiques dans chaque sous-extension finie de F^c/F :

$$N_{F^c/F}(\widetilde{\mathcal{E}}_{F^c}) = \bigcap_n N_{F_n/F}(\widetilde{\mathcal{E}}_{F_n})$$

Il vient alors le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Soit F un corps de nombres log-principal. Alors les unités logarithmiques $\widetilde{\mathcal{E}}_F$ de F sont normes dans F^c/F d'unités logarithmiques c'est à dire que l'on a :*

$$\widetilde{\mathcal{E}}_F = N_{F^c/F}(\widetilde{\mathcal{E}}_{F^c})$$

Preuve. Soit $n > 0$. Le groupe Γ_n étant cyclique, on peut donc parler du quotient de Herband de $\widetilde{\mathcal{E}}_{F_n}$ par rapport à Γ_n. De plus, l'extension F_n/F étant localement cyclotomique, ce quotient est trivial (cf. [2]). Il suit $|\hat{H}^0(\Gamma_n, \widetilde{\mathcal{E}}_{F_n})| = |H^1(\Gamma_n, \widetilde{\mathcal{E}}_{F_n})|$. Maintenant comme F et F_n sont log-principaux et comme F_n/F est localement cyclotomique, le groupe de cohomologie $H^1(\Gamma_n, \widetilde{\mathcal{E}}_{F_n})$ est lui aussi trivial (voir également [2]). Il vient donc :

$$\widetilde{\mathcal{E}}_F / N_{F_n/F}\widetilde{\mathcal{E}}_{F_n} = \hat{H}^0(\Gamma_n, \widetilde{\mathcal{E}}_{F_n}) = 1.$$

□

3.d Cohomologie en -1 des classes d'idèles

Conservons les notations de la section précédente. Supposons de plus que F est une extension galoisienne finie de K. Posons $G_n = \mathrm{Gal}(F_n/K)$ et $G = \mathrm{Gal}(F^c/K)$. Cela étant :

Lemme 3.2. *Sous les hypothèse précédentes, on a :*

$$\varprojlim_n \hat{H}^{-1}(G_n, \widetilde{\mathcal{C}}_{F_n}) \simeq \varprojlim_n \hat{H}^{-1}(G_n, \mathcal{C}_{F_n}),$$

où $\mathcal{C}_{F_n} = \mathcal{J}_{F_n}/\mathcal{R}_{F_n}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{C}}_{F_n} = \widetilde{\mathcal{J}}_{F_n}/\mathcal{R}_{F_n}$) désigne le groupe de classes d'idèles (resp. des classes d'idèles de degré zéro) du corps F_n. (et la norme est l'homomorphisme de la limite projective sur les classes d'idèles).

Preuve. Notons d'abord l'isomorphisme entre limites projectives relativement à la norme :

$$\varprojlim_n \mathcal{C}_{F_n} \simeq \varprojlim_n \widetilde{\mathcal{C}}_{F_n}.$$

En effet, nous avons $\mathcal{C}_{F_n}/\widetilde{\mathcal{C}}_{F_n} \simeq \mathrm{Gal}(F^c/F_n)$ où la norme de $\mathcal{C}_{F_{n+1}}/\widetilde{\mathcal{C}}_{F_{n+1}}$ vers $\mathcal{C}_{F_n}/\widetilde{\mathcal{C}}_{F_n}$ correspond à l'injection naturelle $\mathrm{Gal}(F^c/F_{n+1}) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(F^c/F_n)$. Les G_n-modules $\widetilde{\mathcal{C}}_{F_n}$ et $\mathcal{C}_{F_n}$ étant compacts, il vient ainsi :

$$1 \longrightarrow \varprojlim_n \widetilde{\mathcal{C}}_{F_n} \longrightarrow \varprojlim_n \mathcal{C}_{F_n} \longrightarrow \varprojlim_n \frac{\mathcal{C}_{F_n}}{\widetilde{\mathcal{C}}_{F_n}} = 1$$

Notons ensuite par $\mathcal{C}_{F^c}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{C}}_{F^c}$) la réunion des $\mathcal{C}_{F_n}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{C}}_{F_n}$) et définissons $\hat{H}^{-1}(G, \widetilde{\mathcal{C}}_{F^c})$ par :

$$\hat{H}^{-1}(G_n, \widetilde{\mathcal{C}}_{F^c}) := \varprojlim \hat{H}^{-1}(G_n, \widetilde{\mathcal{C}}_{F_n}) = \varprojlim {}_{N_{F_n/F}}\widetilde{\mathcal{C}}_{F_n}/I_{G_n}(\widetilde{\mathcal{C}}_{F_n}).$$

Définissons de même $\hat{H}^{-1}(G_n, \mathcal{C}_{F^c})$. Alors $\mathcal{C}_{F^c}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{C}}_{F^c}$) est un "level-$G$-module" compact au sens de [7]. Il vient ainsi (cf. [7], lemme 3.1.9, page 123)) :

$$\hat{H}^{-1}(\Gamma, \mathcal{C}_{F^c}) = \varprojlim \hat{H}^{-1}(G_n, N_n(\mathcal{C}_{F^c})),$$

avec $N_n(\mathcal{C}_{F^c}) := \bigcap_{m \geq n} N_{F_m/F_n}(\mathcal{C}_{F_m})$. Il vient de même :

$$\hat{H}^{-1}(\Gamma, \widetilde{\mathcal{C}}_{F^c}) = \varprojlim \hat{H}^{-1}(G_n, N_n(\widetilde{\mathcal{C}}_{F^c})).$$

Et comme tous les groupes qui apparaissent sont compacts, il suit :

$$\varprojlim \hat{H}^{-1}(G_n, N_n\mathcal{C}_{F^c}) \simeq \varprojlim {}_{N_{F_n/F}}N_{F^c/F_n}(\mathcal{C}_{F^c}) / \varprojlim I_{G_n}N_{F^c/F_n}(\mathcal{C}_{F^c}).$$

Maintenant, pour conclure, il suffit de noter que l'on a $N_{F^c/F_n}(\mathcal{C}_{F^c}) = N_{F^c/F_n}(\widetilde{\mathcal{C}}_{F^c})$, d'où :

$$\hat{H}^{-1}(G, \mathcal{C}_{F^c}) \simeq \hat{H}^{-1}(G, \widetilde{\mathcal{C}}_{F^c}).$$

□

4. Interprétation du groupe $H_2(G, \mathbb{Z})$

Revenons aux notations de la section 2.4. Prenons $F = K_\infty$ supposé de degré fini sur K. Rappelons le lemme suivant établi dans [5] :

Lemme 4.1. *Soit $G_n = \mathrm{Gal}(F_n/K)$. Alors,*

$$H^{-1}(G_n, \widetilde{\mathcal{C}}_{F_n}) \simeq \hat{H}^0(G_n, \widetilde{\mathcal{E}}_{F_n}).$$

Nous pouvons dès lors énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème 4.2. *Supposons la tour K_∞/K finie. Dans ce cas, il vient :*

$$H_2(G, \mathbb{Z}) \simeq \frac{\widetilde{\mathcal{E}}_K}{N_{K_\infty/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_\infty)}.$$

Preuve. Posons $F = K_\infty$. Soient F_n les étages de F^c/F et $G_n = \mathrm{Gal}(F_n/K)$. Il vient alors :

$$\begin{array}{lll}
H_2(G, \mathbb{Z}) & \simeq & \varprojlim H_2(G_n, \mathbb{Z}) \\
 & \simeq & \varprojlim \hat{H}^{-1}(G_n, \mathcal{C}_{F_n}) \quad \text{(isomorphisme de la théorie du corps de classes)} \\
 & \simeq & \varprojlim \hat{H}^{-1}(G_n, \widetilde{\mathcal{C}}_{F_n}) \quad \text{(lemme 3.2)} \\
 & \simeq & \varprojlim \hat{H}^{0}(G_n, \widetilde{\mathcal{E}}_{F_n}) \quad \text{(lemme 4.1)} \\
 & = & \varprojlim \widetilde{\mathcal{E}}_K / N_{F_n/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{F^c}) \\
 & \simeq & \widetilde{\mathcal{E}}_K / \cap_{n \in \mathbb{N}} N_{F_n/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{F_n}) \\
 & = & \widetilde{\mathcal{E}}_K / N_{F/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_F) \quad \text{(lemme 3.1).}
\end{array}$$

□

On a le résultat principal suivant :

Proposition 4.3. *Supposons K_∞/K finie. Il vient alors :*

$$H_2(G, \mathbb{Z}) \simeq \frac{\widetilde{\mathcal{E}}_K}{N_{K_\infty/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty})}.$$

Preuve. On part de la suite exacte courte qui définit les classes d'idèles :

$$1 \longrightarrow \mathcal{R}_{K^c_\infty} \longrightarrow \mathcal{J}_{K^c_\infty} \longrightarrow \mathcal{C}_{K^c_\infty} \longrightarrow 1. \tag{5}$$

On obtient ainsi la suite de cohomologie :

$$H^{-1}(G, \mathcal{J}_L) \longrightarrow H^{-1}(G, \mathcal{C}_L) \longrightarrow H^0(G, \mathcal{R}_L) \longrightarrow H^0(G, \mathcal{J}_L)$$

On a via le corps de classes :

$$H_2(G, \mathbb{Z}) = H^{-3}(G, \mathbb{Z}) \simeq H^{-1}(G, \mathcal{C}_L).$$

Lemme 4.4. *On a $H^{-1}(G, \mathcal{J}_L) = 1$.*

Ainsi, par le Théorème de Shapiro, on a :

$$H^{-1}(G, \mathcal{J}_L) = \prod_{\mathfrak{p}} H^{-1}(G_{\mathfrak{p}}, \mathcal{R}_{\mathfrak{P}}) = \prod_{\mathfrak{p}} H^{-3}(G_{\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}),$$

où G_p est le groupe décomposition de $\mathfrak{p}$ dans L/K. Et, par construction, $G_{\mathfrak{p}}$ est nul pour $\mathfrak{p}$ infinie et isomorphe à $\Gamma = \mathbb{Z}_\ell$ pour $\mathfrak{p}$ finie. Or la cohomologie d'un groupe procyclique est périodique et on a directement :

$$H^{-3}(\Gamma, \mathbb{Z}) = H^1(\Gamma, \mathbb{Z}) = \hat{H}_0(\Gamma, \mathbb{Z}) = 1.$$

On peut alors finir la preuve de la proposition 4.3 : Par (5), le groupe $H^{-1}(G, \mathcal{J}_L)$ étant nul, on voit que $H_2(G, \mathbb{Z}) = H^{-1}(G, \mathcal{C}_L)$ s'identifie au noyau du morphisme naturel de $H^0(G, \mathcal{R}_L) = \mathcal{R}_k / N_{L/K}(\mathcal{R}_L)$ vers $\mathcal{J}_K / N_{L/K}(J_L)$, c'est à dire au groupe des noeuds de l'extension profinie L/K :

$$H_2(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathcal{R}_K \cap N_{L/K}(\mathcal{J}_L) / N_{L/K}(\mathcal{R}_L).$$

Maintenant, les normes locales dans L/K sont les unités logarithmiques $\widetilde{\mathcal{E}}_K$; et les normes globales sont les normes dans K_∞/K des normes locales dans L/K_∞ c'est à dire $N_{K_\infty/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty})$. □

5. Lien entre $H_2(G, \mathbb{F}_l)$ et le radical hilbertien

Reprenant les notations de [4], nous proposons de montrer le résultat suivant :

Proposition 5.1. *Lorsque K_∞/K est finie, Il existe une surjection canonique :*

$$\frac{\Lambda_K}{\mathcal{R}_K^\ell N_{K_\infty/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty})} \twoheadrightarrow H_2(G, \mathbb{F}_\ell).$$

Preuve de la proposition 5.1. Partons de la suite exacte courte canonique :

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow \bar{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

Cette suite devient (Hochschild-Serre):

$$1 \longrightarrow \left(ker(H^2(G, \mathbb{F}_\ell) \to H^2(\bar{G}, \mathbb{F}_\ell))\right)^* \longrightarrow \frac{H}{H^\ell[\bar{G}; H]} \longrightarrow {}^\ell\bar{G}^{ab} \longrightarrow {}^\ell G^{ab} \longrightarrow 1,$$

où $*$ est le dual dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et ${}^\ell G^{ab}$ le quotient d'exposant ℓ de G^{ab}. Or :

Lemme 5.2. *On a l'égalité:*

$$ker(H^2(G, \mathbb{F}_\ell) \to H^2(\bar{G}, \mathbb{F}_\ell)) = H^2(G, \mathbb{F}_\ell).$$

Preuve. Elle est très simple : il suffit de noter d'abord que le noyau de $H^2(G, \mathbb{F}_\ell)$ vers $H^2(\bar{G}, \mathbb{F}_\ell)$ est le noyau de $H^2(G, \mathbb{F}_\ell)$ vers $\oplus_{\mathfrak{p}} H^2(\bar{G}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{F}_\ell)$, car l'application naturelle $H^2(\bar{G}, \mathbb{F}_\ell) \to \oplus_{\mathfrak{p}} H^2(\bar{G}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{F}_\ell)$ est injective (cf. [6]), et de remarquer ensuite que l'homomorphsime

$$H^2(G, \mathbb{F}_\ell) \to \oplus_{\mathfrak{p}} H^2(\bar{G}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{F}_\ell)$$

se factorise par $\oplus_{\mathfrak{p}} H^2(Gal(K_{\mathfrak{p}}^c/K_{\mathfrak{p}}), \mathbb{F}_\ell)$; nous concluons en observant que cette dernière somme est triviale. □

On rappelle ensuite d'après (1) que les symboles de réciprocité locale construits sur les unités logarithmiques engendrent pour chaque place $\mathfrak{p}$ le quotient

$$\frac{\widetilde{I}_p(\bar{K}/K)}{[D_{\mathfrak{p}}(\bar{K}/K), \widetilde{I}_p(\bar{K}/K)]}.$$

Ainsi par le symbole global $\rho_{\bar{K}/K}$, les images des unités logarithmiques engendrent $H/[\bar{G},H]$.

En résumé, nous obtenons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H_2(G,\mathbb{F}_\ell) \arrow[r, hook] & \frac{H}{H^\ell[\bar{G};H]} \arrow[r] & {}^\ell\bar{G}^{ab} \arrow[r, two heads] & {}^\ell\Omega^{ab} \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & ker(\eta) \arrow[r, hook] \arrow[u, "a"] & \frac{\widetilde{\mathcal{U}}_K}{\widetilde{\mathcal{U}}_K^\ell} \arrow[r, "\eta"] \arrow[u, "\rho_{\bar{K}/K}"] & \frac{\mathcal{J}_K}{\mathcal{R}_K\mathcal{J}_K^\ell} \arrow[r, two heads] \arrow[u, "b"] & \frac{\mathcal{J}_K}{\mathcal{R}_K\mathcal{J}_K^\ell\widetilde{\mathcal{U}}_K} \arrow[r] \arrow[u, "c"] & 1
\end{tikzcd}$$

où b et c, qui sont donnés par le symbole de réciprocité local, sont des isomorphismes ; et a, qui se déduit de $\rho_{\bar{K}/K}$, est surjectif.

Notons ensuite que l'on a trivialement $\ker(\eta) \simeq \Lambda_K/{\mathcal{R}_K}^\ell$. La première partie de la proposition 5.1 est donc établie.

Supposons enfin K_∞/K finie. Comme l'extension F/K_∞ est abélienne, il vient

$$\begin{aligned}
\rho_{\bar{K}/K}(N_{K_\infty/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty})) \mod ([\bar{G},H]) &= \rho_{\bar{K}/K_\infty}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty}) \;(\mod ([\bar{G},H]) \\
&= \rho_{F/K_\infty}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty}) \;(\mod ([\bar{G},H]) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

car le symbole de réciprocité d'un élément global est trivial dans une extension abélienne : c'est la formule du produit. Ainsi $\rho_{\bar{K}/K}$ se factorise par $N_{K_\infty/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty})$.

□

6. Preuve du théorème principal

i) Supposons la tour K_∞/K finie. Les suites exactes (2), (3), le point (4), et la propositon 4.3 nous donnent l'égalité :

$$\big(\Lambda_K \;:\; {\mathcal{R}_K}^\ell N_{K_\infty/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty})\big) \;=\; |H_2(G,\mathbb{F}_\ell)|.$$

L'application surjective φ de la proposition 5.1 factorisée via $\dfrac{\Lambda_K}{\mathcal{R}_K^\ell N_{K_\infty/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty})}$ est donc un isomorphisme. Le théorème 1.1 est prouvé.

ii) La suite exacte (3) et la proposition 5.1 permettent d'obtenir

$$d_\ell H^2(G,\mathbb{F}_\ell) \leq d_\ell\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K + d_\ell\mathcal{E}_K = d_\ell\widetilde{\mathcal{C}\ell}_k + r_1 + r_2 + \delta,$$

ceci après avoir noté que $d_\ell\mathcal{E}_K = r_1 + r_2 + \delta$ (cf. [2]).

On a ensuite la suite exacte de groupes:

$$1 \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K_\infty) \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_\infty/K) \longrightarrow 1.$$

Comme $\mathrm{Gal}(L/K_\infty)$ est pro-ℓ-libre et trivial si et seulement si K_∞/K est infinie (cf. [5]), on en déduit, pour $i \geq 2$, l'égalité

$$H^i(G,\mathbb{F}_\ell) = H^i(\mathrm{Gal}(K_\infty/K),\mathbb{F}_\ell).$$

□

Bibliographie

[1] J.-F. Jaulent, *Théorie ℓ-adique du corps de classes,* J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.

[2] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres,* J. Théor. des Nombres de Bordeaux **6** (1995), 301–325.

[3] J.-F. JAULENT, *La Théorie de Kummer et le K_2 des corps de nombres,* J. Théor. des Nombres de Bordeaux **2** (1990), 377-411.

[4] J.-F. JAULENT ET C. MAIRE, *A propos de la tour localement cyclotomique d'un corps de nombres,* Abh. Math. Sem Hamburg 4 **70** (2000), 239–250.

[5] J.-F JAULENT ET F. SORIANO, *Sur les tours localement cyclotomiques,* Archiv der Math. **73** (1999), 132–140.

[6] H. KOCH, *Galoische Theorie der p-Erweiterungen,* VEB Berlin, 1970.

[7] J. NEUKIRCH, A. SCHMIDT & K. WINGBERG, *Cohomology of number fields,* Grund. der Math. Wissenschaften 323, Springer-Verlag, 2000.

[8] C. MAIRE, *Compléments à un résultat de Safarevic,* Math. Nachrichten **198** (1999), 149-168.

[9] P. ROQUETTE, *On class field towers,* in *Algebraic Number Theory,* J.W.S. CASSELS and A. FRÖHLICH, A.P. LONDRES NEW YORK (1967), 231-249.

Jean-François JAULENT
Institut de Mathématiques
Université Bordeaux I
351, cours de la libération
F-33405 Talence Cedex
email : jaulent@math.u-bordeaux.fr

Christian MAIRE
Institut de Mathématiques
Université Bordeaux I
351, cours de la libération
F-33405 Talence Cedex
email : maire@math.u-bordeaux.fr