Normes cyclotomiques naïves et unités logarithmiques*

Jean-François Jaulent

Résumé. Nous déterminons le rang du sous-groupe $\widetilde{E}_K$ des éléments du groupe multiplicatif d'un corps de nombres K qui sont normes à chaque étage fini de sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K^c ; et nous comparons son ℓ-adifié $\mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} \widetilde{E}_K$ avec le ℓ-groupe des unités logarithmiques $\widetilde{\mathcal{E}}_K$. Nous donnons à cette occasion une preuve très facile de la conjecture de Gross-Kuz'min en ℓ pour les extensions K/k d'un corps abélien dans lesquelles les places au-dessus de ℓ ne se décomposent pas.

Abstract. We compute the $\mathbb{Z}$-rank of the subgroup $\widetilde{E}_K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_{K_n/K}(K_n^\times)$ of elements of the multiplicative group of a number field K that are norms from every finite level of the cyclotomic $\mathbb{Z}_\ell$-extension K^c of K. Thus we compare its ℓ-adification $\mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} \widetilde{E}_K$ with the group of logarithmic units $\widetilde{\mathcal{E}}_K$. By the way we point out an easy proof of the Gross-Kuz'min conjecture for ℓ-undecomposed extensions of abelian fields.

Introduction

Le ℓ-groupe des normes cyclotomiques $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ attaché à un corps de nombres K se présente comme le sous-module du ℓ-adifié $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} K^\times$ du groupe multiplicatif $K^\times$ formé des éléments de $\mathcal{R}_K$ qui sont normes dans tous les étages finis K_n/K de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K^c de K.

Or, comme observé dans [11], $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ ne provient pas en général (par ℓ-adification) d'un sous-groupe naturel (ou naïf) du groupe $K^\times$. La Théorie ℓ-adique du corps de classes (cf. [9] ou [5]) permet cependant d'interpréter ce groupe des normes cyclotomiques comme un groupe d'unités, analogue au ℓ-adifié $\mathcal{E}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} E_K$ du groupe des unités au sens habituel, en lien avec un groupe de classes $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$, qui est le pendant logarithmique du ℓ-groupe des classes d'idéaux.

Le rang sur $\mathbb{Z}_\ell$ du groupe des unités logarithmiques $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ (i.e. la dimension de son quotient par le sous-groupe $\mu_K^{(\ell)}$ des racines de l'unité d'ordre ℓ-primaire contenues dans K) est donné par la formule (cf. [11], Sco. 6) :

$$\dim_{\mathbb{Z}_\ell} \widetilde{\mathcal{E}}_K = r_K + c_K + \delta_K^{\mathscr{G}},$$

où r_K et c_K sont respectivement les nombres de places réelles et complexes de K ; et $\delta_K^{\mathscr{G}}$ mesure le défaut dans K de la conjecture de Gross-Kuz'min pour le premier ℓ. En particulier, lorsque le corps K vérifie cette conjecture pour le premier ℓ (par exemple pour K abélien sur $\mathbb{Q}$), il suit :

$$\widetilde{\mathcal{E}}_K \simeq \mu_K^{(\ell)} \mathbb{Z}_\ell^{r_K+c_K}.$$

Bien entendu, il reste possible, indépendamment de toute conjecture, de définir à l'instar de Bertrandias et Payan ([2], §1.5) le groupe des ℓ-normes cyclotomiques *naïves* comme l'intersection

$$\widetilde{E}_K = \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} N_{K_n/K}(K_n^\times)$$

des sous-goupes normiques de $K^\times$ attachés aux étages finis de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K^c/K.

Le groupe obtenu est alors un sous-groupe du groupe E'_K des ℓ-unités du corps K, qui contient le $\mathbb{Z}$-module multiplicatif engendré par ℓ, donc un $\mathbb{Z}$-module de type fini, produit direct

$$\widetilde{E}_K \simeq \mu_K \mathbb{Z}^{\tilde{e}_K}$$

du groupe des racines de l'unité contenues dans K et d'un $\mathbb{Z}$-module libre de dimension $\tilde{e}_K$ avec

$$1 \le \tilde{e}_K = \dim_\mathbb{Z} \widetilde{E}_K \le \dim_\mathbb{Z} E'_K = r_K + c_K + l_K - 1,$$

où l_K désigne le nombre de places de K au-dessus de ℓ.

Le but de cette note est de préciser la valeur de $\tilde{e}_K$ indépendamment de toute conjecture ainsi que les cas d'égalité entre le groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ et son sous-module *naïf* $\mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} \widetilde{E}_K$.

*Archiv der Math. **108** (2017), 545–554

1. Bref rappel sur les unités logarithmiques

Soient ℓ un nombre premier donné et K un corps de nombres. À chaque place finie $\mathfrak{p}$ de K, il est attaché dans [8] une application à valeurs dans $\mathbb{Z}_\ell$, définie sur le groupe multiplicatif $K_\mathfrak{p}^\times$ du complété de K en $\mathfrak{p}$ par la formule :

$$\tilde{\nu}_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}) = \nu_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}), \text{ pour } \mathfrak{p} \nmid \ell\,; \quad \text{et} \quad \tilde{\nu}_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}) = -\tfrac{\mathrm{Log}_\ell\, N_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_p}(x_\mathfrak{p})}{\deg\, \mathfrak{p}}, \text{ pour } \mathfrak{p}|\ell\,;$$

où Log_ℓ désigne le logarithme d'Iwasawa et $\deg \mathfrak{p}$ est un facteur de normalisation, dont l'expression exacte est sans importance ici, destiné à assurer que l'image de $K_\mathfrak{p}^\times$ soit dense dans $\mathbb{Z}_\ell$. Cette application induit un morphisme surjectif du compactifié ℓ-adique $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} = \varprojlim K_\mathfrak{p}^\times / K_\mathfrak{p}^{\times \ell^n}$ de $K_\mathfrak{p}^\times$ sur $\mathbb{Z}_\ell$ dont le noyau, dit *sous-groupe des unités logarithmiques* de $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$,

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}} = \{u_\mathfrak{p} \in \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} \mid \tilde{\nu}_\mathfrak{p}(u_\mathfrak{p}) = 0\}$$

s'identifie par la Théorie ℓ-adique locale du corps de classes (cf. [9]) au sous groupe normique de $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ associé à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $K_\mathfrak{p}^c$ de $K_\mathfrak{p}$.

Soit maintenant $\mathcal{J}_K$ le *ℓ-adifié du groupe des idèles de K*, i.e. le produit $\mathcal{J}_K = \prod_\mathfrak{p}^{\mathrm{res}} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ des compactifés $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ des groupes multiplicatifs des complétés $K_\mathfrak{p}$, restreint aux familles $(x_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ dont presque tous les éléments tombent dans le sous-groupe unité $\widetilde{\mathcal{U}}_K = \prod_\mathfrak{p} \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}$. La Théorie ℓ-adique globale du corps de classes établit un isomorphisme de groupes topologiques compacts entre le ℓ-groupe des classes d'idèles $\mathcal{C}_K$ défini comme quotient

$$\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K / \mathcal{R}_K$$

de $\mathcal{J}_K$ par son sous-groupe principal $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} K^\times$ et le groupe de Galois $G_K = \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ de la pro-ℓ-extension abélienne maximale de K. Dans la correspondance ainsi établie (cf. [8, 9]) :

(i) Le groupe de normes associé à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K^c du corps K est le sous-groupe des idèles de degré nul : $\widetilde{\mathcal{J}}_K = \{\mathfrak{x} = (x_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \mathcal{J}_K \mid \deg(\mathfrak{x}) = \sum_\mathfrak{p} \tilde{\nu}_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}) \deg\, \mathfrak{p} = 0\}$.

(ii) Le groupe de normes associé à la plus grande sous-extension K^{lc} de K^{ab} qui est localement cyclotomique (i.e. complètement décomposée sur K^c en chacune de ses places) est le produit $\widetilde{\mathcal{U}}_K \mathcal{R}_K$ du sous-groupe $\widetilde{\mathcal{U}}_K = \prod_\mathfrak{p} \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}$ des unités logarithmiques locales et de $\mathcal{R}_K$.

(iii) En particulier, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{lc}/K^c)$ s'identifie au quotient $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = \widetilde{\mathcal{J}}_K / \widetilde{\mathcal{U}}_K \mathcal{R}_K$, lequel peut être regardé comme quotient du groupe $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K = \widetilde{\mathcal{J}}_K / \widetilde{\mathcal{U}}_K$ des diviseurs logarithmiques de degré nul par son sous-groupe principal $\mathcal{P}\ell_K = \mathcal{R}_K \widetilde{\mathcal{U}}_K / \widetilde{\mathcal{U}}_K$, le numérateur $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K$ s'identifiant au sous-groupe $\widetilde{\oplus}_\mathfrak{p} \mathbb{Z}_\ell\, \mathfrak{p}$ des diviseurs de degré nul de la somme formelle $\oplus_\mathfrak{p} \mathbb{Z}_\ell\, \mathfrak{p}$.

(iv) Et le noyau $\widetilde{\mathcal{E}}_K = \mathcal{R}_K \cap \widetilde{\mathcal{U}}_K$ du morphisme $\widetilde{\mathrm{div}}$: $x \mapsto \sum_\mathfrak{p} \tilde{\nu}_\mathfrak{p}(x)\, \mathfrak{p}$ de $\mathcal{R}_K$ dans $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_F$ est le sous-groupe des normes cyclotomiques globales de $\mathcal{R}_K$.

Nous disons que $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ est le *ℓ-groupe des classes logarithmiques* du corps K et que $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ est le *ℓ-groupe des unités logarithmiques globales.*

Dans ce contexte, la conjecture de Gross-Kuz'min (cf. [11] §2) se présente comme suit :

Théorème & Conjecture. *Le groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ des unités logarithmiques de K est le produit :*

$$\widetilde{\mathcal{E}}_K = \mu_K^{(\ell)} \mathbb{Z}_\ell^{r_K + c_K + \delta_K^{\mathscr{G}}}$$

du ℓ-sous-groupe $\mu_K^{(\ell)}$ des racines globales de l'unité et d'un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang $r_K + c_K + \delta_K^{\mathscr{G}}$, où r_K et c_K sont respectivement les nombres de places réelles et complexes de K ; et $\delta_K^{\mathscr{G}} = \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ mesure le défaut dans K de la conjecture de Gross-Kuz'min pour le premier ℓ, laquelle postule précisément la finitude du groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ ou, de façon équivalente, l'égalité : $\dim \widetilde{\mathcal{E}}_K = r_K + c_K$.

Il est bien connu (cf. e.g. [4, 6, 7, 12]) que la conjecture de Gross-Kuz'min est satisfaite pour tous les premiers ℓ dès lors que K est abélien, en vertu du théorème d'indépendance de Baker-Brumer. Mais c'est aussi le cas pour des raisons triviales (du fait de la formule du produit), lorsque le corps K admet une seule place au-dessus du premier ℓ : la valuation logarithmique $\tilde{\nu}_\mathfrak{p}$ définie plus haut coïncide, en effet, avec la valuation $\nu_\mathfrak{p}$ au sens ordinaire dès que $\mathfrak{p}$ ne divise pas ℓ. Il suit de là que le groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ est contenu dans le tensorisé $\mathcal{E}'_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} E'_K$ du groupe des ℓ-unités de K. D'où leur égalité pour $\dim_\mathbb{Z} E'_K = r_K + c_K$, i.e. lorsque K admet $l_K = 1$ place au-dessus de ℓ.

Dans la pratique, le calcul du groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ est parfaitement effectif (cf. [1, 3]).

2. Normes cyclotomiques naïves

Intéressons-nous maintenant au groupe $\widetilde{E}_K$ des ℓ-normes cyclotomiques au sens naïf, c'est-à-dire à l'intersection

$$\widetilde{E}_K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_{K_n/K}(K_n^\times)$$

des sous-goupes normiques de $K^\times$ attachés aux étages finis de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K^c/K.

Par le principe de Hasse, la condition normique se lit localement, de sorte que $\widetilde{E}_K$ est encore le noyau dans $K^\times$ des valuations logarithmiques $\tilde{\nu}_\mathfrak{p}$ présentées plus haut :

$$\widetilde{E}_K \;=\; \{x \in K^\times \,|\, \tilde{\nu}_\mathfrak{p}(x) = 0 \quad \forall \mathfrak{p} \nmid \infty\} \;=\; \{\varepsilon \in E'_K \,|\, \tilde{\nu}_\mathfrak{p}(\varepsilon) = 0 \quad \forall \mathfrak{p} \mid \ell\}.$$

En particulier $\widetilde{E}_K$ est un sous-groupe du groupe E'_K des ℓ-unités de K qui contient les racines de l'unité ainsi que les puissances de ℓ, ce qui se traduit par les deux inclusions :

$$\mu_K \ell^\mathbb{Z} \;\subset\; \widetilde{E}_K \;\subset\; E'_K \simeq \mu_K \mathbb{Z}^{r_K+c_K+l_K-1},$$

où r_K, c_K et l_K désignent respectivement les nombres de places réelles, complexes et ℓ-adiques de K, de sorte que l'on a :

$$\widetilde{E}_K \simeq \mu_K \, \mathbb{Z}^{\tilde{e}_K}$$

et la dimension $\widetilde{e}_K$ de $\widetilde{E}_K$ est comprise entre 1 et $r_K + c_K + l_K - 1$.

Observons tout de suite que les deux bornes sont atteintes sous des hypothèses convenables :

Proposition 1. *Soit $\widetilde{e}_K = \dim_\mathbb{Z} \widetilde{E}_K$ la dimension du groupe des ℓ-normes cyclotomiques naïves.*

(i) Si le corps K possède une unique place au-dessus de ℓ, $\widetilde{E}_K$ coïncide avec le groupe des ℓ-unités E'_K et il vient : $\widetilde{e}_K = r_K + c_K + l_K - 1 = r_K + c_K$.

(ii) Si, tout au contraire, la place ℓ est complètement décomposée dans $K/\mathbb{Q}$, on a : $\widetilde{E}_K = \mu_K \ell^\mathbb{Z}$ et $\widetilde{e}_K = 1$. Nous disons alors que K est totalement ℓ-adique.

Preuve. Le cas (i) ayant été traité à la fin de la section précédente, concentrons nous sur le cas (ii). Par hypothèse, la norme locale $N_{K_\mathfrak{l}/\mathbb{Q}_\ell}$ aux places $\mathfrak{l}$ au-dessus de ℓ étant triviale, les valuations logarithmiques correspondantes $\widetilde{\nu}_\mathfrak{l}$ sont proportionnelles au logarithme d'Iwasawa Log_ℓ et il suit :

$$\widetilde{E}_K = \{\varepsilon \in E'_K \,|\, Log_\ell(\varepsilon) = 0\} = \mu_K \ell^\mathbb{Z},$$

puisque, du fait de l'hypothèse de complète décomposition, les seules puissances fractionnaires de ℓ contenues dans K sont les puissances entières.

Plus généralement, en présence de conjugaison ℓ-adique (cf. [10] pour cette notion), il vient :

Définition & Théorème 2. *Convenons de dire qu'un corps de nombres K est à conjugaison ℓ-adique lorsque c'est une extension non-décomposée aux places au-dessus de ℓ d'un sous-corps k complètement décomposé au-dessus de ℓ. Pour un tel corps K la dimension de $\widetilde{E}_K$ est donnée par :*

$$\widetilde{e}_K = (r_K + c_K) - (r_k + c_k - 1),$$

où r_K, r_k, c_K et c_k sont les nombres respectifs de plongements réels et complexes de K et k.

Preuve. Notons $V'_K = \mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Z} E'_K$ et $V'_k = \mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Z} E'_k$ les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels construits sur les groupes de ℓ-unités respectifs de K et k, puis $V^*_{K/k}$ le noyau de l'opérateur norme $\nu = N_{K/k}$ de V'_K sur V'_k.

Par construction, le sous-espace $\widetilde{V}_K = \mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Z} \widetilde{E}_K$ de V'_K construit sur les unités logarithmiques est donné par :

$$\widetilde{V}_K = \{\varepsilon \in V'_K \,|\, N_{K/k}(\varepsilon) \in \ell^\mathbb{Q}\},$$

comme préimage par la norme $N_{K/k}$ du noyau du logarithme. Il vient donc :

$$\dim_\mathbb{Z} \widetilde{E}_K = \dim_\mathbb{Q} \widetilde{V}_K = 1 + \dim_\mathbb{Q} V^*_{K/k} = 1 + (r_K + c_K + l_K - 1) - (r_k + c_k + l_k - 1)\,;$$

d'où le résultat annoncé, puisque K et k ont même nombre $l_K = l_k$ de places au-dessus de ℓ.

Scolie 3. *Sous les hypothèses du Théorème 2, on a l'égalité $\widetilde{e}_K = r_K + c_K$ (et donc, sous la conjecture de Gross-Kuz'min, l'identité $\widetilde{\mathcal{E}}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} \widetilde{E}_K$) si et seulement si le sous-corps totalement ℓ-adique k est ou bien le corps des rationnels $\mathbb{Q}$ ou bien un corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$.*

3. Étude du cas galoisien

Examinons maintenant le cas où le corps de nombres considéré est galoisien de degré n sur $\mathbb{Q}$ et notons $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ son groupe de Galois.

Faisons choix d'une des places à l'infini, disons $\mathfrak{p}_\infty$ de K et notons $D_{\mathfrak{p}_\infty}$ son groupe de décomposition ; notons de même $\mathfrak{p}_\ell$ l'une des places de K au-dessus de ℓ et $D_{\mathfrak{p}_\ell}$ son groupe de décomposition. Notons enfin d_∞ l'ordre de $D_{\mathfrak{p}_\infty}$ (qui vaut 1 ou 2) et d_ℓ celui de $D_{\mathfrak{p}_\ell}$.

D'après le Théorème de Herbrand, le caractère du $\mathbb{Q}[G]$-module $V'_K = \mathbb{Q} \otimes E'_K$ construit sur le groupe des ℓ-unités de K est donné par :

$$\chi_{E'_K} = \chi_\infty + \chi_\ell \; - 1,$$

où $\chi_\infty = \mathrm{Ind}_{D_{\mathfrak{p}_\infty}}^G 1_{D_{\mathfrak{p}_\infty}}$ est l'induit à G du caractère de la représentation unité du sous-groupe de décomposition de $\mathfrak{p}_\infty$; et $\chi_\ell \; = \mathrm{Ind}_{D_{\mathfrak{p}_\ell}}^G 1_{D_{\mathfrak{p}_\ell}}$ son analogue pour $\mathfrak{p}_\ell$; enfin 1 désigne le caractère unité.

L'objet de cette section est de calculer le caractère $\chi_{\widetilde{E}_K}$ du $\mathbb{Q}[G]$-module $\widetilde{V}_K = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{E}_K$.

Or, d'un côté les 1-composantes isotypiques respectives de V'_K et de $\widetilde{V}_K$ s'identifient au sous-espace $V'_{\mathbb{Q}} = \widetilde{V}_{\mathbb{Q}} = \ell^{\mathbb{Q}}$; de sorte que $\chi_{E'_K}$ et $\chi_{\widetilde{E}_K}$ contiennent une seule fois le caractère unité.

Et d'un autre côté, si E^*_K désigne le noyau dans E'_K de la norme $N_{K/\mathbb{Q}}$, le $\mathbb{Q}$-espace associé $V^*_K = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} E^*_K$ n'est autre que le sous-$\mathbb{Q}[G]$-module de V'_K annulé par l'idempotent $e_1 \; = \frac{1}{n} \sum_{\gamma \in G} \gamma$; et le caractère de V^*_K est donné par :

$$\chi_{E^*_K} = (\chi_\infty - 1) + (\chi_\ell \; - 1).$$

L'expression des valeurs absolues logarithmiques donnée au début de la section 1 montre alors que le sous-espace $\widetilde{V}^*_K = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{E}^*_K$ de V^*_K construit sur les unités logarithmiques de norme 1 est l'intersection des noyaux dans V^*_K de l'idempotent associé au sous-groupe $D_{\mathfrak{p}_\ell}$

$$e_{\mathfrak{p}_\ell} \; = \; \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in G} \chi_\ell(\sigma^{-1})\sigma \; = \; \frac{1}{d_\ell} \sum_{\tau \in D_{\mathfrak{p}_\ell}} \tau$$

et de ses conjugués $e_{\mathfrak{p}_\ell^\gamma} = \gamma e_{\mathfrak{p}_\ell} \gamma^{-1}$, lorsque γ décrit G. En résumé :

Proposition 4. *Le $\mathbb{Q}[G]$-module $\widetilde{V}_K = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{E}_K$ construit sur les unités logarithmiques naïves est la somme directe $\widetilde{V}_K = \widetilde{V}_{\mathbb{Q}} \oplus \widetilde{V}^*_K$, où*

- *— $\widetilde{V}_{\mathbb{Q}} = \ell^{\mathbb{Q}}$ est l'image de $\widetilde{V}_K$ par l'idempotent central $e_1 \; = \frac{1}{n} \sum_{\gamma \in G} \gamma$ attaché à la norme ;*
- *— $\widetilde{V}^*_K$ est le plus grand sous-module de V^*_K qui est tué par l'idempotent $e_{\mathfrak{p}_\ell} \; = \; \frac{1}{d_\ell} \sum_{\tau \in D_{\mathfrak{p}_\ell}} \tau$.*

À partir de là, la détermination du caractère $\chi_{\widetilde{E}_K}$ est un pur problème de théorie des représentations où l'arithmétique n'a plus aucune part : on dispose d'un groupe fini G, d'un $\mathbb{Q}[G]$ module projectif $X = V^*_K$ de caractère $\chi = \chi_{E^*_K} = (\chi_\infty - 1) + (\chi_\ell \; - 1)$, d'un sous-groupe $H = D_{\mathfrak{p}_\ell}$ de G ; et on cherche le caractère du plus grand sous-module de X qui est annulé par l'idempotent $e_H = \frac{1}{|H|} \sum_{\tau \in H} \tau$ de l'agèbre $\mathbb{Q}[G]$ construit sur les éléments de H.

Écrivons donc $\chi = \sum_{i \in I} n_i \chi_i$ la factorisation irréductible de χ et $X \simeq \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{j=1}^{n_i} X_i$ comme somme directe d'idéaux à gauche minimaux deux à deux non isomorphes. Pour un i donné, on a :

- — ou bien $e_H X_i = 0$; et X_i est annulé par e_H (et tous ses conjugués) ;
- — ou bien $e_H X_i \neq 0$; et le seul sous-module de X_i qui est annulé par e_H est le module nul.

En fin de compte, le sous-module cherché $\widetilde{X}$ est donc donné par : $\widetilde{X} \simeq \bigoplus_{e_H X_i = 0} \bigoplus_{j=1}^{n_i} X_i$. Notons que la condition $e_H X_i = 0$ se lit encore $e_H A_i = 0$, si $A_i = \mathbb{Q}[G] e_{\chi_i}$ est le facteur simple correspondant au caractère χ_i, autrement dit : $e_H e_{\chi_i} = 0$. En pratique, on obtient donc $\widetilde{V}^*_K$ à partir de V^*_K en éliminant les composantes irréductibles représentés dans le $\mathbb{Q}[G]$-module $\mathbb{Q}[G/H] \simeq \mathbb{Q}[G] e_H$ construit sur les classes à gauche modulo H. Ainsi :

Théorème 5. *Pour $K/\mathbb{Q}$ galoisienne le caractère du groupe des normes cyclotomiques naïves est :*

$$\chi_{\widetilde{E}_K} = 1 + (\chi_\infty \wedge \bar{\chi}_\ell \;),$$

où $\bar{\chi}_\ell$ désigne la partie du caractère régulier $\chi_{\text{rég}}$ qui est étrangère à χ_ℓ.

4. Discussion des cas d'égalité : $\widetilde{\mathcal{E}}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} \widetilde{E}_K$

Le groupe des normes cyclotomique naïves $\widetilde{E}_K$ est un sous-module pur du groupe des ℓ-unités E'_K, comme noyau des valuations logarithmiques $\widetilde{\nu}_\mathfrak{p}$ attachées aux places $\mathfrak{p}|\ell$; son ℓ-adifié $\mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} \widetilde{E}_K$ est donc un sous-module pur du ℓ-adifié $\mathcal{E}'_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} E'_K$ de E'_K. Comme il est contenu dans $\widetilde{\mathcal{E}}_K$, c'est en particulier un sous-module pur de $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ et l'égalité $\mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} \widetilde{E}_K = \widetilde{\mathcal{E}}_K$ a lieu si et seulement si les deux modules ont le même rang, i.e. lorsque le $\mathbb{Z}$-rang de $\widetilde{E}_K$ coïncide avec le $\mathbb{Z}_\ell$-rang de $\widetilde{\mathcal{E}}_K$.

Dans le cas galoisien, cela revient à dire que les deux groupes définissent le même caractère. Or, celui du groupe des unités logarithmiques est calculé dans [8] : il est égal à χ_∞ augmenté du caractère de défaut de la conjecture de Gross-Kuz'min. Il vient donc directement :

Théorème 6. *Dans une extension galoisienne K de $\mathbb{Q}$, l'égalité $\widetilde{\mathcal{E}}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} \widetilde{E}_K$ a lieu si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :*

(i) le corps K vérifie la conjecture de Gross-Kuz'min (pour le premier ℓ) ;

(ii) on a : $\chi_\infty \wedge \chi_\ell = 1$.

Corollaire 7. *Pour K galoisien réel, l'égalité $\widetilde{\mathcal{E}}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} \widetilde{E}_K$ a lieu si et seulement si le corps K possède une seule place au-dessus de ℓ ; auquel cas, il vient : $\widetilde{E}_K = E'_K$ et $\widetilde{\mathcal{E}}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} \widetilde{E}_K = \mathcal{E}'_K$.*

Preuve. Si K est réel, on a $\chi_\infty = \chi_{\text{rég}}$ et l'assertion (ii) s'écrit : $\chi_\ell = 1$; ce qui se traduit par le fait que K admet une unique place au-dessus de ℓ. D'où le résultat en vertu de la Proposition 1. Notons que, dans ce contexte, la condition (i) est alors automatiquement satisfaite.

Corollaire 8. *Si K est à conjugaison complexe, i.e. si c'est une extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps K_∞ totalement réel, l'égalité $\widetilde{\mathcal{E}}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} \widetilde{E}_K$ a lieu si et seulement si*

(i) ou bien K ne possède qu'une seule place au-dessus de ℓ ;

(ii) ou bien K est composé direct d'un sous-corps galoisien réel K_∞ qui ne possède qu'une place au-dessus de ℓ et d'un sous-corps quadratique imaginaire k qui en possède exactement 2.

Avant d'établir ce résultat, observons que nous avons, par un argument de points fixes immédiat :

Lemme 9. *Si l'égalité $\widetilde{\mathcal{E}}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} \widetilde{E}_K$ a lieu pour un corps de nombres quelconque donné K, elle vaut aussi pour chacun de ses sous-corps.*

Preuve du Corollaire. Si K est à conjugaison complexe, le sous-groupe de décomposition D_∞ des places à l'infini est normal et d'ordre 2 et son sous-corps des points fixes K_∞ est alors un corps galoisien réel auquel nous pouvons appliquer le corollaire précédent. Si donc K satisfait l'égalité, K_∞ la satisfait aussi et ne possède qu'une seule place au-dessus de ℓ. Ainsi pour chaque place ℓ-adique de K, le sous-groupe de décomposition s'envoie surjectivement sur le quotient G/D_∞. Il est donc d'indice 1 ou 2 dans G et, par conséquent, normal. Notons le D_ℓ.

— Dans le premier cas ($D_\ell = G$), le corps K ne possède qu'une seule place au-dessus de ℓ ; et il vient, comme plus haut : $\widetilde{E}_K = E'_K$ et $\widetilde{\mathcal{E}}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} \widetilde{E}_K = \mathcal{E}'_K$.

— Dans le second cas ($D_\ell \neq G$), le groupe G est alors le produit direct des sous-groupes D_∞ et D_ℓ, et K le composé direct de leurs sous-corps invariants respectifs K_∞ et k. Ici encore le corps réel K_∞ vérifie les hypothèses du corollaire précédent, de sorte qu'on a : $\widetilde{E}_{K_\infty} = E'_{K_\infty}$ et $\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} \widetilde{E}_{K_\infty} = \mathcal{E}'_{K_\infty}$. Comme, sous la conjecture de Gross-Kuz'min, les groupes $\widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty}$ et $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ ont même $\mathbb{Z}_\ell$-rang $r_{K_\infty} = c_K$, il suit bien : $\widetilde{\mathcal{E}}_K = \mu_K^{(\ell)} \widetilde{\mathcal{E}}_{K_\infty} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} \widetilde{E}_K$.

En fin de compte, il reste seulement à vérifier dans ce dernier cas que le corps $K = kK_\infty$ vérifie la conjecture de Gross-Kuz'min. Or, cela résulte de la propriété générale suivante :

Scolie 10. *Soit K/k une extension (non nécessairement galoisienne) de corps de nombres, non décomposée aux places au-dessus de ℓ. Alors la conjecture de Gross-Kuz'min pour le premier ℓ est vérifiée dans K dès qu'elle l'est dans le sous-corps k (par exemple dès que k est abélien sur $\mathbb{Q}$).*

Preuve. Elle est très simple : le corps K et son sous-corps k ayant même nombre de places au-dessus de ℓ, le groupe des diviseurs logarithmiques de k construits sur les places au-dessus de ℓ est d'indice fini dans son homologue de K. Ainsi $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_k$ et $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ sont-ils simultanément finis ou pas.

Index des principales notations

ℓ : un nombre premier quelconque ;
K : un corps de nombres arbitraire ; $K_{\mathfrak{p}}$: le complété de K en la place $\mathfrak{p}$;
$K^c = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ avec $[K_n : K] = \ell^n$: la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de K ;
E_K : le groupe des unités de K et E'_K le groupe des ℓ-unités ;
$\widetilde{E}_K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_{K_n/K}(K_n^\times)$: le groupe des normes cyclotomiques naïves de K ;
μ_K : le groupe des racines de l'unité de K et $\mu_K^{(\ell)}$ son ℓ-sous-groupe de Sylow ;
r_K, c_K, l_K : les nombres respectifs de places réelles, complexes et ℓ-adiques du corps K ;
$\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$: le ℓ-adifié du groupe multiplicatif du corps K ;
$\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} = \varprojlim K_\mathfrak{p}^\times / K_\mathfrak{p}^{\times \ell^m}$: le compactifié ℓ-adique du groupe multiplicatif $K_\mathfrak{p}^\times$;
$\mathcal{U}_{K_\mathfrak{p}}$: le sous-groupe unité et $\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}$ le groupe des normes cyclotomiques dans $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$;
$\mathcal{J}_K = \prod_\mathfrak{p}^{\mathrm{res}} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$: le ℓ-adifié du groupe des idèles de K ;
$\mathcal{U}_K = \prod_\mathfrak{p} \mathcal{U}_{K_\mathfrak{p}}$: le sous-groupe unité de $\mathcal{J}_K$;
$\widetilde{\mathcal{U}}_K = \prod_\mathfrak{p} \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}$: le sous-groupe des normes cyclotomiques dans $\mathcal{J}_K$;
$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = \mathcal{J}_K / \widetilde{\mathcal{U}}_K \mathcal{R}_K$: le ℓ-groupe des classes logarithmiques du corps K ;
$\mathcal{E}'_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'_K$: le ℓ-adifié du groupe des ℓ-unités de K ;
$\mathcal{E}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_K = \mathcal{R}_K \cap \mathcal{U}_K$: le ℓ-adifié du groupe des unités de K ;
$\widetilde{\mathcal{E}}_K = \mathcal{R}_K \cap \widetilde{\mathcal{U}}_K$: le ℓ-groupe des unités logarithmiques de K ;
$\delta_K^{\mathscr{G}} = \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$: le défaut de la conjecture de Gross-Kuz'min dans K.

Références

[1] K. Belabas & J.-F. Jaulent *The logarithmic class group package in PARI/GP*, Pub. Math. Besançon (2016).

[2] F. Bertrandias et J.-J. Payan, *Γ-extensions et invariants cyclotomiques*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **4** (1972), 517–548.

[3] F. Diaz y Diaz, J.-F. Jaulent, S. Pauli, M.E. Pohst & F. Soriano, *A new algorithm for the computation of logarithmic class groups of number fields*, Experimental. Math. **14** (2005), 67–76.

[4] L.J. Federer & B.H. Gross, (with an appendix by W. Sinnott), *Regulators and Iwasawa modules*, Inv. Math. **62** (1981), 443–457.

[5] G. Gras, *Class Field Theory : from theory to practice*, Springer Monographs in Mathematics (2003).

[6] J.-F. Jaulent, *Sur l'indépendance ℓ-adique de nombres algébriques*, J. Numb. Th. **20** (1985), 149–158.

[7] J.-F. Jaulent, *Sur les conjectures de Leopoldt et de Gross*, Actes des Journées Arithmétiques de Besançon, Astérisque **147-148** (1987), 107–120.

[8] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 301–325.

[9] J.-F. Jaulent, *Théorie ℓ-adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.

[10] J.-F. Jaulent, *Plongements ℓ-adiques et ℓ-nombres de Weil*, J. Théor. Nombres Bordeaux **20** (2008), 335–351.

[11] J.-F. Jaulent, *Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min*, Annales Math. Québec (à paraître)

[12] L. V. Kuz'min, *The Tate module of algebraic number fields*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **36** (1972), 267-327.

Jean-François Jaulent
Institut de Mathématiques de Bordeaux
Université de Bordeaux & CNRS
351, cours de la libération
F-33405 Talence Cedex
courriel : Jean-Francois.Jaulent@math.u-bordeaux1.fr