THÈSE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES DE L'UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE
préparée au Laboratoire MIA

SUR LES AUTOMORPHISMES POLYNOMIAUX DE L'ESPACE AFFINE

Jean-Philippe FURTER

Soutenue à La Rochelle le 5 décembre 2008 devant le jury composé de :
Jacques ALEV, Professeur à l'Université de Reims,
Michel BERTHIER, Professeur à l'Université de La Rochelle,
Michel BRION, Directeur de Recherche à l'Université de Grenoble 1,
Hanspeter KRAFT, Professeur à l'Université de Bâle,
Lucy MOSER-JAUSLIN, Professeur à l'Université de Dijon,
Guy WALLET, Professeur à l'Université de La Rochelle,
Mikhail ZAIDENBERG, Professeur à l'Université de Grenoble 1

Au vu des rapports de :
Hanspeter KRAFT, Lucy MOSER-JAUSLIN et Mikhail ZAIDENBERG

Sur les automorphismes polynomiaux de l'espace affine.

Jean-Philippe Furter,
Laboratoire MIA, Univ. de La Rochelle,
av. M. Crépeau, 17 000 La Rochelle, France
email : jpfurter@univ-lr.fr

Remerciements.

Je remercie très sincèrement Hanspeter Kraft, Lucy Moser-Jauslin et Mikhail Zaidenberg d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse, ainsi que Jacques Alev, Michel Berthier, Michel Brion et Guy Wallet d'avoir eu l'amabilité de participer au jury.

Résumé.

Mes travaux de recherche portent sur les automorphismes polynomiaux de l'espace affine. Il s'agit de l'un des sujets passionnants de la géométrie algébrique affine. Beaucoup de questions d'apparence anodine semblent encore bien loin de la portée des mathématiciens d'aujourd'hui. Par exemple, la célèbre conjecture Jacobienne affirme qu'une application polynomiale de $\mathbb{C}^N$ dans lui-même est bijective si et seulement si son Jacobien est une constante non nulle (le cas $N = 1$ est clair, la conjecture démarre pour $N = 2$). Je me suis orienté vers ce domaine peu de temps avant la soutenance de ma thèse de doctorat (octobre 95) et mes articles sont tous postérieurs à cette date. Ce mémoire est divisé en 4 parties (de tailles strictement décroissantes). La première est consacrée à l'étude de certains aspects de la variété des automorphismes du plan. En dimension 2, la structure amalgamée du groupe des automorphismes permet de définir le multidegré d'un automorphisme et j'essaye de dégager des propriétés de la stratification qui en résulte. Dans la deuxième partie, j'étudie quelques classes d'automorphismes dynamiquement triviaux (i.e. dont l'entropologie topologique est nulle). Dans la troisième, je m'intéresse aux plongements de gros points dans l'espace affine. Pour ce faire, je commence par considérer des groupes de jets d'automorphismes polynomiaux. Enfin, la quatrième partie est vouée à l'étude du degré de l'inverse d'un automorphisme de l'espace affine sur une algèbre complexe quelconque. Par un résultat de Bass, Connell et Wright (cf. [5, 6] et la section 4.1, p. 35), cette problématique est directement liée à la conjecture Jacobienne.

Sommaire.

Articles publiés ou soumis.

[A] On the variety of automorphisms of the affine plane, J. Algebra 195 (1997), 604-623.

[B] On the degree of the inverse of an automorphism of the affine space, J. of Pure and Applied Algebra 130 (1998), 277-292.

[C] Computation of the maximal degree of the inverse of a cubic automorphism of the affine plane with Jacobian 1 via Grobner bases (avec M. Fournié et D. Pinchon), J. of Symbolic Computation 26 (1998), 381-386.

[D] On the degree of iterates of automorphisms of the affine plane, Manuscripta Mathematica 98 (1999), 183-193.

[E] On the length of polynomial automorphisms of the affine plane, Math. Ann. 322 (2002), 401-411.

[F] Some families of polynomial automorphisms (avec E. Edo), J. of Pure and Applied Algebra 194 (2004), 263-271.

[G] Locally finite polynomial endomorphisms (avec S. Maubach), J. of Pure and Applied Algebra 211 (2007), no. 2, 445-458.

[H] Jet groups, J. Algebra 315 (2007), no. 2, 720-737.

[I] Fat points embeddings in affine space, J. of Pure and Applied Algebra 212 (2008), 1583-1593.

[J] Quasi-locally finite polynomial endomorphisms, à paraître dans Math. Z., disponible à http ://perso.univ-lr.fr/jpfurter/ ou à http ://dx.doi.org/10.1007/s00209-008-0440-4

[K] Plane polynomial automorphisms of fixed multidegree, à paraître dans Math. Ann., disponible à http ://perso.univ-lr.fr/jpfurter/ ou à http ://dx.doi.org/10.1007/s00208-008-0296-2

[L] Polynomial composition rigidity and plane polynomial automorphisms, soumis à la publication, disponible à http ://perso.univ-lr.fr/jpfurter/

[M] A characterization of semisimple plane polynomial automorphisms (avec S. Maubach), soumis à la publication, disponible à http ://perso.univ-lr.fr/jpfurter/

1. La variété des automorphismes du plan.

1.1. La structure de variété algébrique de dimension infinie.

L'étude de la variété des automorphismes de l'espace affine a été initiée et encouragée par Shafarevich en 1966 dans l'article visionnaire [59]. Néanmoins, cet article contient des inexactitudes et ce sujet demeure mystérieux (cf. [60, 61, 33, 34]). Par exemple, même si le théorème 1 de [59] affirme qu'en caractéristique 0 tous les points d'un groupe algébrique de dimension infinie sont lisses, il semble que la notion de point lisse (sur une variété algébrique de dimension infinie) ne soit pas claire. À la page 636 de l'article relativement récent [34], Kambayashi expose un exemple de Totaro qui d'après lui "crée un problème sérieux pour la notion de lissité" et il en conclut que "cette notion devrait être retravaillée". Pour ma part, je n'utilise que des notions élémentaires et attestées de cette théorie, à savoir essentiellement la définition d'une variété algébrique de dimension infinie et celle de sa topologie (de Zariski) telles que présentées dans [59] ou [60]. Rappelons ces notions.

Soit U un ensemble muni d'une suite croissante $m \mapsto U_{\leq m}$ de sous-ensembles, chaque sous-ensemble $U_{\leq m}$ étant muni d'une structure de variété algébrique de dimension finie. D'après Shafarevich, U est appelé une variété algébrique de dimension infinie quand les assertions suivantes sont satisfaites :

(i) $U = \bigcup_m U_{\leq m}$;

(ii) Chaque $U_{\leq m}$ est une sous-variété algébrique fermée de $U_{\leq m+1}$.

Dans la suite, chaque variété algébrique de dimension finie sera munie de sa topologie de Zariski et la variété algébrique de dimension infinie U sera munie de la topologie de la limite inductive. Si $W \subseteq U$, on pose $W_{\leq m} := W \cap U_{\leq m}$. Dès lors, W est fermé (resp. ouvert, resp. localement fermé) dans U si et seulement si $W_{\leq m}$ est fermé (resp. ouvert, resp. localement fermé) dans $U_{\leq m}$ pour tout m. On rappelle qu'un sous-ensemble d'un espace topologique est dit localement fermé quand c'est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé. Si W est un tel sous-ensemble et $\overline{W}$ son adhérence, il revient au même de dire que $\overline{W} \setminus W$ est fermé. Un morphisme entre deux variétés algébriques de dimension infinie $U = \bigcup_m U_{\leq m}$ et $V = \bigcup_m V_{\leq m}$ est une application $\varphi : U \to V$ telle que pour tout m, il existe un entier n pour lequel $\varphi(U_{\leq m}) \subseteq V_{\leq n}$ et tel que la restriction $\varphi : U_{\leq m} \to V_{\leq n}$ soit un morphisme de variétés algébriques de dimensions finies.

Si K est un anneau commutatif unitaire et $N \geq 1$ un entier, nous désignons par $\mathbb{A}^N_K$ l'espace affine de dimension N sur K. Quand $K = \mathbb{C}$, nous écrirons $\mathbb{A}^N$ au lieu de $\mathbb{A}^N_{\mathbb{C}}$. Un endomorphisme polynomial de $\mathbb{A}^N_K$ est classiquement identifié au N-uplet de ses fonctions coordonnées $f = (f_1, \ldots, f_N)$ où les $f_j \in K[X_1, \ldots, X_N]$. Quand $N \leq 3$, nous utiliserons souvent les indéterminées X, Y, Z au lieu de X_1, X_2, X_3. On pose $\deg f = \max_j \deg f_j$, où $K[X_1, \ldots, X_N]$ est muni du degré total.

L'espace $\mathcal{E} := \mathbb{C}[X, Y]^2$ des endomorphismes polynomiaux du plan est naturellement une variété algébrique de dimension infinie. Il suffit de remarquer que le sous-ensemble $\mathcal{E}_{\leq m} := \{f \in \mathcal{E},\ \deg f \leq m\}$ est naturellement une variété algébrique (de dimension finie) pour tout $m \geq 1$, ce qui est clair, car c'est naturellement un espace affine.

Il est bien connu qu'un sous-ensemble localement fermé d'une variété algébrique de dimension finie est naturellement une variété algébrique de dimension finie. Cela reste vrai pour une variété algébrique de dimension infinie.

L'ensemble $\mathcal{J}$ des endomorphismes dont le Jacobien est une constante non nulle est localement fermé dans $\mathcal{E}$. On ne sait toujours pas si le groupe $\mathcal{G}$ des automorphismes est égal à $\mathcal{J}$ (i.e. si la conjecture Jacobienne en dimension 2 est vraie). Par contre, le résultat suivant (appliqué avec $K = \mathbb{C}$) permet de montrer que $\mathcal{G}$ est fermé dans $\mathcal{J}$ (cf. [5]) :

Théorème (Gabber). Si K est un corps et f un automorphisme de l'espace affine $\mathbb{A}_K^N$, on a $\deg f^{-1} \leq (\deg f)^{N-1}$.

Comme $\mathcal{J}$ et $\mathcal{G}$ sont localement fermés dans $\mathcal{E}$, ce sont naturellement des variétés algébriques de dimension infinie.

1.2. Longueur, multidegré et exemples.

Soit K un corps. Soient $\mathcal{G}_K$ le groupe des automorphismes de $\mathbb{A}_K^2$, $\mathcal{A}_K$ le groupe affine et $\mathcal{B}_K := \{(aX + p(Y), bY + c),\ a, b, c \in K, p \in K[Y],\ ab \neq 0\}$ le groupe des automorphismes triangulaires (ce dernier groupe peut être vu comme un sous-groupe de Borel de $\mathcal{G}_K$). Quand $K = \mathbb{C}$, nous écrirons $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) au lieu de $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ (resp. $\mathcal{B}_\mathbb{C}$). Le théorème d'amalgamation (et de génération) suivant est fondamental :

Théorème (Jung, van der Kulk, Nagata). $\mathcal{G}_K = \mathcal{A}_K \underset{\mathcal{A}_K \cap \mathcal{B}_K}{*} \mathcal{B}_K.$

En 1942, H. Jung montre que $\mathcal{G}_K$ est engendré par $\mathcal{A}_K$ et $\mathcal{B}_K$ en caractéristique nulle (cf. [29]). En 1953, W. van der Kulk étend ce résultat à un corps quelconque et prouve en filigrane la structure amalgamée (cf. [40], th. 2). En 1972, M. Nagata énonce explicitement le théorème ci-dessus en se référant à van der Kulk (cf. [49], I, th. 3.3).

Ce théorème permet de définir le multidegré (cf. [24]) et la longueur (cf. [E]) d'un automorphisme. En effet, tout automorphisme admet une écriture réduite

$$f = \alpha_1 \circ \beta_1 \circ \cdots \circ \alpha_k \circ \beta_k \circ \alpha_{k+1}$$

où les α_j (resp. β_j) appartiennent à $\mathcal{A}_K$ (resp. $\mathcal{B}_K$) dans le sens suivant : les β_j n'appartiennent pas à $\mathcal{A}_K$ et les α_j (pour $2 \leq j \leq k$) n'appartiennent pas à $\mathcal{B}_K$.

On pose alors $mdeg(f) := (\deg \beta_1, \ldots, \deg \beta_k)$ et $l(f) := k$.

Rappelons (cf. [71, 24]) que degré et multidegré sont reliés par la formule

$$\deg f = \deg \beta_1 \times \cdots \times \deg \beta_k.$$

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des mutidegrés, i.e. des suites finies d'entiers ≥ 2 (incluant la suite vide).

Convenons qu'une famille (algébrique) d'automorphismes de $\mathbb{A}^2$ est un morphisme $S \to \mathcal{G}$ où S est une variété algébrique complexe. Si S est connexe, nous dirons que la famille est connexe. Que peut-on dire sur le multidegré d'une famille d'automorphismes ? Une bonne source d'inspiration est donnée par l'automorphisme de Nagata (cf [49])

$$f := (X - 2\,Y\,(XZ + Y^2) - Z\,(XZ + Y^2)^2,\;\; Y + Z\,(XZ + Y^2),\;\; Z)$$

et également par l'automorphisme suivant exhibé dans [F] et construit par une méthode expliquée dans [18] :

$$g := (g_1(X, Y, Z),\, g_2(X, Y, Z),\, Z)$$

où $g_2 := Y + Z\,(XZ^2 + Y^3)^3$ et $g_1 := X + Z^{-2}\,(Y^3 - g_2^3 + 3\,Z\,g_2^{11}) \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$.

Ces automorphismes de $\mathbb{A}^3$ peuvent être vus comme des automorphismes de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}[Z]}$ induisant ainsi les familles d'automorphismes $\mathbb{A}^1 \to \mathcal{G}$, $z \mapsto f_z$ et $z \mapsto g_z$.

Si $z \neq 0$, on a les factorisations

$$\begin{aligned} f_z \;&=\; (X - z^{-1}Y^2, Y) \,\circ\, (X, Y + z^2X) \,\circ\, (X + z^{-1}Y^2, Y), \\ g_z \;&=\; \alpha^{-1} \,\circ\, (X - Y^3 + 3\,z\,Y^{11}, Y) \,\circ\, \sigma \,\circ\, (X + z\,Y^3, Y) \,\circ\, \sigma \,\circ\, (X + Y^3, Y) \,\circ\, \alpha \end{aligned}$$

où $\alpha := (z^2X, Y)$ et $\sigma := (Y, X)$. On a donc $\operatorname{mdeg} f_z = (2, 2)$ et $\operatorname{mdeg} g_z = (11, 3, 3)$.

Si $z = 0$, on a $f_0 = (X - 2\,Y^3, Y)$ et $g_0 = (X + 30\,Y^{19}, Y)$ si bien que l'on a $\operatorname{mdeg} f_0 = (3)$ et $\operatorname{mdeg} g_0 = (19)$.

Nous effectuons deux observations :

(i) la longueur diminue en $z = 0$;

(ii) le changement de longueur est accompagné d'un changement de degré.

La première observation nous amène à prouver la généralisation suivante : localement, la longueur d'une famille d'automorphismes ne peut que diminuer (cf. le théorème 1.1 ci-dessous). La seconde observation donne également lieu à une généralisation. En effet, nous montrons que pour une famille connexe d'automorphismes le multidegré est constant si et seulement si le degré est constant (cf. le corollaire 1.3, p. 14).

1.3. La semicontinuité inférieure de la longueur.

On a le résultat suivant (cf [E]) :

Théorème 1.1. L'application longueur $\mathcal{G} \to \mathbb{Z}$ est semicontinue inférieurement.

Résumons la preuve. La force de l'argumentation réside dans le fait qu'en dimension 2, il y a un rapport très étroit entre les automorphismes et leurs composantes. Rappelons qu'un polynôme p appartenant à l'algèbre des polynômes $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]$ est appelé une variable s'il existe un automorphisme de cette algèbre envoyant X_1 sur p. Il revient au même de dire que p est la composante d'un automorphisme polynomial de $\mathbb{A}^N$. Nous désignerons par $\mathcal{V}$ l'ensemble des variables de l'algèbre $\mathbb{C}[X, Y]$. Si v, w sont des variables, nous dirons que w est un prédécesseur de v si $(v, w) \in \mathcal{G}$ et $\deg w < \deg v$. On a le résultat crucial élémentaire suivant (cf. par exemple le lemme 2 de [E]) :

Lemme 1.1. Si le degré de $v \in \mathcal{V}$ est ≥ 2, alors v admet un prédécesseur w et tout autre prédécesseur est de la forme $aw + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Ce résultat nous permet de définir le multidegré d'une variable de la manière suivante :

Définition 1.1. On définit le multidegré d'une variable v par $\operatorname{mdeg} v = \varnothing$ si $\deg v = 1$ et par $\operatorname{mdeg} v = \operatorname{mdeg}(v, w)$ si $\deg v \geq 2$ et w est un prédécesseur de v.

Soit v une variable de multidegré $(d_1, \ldots, d_k)$. On définit sa longueur par $l(v) = k$. Le multidegré d'un prédécesseur est nécessairement égal à $(d_2, \ldots, d_k)$. Si $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{G}$, on a $l(f) = \max\{l(f_1), l(f_2)\}$. Dès lors, le théorème 1.1 est une conséquence du résultat suivant :

Théorème 1.2. L'application longueur $\mathcal{V} \to \mathbb{Z}$ est semicontinue inférieurement.

Dans cet énoncé, l'ensemble $\mathcal{V}$ est muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{P} = \mathbb{C}[X, Y]$. Notons en passant que $\mathcal{V}$ n'est pas localement fermé dans $\mathcal{P}$. En effet, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$ le polynôme $X + \varepsilon X^2$ appartient à $\overline{\mathcal{V}} \setminus \mathcal{V}$ tandis que sa limite quand ε tend vers 0 n'y appartient plus (cf. [K], 4.1 pour les détails). Soit $\mathcal{V}^{\leq k}$ l'ensemble des variables de longueur $\leq k$ et soit $\overline{\mathcal{V}^{\leq k}}$ son adhérence dans $\mathcal{P}$.

Si $k \geq 0$, posons $\mathcal{U}^{\leq k} := \{p \circ v,\ p \in \mathbb{C}[T],\ v \in \mathcal{V}^{\leq k}\}$ et posons également $\mathcal{U}^{\leq -1} := \mathbb{C}$. Le théorème 1.2 signifie que $\overline{\mathcal{V}^{\leq k}} \cap \mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}^{\leq k}$. L'inclusion $\mathcal{U}^{\leq k-1} \cap \mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}^{\leq k}$ étant élémentaire, ce théorème découle du résultat suivant :

Proposition 1.1. On a $\overline{\mathcal{V}^{\leq k}} = \mathcal{V}^{\leq k} \cup \mathcal{U}^{\leq k-1}$.

Preuve. L'inclusion $\mathcal{V}^{\leq k} \cup \mathcal{U}^{\leq k-1} \subseteq \overline{\mathcal{V}^{\leq k}}$ ne présente pas de difficulté. Elle est évidente pour $k = 0$. Supposons donc $k \geq 1$. Si $p \in \mathbb{C}[T]$, $v \in \mathcal{V}^{\leq k-1}$, montrons que $p(v) \in \overline{\mathcal{V}^{\leq k}}$. Soit $w \in \mathcal{V}$ tel que $(v, w) \in \mathcal{G}$. Quel que soit $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$, $(v, \varepsilon w + p(v)) \in \mathcal{G}$, donc $\varepsilon w + p(v) \in \mathcal{V}^{\leq k}$. On conclut alors en faisant tendre ε vers 0.

L'autre inclusion est plus intéressante. Elle revient à montrer que $\mathcal{C}_k := \mathcal{V}^{\leq k} \cup \mathcal{U}^{\leq k-1}$ est fermé dans $\mathcal{P}$. Posons $P := \{p \in \mathcal{P} = \mathbb{C}[X, Y],\ p(0, 0) = 0\}$ et $C_k := \mathcal{C}_k \cap P$. Comme $\mathcal{C}_k$ est invariant par les translations $p \mapsto p + c$ où $c \in \mathbb{C}$, il suffit de montrer que C_k est fermé dans P.

On raisonne par récurrence sur k. L'idée clé consiste à se ramener à un problème projectif, ce qui permettra d'utiliser le théorème fondamental de la théorie de l'élimination (cf. [48], I, §9, th. 1). Le mécanisme qui permet l'induction réside dans le résultat suivant. Sa preuve élémentaire figure dans le lemme 6 de [E].

Lemme 1.2. Si $p \neq 0 \in P$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $p \in C_{k+1}$;
(ii) $\exists\, q \neq 0 \in C_k$ tel que $\mathrm{Jac}(p,q) \in \mathbb{C}$ et $\deg q \leq \deg p$.

Désignons par $\mathbb{P}$ (resp. $\mathbb{P}_{\leq n}$) l'ensemble des droites vectorielles de P (resp. $P_{\leq n}$). L'égalité $\mathbb{P} = \bigcup_n \mathbb{P}_{\leq n}$ munit $\mathbb{P}$ d'une structure de variété algébrique de dimension infinie. Rappelons qu'il existe une correpondance naturelle entre les cônes de P et les sous-ensembles de $\mathbb{P}$. De plus, le cône est fermé si et seulement le sous-ensemble est fermé. Soit $F_k \subseteq \mathbb{P}$ le sous-ensemble correspondant au cône $C_k \subseteq P$. Montrons que F_k est fermé dans $\mathbb{P}$.

Soit $J \subseteq \mathbb{P}\times\mathbb{P}$ le sous-ensemble (fermé) formé des couples $([p],[q])$ tels que $\mathrm{Jac}(p,q) \in \mathbb{C}$. Désignons par p_1 (resp. p_2) : $\mathbb{P}\times\mathbb{P} \to \mathbb{P}$ la première (resp. seconde) projection.

Il suffit alors de noter que d'après le lemme 1.2, on a $F_{k+1} = p_1\left(J \cap p_2^{-1}(F_k)\right)$ et l'on a même l'égalité plus fine $F_{k+1} \cap \mathbb{P}_{\leq n} = p_1\left(J \cap p_2^{-1}(F_k) \cap (\mathbb{P}_{\leq n} \times \mathbb{P}_{\leq n})\right)$ quel que soit n.

Par le théorème fondamental de la théorie de l'élimination, la première projection $p_1 : \mathbb{P}_{\leq n} \times \mathbb{P}_{\leq n} \to \mathbb{P}_{\leq n}$ est un morphisme fermé. Cela suffit à montrer que si F_k est fermé dans $\mathbb{P}$, alors F_{k+1} aussi. □

Voici un sous-produit immédiat de la proposition 1.1 :

Proposition 1.2. On a $\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{U}$, où $\mathcal{U} := \{p(v),\, p \in \mathbb{C}[T],\, v \in \mathcal{V}\}$.

L'ensemble $\mathcal{U}$ apparaît à plusieurs reprises dans la littérature. Rappelons-en maintenant une caractérisation géométrique, puis algébrique.

La caractérisation géométrique suivante est connue sous le nom du lemme des droites parallèles. Elle est prouvée en [56], cor. 1 ou en [55], lemme 1.2.1. Comme d'habitude, une droite désigne n'importe quelle variété isomorphe à $\mathbb{A}^1$. De plus, deux droites de $\mathbb{A}^2$ sont dites parallèles si elles sont égales ou disjointes.

Lemme 1.3 (dit des droites parallèles). Soit $u : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$ un morphisme non constant. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $u \in \mathcal{U}$;
(ii) chaque fibre de u est une union de droites parallèles ;
(iii) au moins une fibre de u est une union de droites parallèles.

Remarque. Ce lemme est en même temps une conséquence et une généralisation du théorème d'Abhyankar-Moh-Suzuki (cf. [1, 68]) affirmant que pour tout morphisme v : $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$ les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $v \in \mathcal{V}$;
(ii) chaque fibre de v est une droite ;
(iii) au moins une fibre de v est une droite.

Note. Des variantes célèbres sont énoncées en pages 16 et 33 ci-dessous.

Rappelons qu'un endomorphisme linéaire l d'un espace vectoriel V est dit localement nilpotent si pour tout $v \in V$, il existe un entier naturel n tel que $l^n(v) = 0$. La caractérisation algébrique suivante de $\mathcal{U}$ (énoncée dans [42], §3 ou [23], cor. 4.7) est une conséquence facile du résultat de Rentschler ([54]) affirmant que toute dérivation localement nilpotente de $\mathbb{C}[X,Y]$ est conjuguée (par un automorphisme de $\mathbb{C}[X,Y]$) à une dérivation triangulaire $p(X)\,\partial_Y$.

Lemme 1.4. Soit u un élément de $\mathbb{C}[X,Y]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $u \in \mathcal{U}$;
(ii) La dérivation Jacobienne $q \mapsto \mathrm{Jac}(u,q)$ de $\mathbb{C}[X,Y]$ est localement nilpotente.
En outre, toute dérivation localement nilpotente de $\mathbb{C}[X,Y]$ est de la forme $q \mapsto \mathrm{Jac}(u,q)$.

Cette dernière approche permet de retrouver le fait que $\mathcal{U}$ est fermé dans $\mathcal{P} = \mathbb{C}[X,Y]$ (cf. [K], prop. 4.1). Soit $\mathfrak{Der} := \{a\,\partial_X + b\,\partial_Y,\ a,b \in \mathcal{P}\} \simeq \mathcal{P}^2$ la variété algébrique de dimension infinie des dérivations de $\mathbb{C}[X,Y]$ et soit $\mathfrak{LND}$ le sous-ensemble des dérivations localement nilpotentes.

Lemme 1.5. $\mathfrak{LND}$ est fermé dans $\mathfrak{Der}$.

Preuve. Soit $D = a\,\partial_X + b\,\partial_Y$ une dérivation et soit $m := \max\{\deg a, \deg b\}$. D'après [21], th. 1.3.52 ou [23], prop. 8.4, D est localement nilpotente si et seulement si $D^{m+2}X = D^{m+2}Y = 0$. $\square$

Preuve directe du caractère fermé de $\mathcal{U}$. Soit $\varphi : \mathcal{P} \to \mathfrak{Der}$ le morphisme envoyant $p \in \mathcal{P}$ sur la dérivation $q \mapsto \mathrm{Jac}(p,q)$. On a $\mathcal{U} = \varphi^{-1}(\mathfrak{LND})$ par le lemme 1.4 et l'on conclut par le lemme 1.5. $\square$

L'application longueur $l : \mathcal{V} \to \mathbb{Z}$ s'étend en une application $l : \mathcal{U} \to \mathbb{Z}$:

Définition 1.2. Si $u \in \mathcal{U}$, posons $l(u) := \min\{k \in \mathbb{Z},\ u \in \mathcal{U}^{\leq k}\}$.

Nous avons vu que la semicontinuité inférieure de l'application $l : \mathcal{G} \to \mathbb{Z}$ se déduit de celle de l'application $l : \mathcal{V} \to \mathbb{Z}$. En fait, on a même le résultat plus abouti suivant :

Théorème 1.3. L'application longueur $l : \mathcal{U} \to \mathbb{Z}$ est semicontinue inférieurement.

Ce théorème signifie que $\mathcal{U}^{\leq k}$ est fermé dans $\mathcal{P}$. Sa preuve est une adaptation de celle de la proposition 1.1 (cf. [K], th. 4.3).

1.4. La stratification par le multidegré.

Si $d \in \mathcal{D}$ est un multidegré, soit $\mathcal{G}_d$ l'ensemble des automorphismes de multidegré d. Intéressons nous maintenant à la partition de $\mathcal{G}$ donnée par les $\mathcal{G}_d$. Il est bon d'avoir en tête les deux exemples suivants (cf. par exemple [27]) :

Exemple 1. Soient $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, B le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures et W le sous-groupe des matrices de permutations (si bien que W est isomorphe au groupe des permutations d'un ensemble à n éléments). On a le résultat suivant :

Théorème (décomposition de Bruhat).
(i) On a $G = \coprod_{w \in W} BwB$;
(ii) Chaque double-classe BwB est un sous-ensemble lisse et localement fermé de G ;
(iii) L'adhérence $\overline{BwB}$ est une union de double-classes BvB.

On définit alors l'ordre de Bruhat sur W de la manière suivante :

$$v \leq w \iff BvB \subseteq \overline{BwB} \iff \overline{BvB} \subseteq \overline{BwB}.$$

Il est bien connu que ce résultat s'étend à n'importe quel triplet (G, B, W), où G est un groupe algébrique réductif complexe, B un sous-groupe de Borel et W le groupe de Weyl.

Exemple 2. Plus généralement, si un groupe algébrique G agit (morphiquement) sur une variété algébrique V, alors :
(i) Les orbites partitionnent V ;
(ii) Chaque orbite est un sous-ensemble lisse et localement fermé de V ;
(iii) L'adhérence d'une orbite est une union d'orbites.

On définit également un ordre partiel sur les orbites de la manière suivante :

$$O_1 \leq O_2 \iff O_1 \subseteq \overline{O_2} \iff \overline{O_1} \subseteq \overline{O_2}.$$

Dans le cas qui nous intéresse, notons tout d'abord qu'il n'est pas vrai (en général) que $\overline{\mathcal{G}}_d$ est une union de $\mathcal{G}_e$. Si $d = (d_1, \ldots, d_k)$, on vérifie aisément que $\mathcal{G}_d$ est un sous-ensemble constructible irréductible de dimension $d_1 + \ldots + d_k + 6$ (cf. [24] et [A]). La famille $z \mapsto g_z$ exhibée en 1.2 montre que $\mathcal{G}_{(19)} \cap \overline{\mathcal{G}}_{(11,3,3)} \neq \varnothing$. Pourtant, pour des raisons de dimension, on ne peut pas avoir $\mathcal{G}_{(19)} \subseteq \overline{\mathcal{G}}_{(11,3,3)}$.

On définit néanmoins un ordre partiel sur les multidegrés par la relation :

$$d \sqsubseteq e \iff \overline{\mathcal{G}}_d \subseteq \overline{\mathcal{G}}_e.$$

Pour la clarté de l'exposé, il nous a semblé judicieux d'introduire deux autres ordres partiels sur les multidegrés. Nous décrivons la situation au paragraphe 1.4.a.

Le paragraphe 1.4.b est consacré à l'étude de la strate $\mathcal{G}_d$. Nous montrons qu'elle est lisse et localement fermée dans $\mathcal{G}$. L'ensemble $\mathcal{V}_d$ des variables de multidegré d est également lisse et localement fermé dans $\mathcal{P} = \mathbb{C}[X, Y]$.

1.4.a. Trois ordres partiels sur l'ensemble des multidegrés.

Nous utilisons trois ordres partiels sur l'ensemble des multidegrés : $\sqsubseteq$, $\preceq$ et $\leq$.

1) $\sqsubseteq$ est l'ordre partiel **naturel** défini précédemment et introduit dans [K].

Remarque. La relation binaire $\sqsubseteq$ est clairement réflexive et transitive. Vérifions qu'elle est antisymétrique. Si $d \sqsubseteq e$ et $e \sqsubseteq d$, alors $\mathcal{G}_d$ et $\mathcal{G}_e$ sont deux ensembles denses et constructibles de la variété $\overline{\mathcal{G}}_d = \overline{\mathcal{G}}_e$. On a donc $\mathcal{G}_d \cap \mathcal{G}_e \neq \varnothing$, ce qui prouve que $d = e$.

Soit $\mathcal{D}_{\leq m}$ l'ensemble des multidegrés $(d_1, \ldots, d_k)$ satisfaisant $d_1 \ldots d_k \leq m$.

Observation. Les composantes irréductibles de $\mathcal{G}_{\leq m}$ sont les $\overline{\mathcal{G}}_d$, où d décrit l'ensemble des éléments maximaux de $\mathcal{D}_{\leq m}$ pour l'ordre $\sqsubseteq$.

Malheureusement, nous ne connaissons pas explicitement l'ordre $\sqsubseteq$ ni même les éléments maximaux de $\mathcal{D}_{\leq m}$ pour cet ordre.

2) $\preceq$ est l'ordre partiel **explicite** introduit dans l'article [E]. Il s'agit de l'ordre partiel induit par les 3 relations suivantes :

(i) $\varnothing \preceq (d_1, \ldots, d_k)$;
(ii) $(d_1, \ldots, d_k) \preceq (e_1, \ldots, e_k)$ si $d_j \leq e_j$ pour tout j ;
(iii) $(d_1, \ldots, d_{j-1}, d_j + d_{j+1} - 1, d_{j+2}, \ldots, d_k) \preceq (d_1, \ldots, d_k)$ si $1 \leq j \leq k-1$.

À ce jour, notre conjecture la plus ambitieuse est la suivante (cf. [K], §7) :

Conjecture 1.1. Les ordres partiels $\sqsubseteq$ et $\preceq$ coïncident, i.e. $d \sqsubseteq e \Longleftrightarrow d \preceq e$.

Si la conjecture 1.3 ci-dessous est satisfaite, on a les relations suivantes (cf. cor. 1.6) :
(i) $d \preceq e \Longrightarrow d \sqsubseteq e$;
(ii) si d et e ont des longueurs ≤ 2, on a même $d \preceq e \Longleftrightarrow d \sqsubseteq e$.

3) $\leq$ est l'ordre partiel introduit dans l'article [A]. Si $d = (d_1, \ldots, d_k)$, $e = (e_1, \ldots, e_l)$, on dit que $d \leq e$ si $k \leq l$ et s'il existe une sous-suite $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq l$ telle que $d_j \leq e_{i_j}$ pour $1 \leq j \leq k$.

Si $d \leq e$, il est facile de montrer que $d \sqsubseteq e$ et $d \preceq e$. Quant au résultat élémentaire suivant, il est prouvé en [K], lemme 7.4 :

Lemme 1.6. Les éléments maximaux de $\mathcal{D}_{\leq m}$ pour $\leq$ et $\preceq$ coïncident.

Soit C_m l'ensemble des éléments maximaux de $\mathcal{D}_{\leq m}$ pour l'ordre $\leq$ (ou $\preceq$). Il est clair que la conjecture 1.1 ci-dessus entraîne la suivante (formulée en [A], §6) :

Conjecture 1.2. Les composantes irréductibles de $\mathcal{G}_{\leq m}$ sont les $\overline{\mathcal{G}}_d$, où d décrit C_m.

Cette conjecture sera discutée à la section 1.6. Finissons ce paragraphe consacré aux ordres partiels en reliant les automorphismes et les variables. Ces deux notions étant très proches, le résultat qui suit n'est pas surprenant.

Proposition 1.3. On a $\mathcal{G}_d \subseteq \overline{\mathcal{G}}_e \Longleftrightarrow \mathcal{V}_d \subseteq \overline{\mathcal{V}}_e$.

Avant de commencer la preuve proprement dite, nous énonçons un critère valuatif que nous utilisons souvent. Même s'il apparaît familier (cf. par exemple [47], chap. 2, § 1,

p. 52-54 ou [25], § 7), nous en donnons une preuve détaillée dans la section 1 de l'article [K].

Soit $\mathbb{C}[[T]]$ l'algèbre des séries formelles complexes et soit $\mathbb{C}((T))$ son corps des fractions. Si V est une variété algébrique complexe et A une algèbre complexe, $V(A)$ désignera l'ensemble des points de V à valeurs dans A, i.e. l'ensemble des morphismes $\operatorname{Spec} A \to V$. Si v est un point fermé de V et $\varphi \in V\Big(\mathbb{C}((T))\Big)$, nous écrirons $v = \lim_{T\to 0} \varphi(T)$ quand :

(i) le point $\varphi : \operatorname{Spec} \mathbb{C}((T)) \to V$ est une composition $\operatorname{Spec} \mathbb{C}((T)) \to \operatorname{Spec} \mathbb{C}[[T]] \to V$;

(ii) v est le point $\operatorname{Spec} \mathbb{C} \to \operatorname{Spec} \mathbb{C}[[T]] \to V$.

Par exemple, si $V = \mathbb{A}^1$ et $\varphi \in V\Big(\mathbb{C}((T))\Big) = \mathbb{C}((T))$, nous écrirons $v = \lim_{T\to 0} \varphi(T)$ quand $\varphi \in \mathbb{C}[[T]]$ et $v = \varphi(0)$.

Critère 1.1. Soit $f : V \to W$ un morphisme de variétés algébriques complexes et soit w un point fermé de W. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $w \in \overline{f(V)}$;

(ii) $w = \lim_{T\to 0} f(\varphi(T))$ pour un certain $\varphi \in V\Big(\mathbb{C}((T))\Big)$.

Grâce à ce critère, il est facile de montrer que si $v \in \overline{\mathcal{V}}_d$, alors il existe une variable $v_T \in \mathbb{C}((T))[X, Y]$ de multidegré d telle que $v = \lim_{T\to 0} v_T$ (cf. [K], cor. 1.2).

Preuve de la proposition 1.3.

Supposons que $d = (d_1, \dots, d_l)$ avec $l \geq 1$ et posons $d' := (d_2, \dots, d_l)$.

L'implication directe est élémentaire :

Si $v \in \mathcal{V}_d$, soit $w \in \mathcal{V}_{d'}$ tel que $f := (v, w)$ appartienne à $\mathcal{G}_d$. En supposant que l'on ait $\mathcal{G}_d \subseteq \overline{\mathcal{G}}_e$, il existe donc $g \in \mathcal{G}_e\left(\mathbb{C}((T))\right)$ tel que $f = \lim_{T\to 0} g(T)$. Quitte à remplacer g_1 par $g_1 + Tg_2$, on peut supposer que le multidegré de g_1 est e. Comme $v = \lim_{T\to 0} g_1(T)$, on a $v \in \overline{\mathcal{V}}_e$.

L'implication réciproque, quoique du même style, est plus délicate. Elle repose sur le lemme suivant, dont le premier point se montre par récurrence sur $l(v)$ tandis que le deuxième se montre par récurrence sur $l(d) - l(v)$ (cf. [K], lemmes 7.2 et 7.3).

Lemme 1.7. Soit $v \in \mathcal{V}$.

1. Si $p(v) \in \overline{\mathcal{V}}_d$, où $p \in \mathbb{C}[T]$ est non constant, alors $v \in \overline{\mathcal{V}}_d$.
2. Si $v \in \overline{\mathcal{V}}_d$, alors tout prédécesseur de v appartient également à $\overline{\mathcal{V}}_d$.

On suppose donc $\mathcal{V}_d \subseteq \overline{\mathcal{V}}_e$ et si $f \in \mathcal{G}_d$, on veut montrer que $f \in \overline{\mathcal{G}}_e$.

On peut supposer en outre que $f_1 \in \mathcal{V}_d$ et $f_2 \in \mathcal{V}_{d'}$.

Écrivons $e = (e_1, \dots, e_m)$ et soit k le plus grand entier tel que $f_1 \in \overline{\mathcal{V}}_{(e_k, \dots, e_m)}$.

Il existe une variable $g_1 \in \mathcal{V}_{(e_k, \dots, e_m)}\left(\mathbb{C}((T))\right)$ telle que $f_1 = \lim_{T\to 0} g_1(T)$. On construirait alors facilement un prédécesseur $g_2 \in \mathcal{V}_{(e_{k+1},\dots,e_m)}\Big(\mathbb{C}((T))\Big)$ de g_1 tel que $g_2(T)$ admette une limite non constante quand T tend vers 0.

Posons $h = (h_1, h_2) = \lim_{T\to 0} g(T)$, où $g = (g_1, g_2)$.

Montrons que h est un automorphisme. Sa première coordonnée étant une variable, il suffit de vérifier que son Jacobien est une constante non nulle. Or, ce Jacobien est clairement constant. Il ne saurait être nul, car sinon l'on aurait $h_2 = p(h_1)$ pour un certain polynôme p et l'on aurait alors (grâce au point 1 du lemme précédent) $h_1 \in \overline{\mathcal{V}}_{(e_{k+1},\dots,e_m)}$, contredisant la définition de k.

On a aussi $\deg h_2 \leq \deg h_1$ grâce au point 2 du lemme précédent, car sinon h_1 serait un prédécesseur de h_2, ce qui nous donnerait encore $h_1 \in \overline{\mathcal{V}}_{(e_{k+1},\dots,e_m)}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\deg(h_2 - \alpha h_1) < \deg h_1$.

Comme $(h_1, h_2 - \alpha h_1) = \lim_{T\to 0}(g_1, g_2 - \alpha g_1)$, on a $(h_1, h_2 - \alpha h_1) \in \overline{\mathcal{G}}_{(e_k,\dots,e_m)} \subseteq \overline{\mathcal{G}}_e$.

Or $(h_1, h_2 - \alpha h_1)$ et f ont la même première composante. On peut donc passer de l'un à l'autre en composant à gauche par un automorphisme affine. Il est maintenant clair que $f \in \overline{\mathcal{G}}_e$. □

1.4.b. La strate $\mathcal{G}_d$.

Dans l'article [24], Friedland et Milnor montrent que $\mathcal{G}_d$ forme une variété analytique lisse (cf. leur lemme 2.4). En gros, ils construisent un morphisme bijectif d'une variété algébrique lisse dans $\mathcal{G}_d$. Par le corollaire 1.2 ci-dessous, $\mathcal{G}_d$ est localement fermé dans $\mathcal{E}$. En montrant que leur morphisme est un isomorphisme, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 1.4. Chaque $\mathcal{G}_d$ est un sous-ensemble lisse et localement fermé de $\mathcal{G}$.

Preuve. Il suffit de montrer que $G_d := \{f \in \mathcal{G}_d,\ f(0,0) = (0,0)\}$ est lisse.

Nous supposons que $d = (d_1, \dots, d_l)$ avec $l \geq 1$ et nous distinguons deux étapes :

1) Rappelons la construction de la fibration localement triviale $\pi : G_d \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ donnée dans [24].

Soit G le groupe des automorphismes fixant l'origine, soit GL le groupe linéaire et soit E le groupe des automorphismes triangulaires fixant l'origine. Notons que G est la somme amalgamée de GL et E sur leur intersection B, qui se trouve être un sous-groupe de Borel de GL. Nous identifions la droite projective $\mathbb{P}^1$ à l'espace quotient GL/B. Tout élément f de G_d s'écrit comme un mot réduit de la forme

$$a_0 \circ e_1 \circ a_1 \circ \cdots \circ e_l \circ a_l$$

où les a_i (resp. e_i) appartiennent à GL (resp. E). Grâce à la structure amalgamée, les classes a_0B et Ba_l ne dépendent pas du mot réduit. On définit donc bien une projection π par la formule $\pi(f) := (a_0B, a_l^{-1}B)$. On vérifierait facilement que π est une fibration localement triviale de fibre $F_d := \pi^{-1}(B, B)$.

Parvenu à ce point, il suffit de montrer que F_d est lisse.

2) Montrons que le morphisme bijectif exhibé dans [24] d'une variété lisse dans F_d

est un isomorphisme.

La fibre F_d est constituée des éléments f s'écrivant comme mots réduits de la forme $f = e_1 \circ a_1 \circ \cdots \circ e_{l-1} \circ a_{l-1} \circ e_l$ avec des transformations triangulaires à chaque bout et avec $\deg e_i = d_i$.

Soit $\mathbb{T} := \{(aX, bY),\, a, b \in \mathbb{C}^*\}$ un tore maximal de GL et pour $1 \leq i \leq l$, soit $E_i := \{(X + p(Y), Y),\, p \in \mathbb{C}[Y],\, p(0) = 0,\, \deg p = d_i\}$.

On rappelle que $\sigma = (Y, X)$. On voit facilement que le morphisme suivant est bijectif (cf. [24]) :

$$\prod_{1 \leq i \leq l} E_i \times \mathbb{T} \to F_d, \qquad (e_1, \ldots, e_l, t) \mapsto e_1 \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma \circ e_l \circ t.$$

Pour montrer que c'est un isomorphisme, en raisonnant par récurrence sur l, il suffit de montrer que l'application suivante est régulière.

$$F_d \to E_1, \qquad f = e_1 \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma \circ e_l \circ t \;\mapsto\; e_1.$$

Mais si $f = (f_1, f_2)$ et $l \geq 2$, l'élément $e_1 = (X + p(Y), Y)$ de E_1 est déterminé par :

$$\deg\Big(f_1 - p(f_2)\Big) < \deg f_2.$$

C'est donc un exercice facile (cf. [K], th. B pour les détails). $\square$

Le résultat analogue pour les variables utilise le lemme qui suit. Ce lemme se prouve par récurrence, en s'appuyant sur le critère 1.1 donné précédemment (cf [K], th. C et [K], cor. 5.1).

Lemme 1.8. Soient $d = (d_1, \ldots, d_l)$ et $e = (e_1, \ldots, e_l) \in \mathcal{D}$ des multidegrés de même longueur. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathcal{G}_d \subseteq \overline{\mathcal{G}}_e$; (ii) $\mathcal{G}_d \cap \overline{\mathcal{G}}_e \neq \varnothing$; (iii) $\mathcal{V}_d \subseteq \overline{\mathcal{V}}_e$; (iv) $\mathcal{V}_d \cap \overline{\mathcal{V}}_e \neq \varnothing$; (v) $d_i \leq e_i$ $(\forall\, i)$.

Corollaire 1.1. Chaque $\mathcal{V}_d$ est localement fermé dans $\mathcal{P}$ (même si $\mathcal{V}$ ne l'est pas !).

Preuve. Supposons que $d = (d_1, \ldots, d_l)$ avec $l \geq 1$.

Posons $A_d := \{e = (e_1, \ldots, e_l) \in \mathcal{D},\, e_i \leq d_i, \forall\, i \text{ et } e \neq d\}$. Si $k \geq 0$, rappelons que $\mathcal{V}^{\leq k} = \{v \in \mathcal{V},\, l(v) \leq k\}$ et que $\mathcal{U}^{\leq k} = \{p \circ v,\, p \in \mathbb{C}[T],\, v \in \mathcal{V}^{\leq k}\}$. En utilisant la proposition 1.1 et le lemme 1.8, on obtient l'égalité $\overline{\mathcal{V}}_d \setminus \mathcal{V}_d = \Big(\overline{\mathcal{V}}_d \cap \mathcal{U}^{\leq l-1}\Big) \;\cup\; \bigcup_{e \in A_d} \overline{\mathcal{V}}_e$.
Dès lors, le théorème 1.3 montre que $\overline{\mathcal{V}}_d \setminus \mathcal{V}_d$ est fermé. $\square$

Proposition 1.5. Chaque $\mathcal{V}_d$ est un sous-ensemble lisse et localement fermé de $\mathcal{P}$.

Preuve. Il suffit de montrer que $V_d := \{v \in \mathcal{V}_d,\, v(0,0) = 0\}$ est lisse.

Nous distinguons deux étapes :

1) Soit H_d l'ensemble des $f \in \mathcal{G}_d$ satisfaisant les conditions suivantes :

$$f(0,0) = (0,0),\ \deg f_1 > \deg f_2 \text{ et } \operatorname{Jac} f = 1.$$

En utilisant la fibration localement triviale définie ci-dessus, on vérifierait aisément que H_d est un sous-ensemble lisse et localement fermé de $\mathcal{E}$. De plus, la première projection $p_1 : H_d \to V_d$, $(f_1, f_2) \mapsto f_1$ est un morphisme bijectif.

2) Montrons que p_1 est un isomorphisme.

Supposons que $d = (d_1, \ldots, d_l)$ avec $l \geq 1$. Soit A l'espace vectoriel des polynômes p de $\mathbb{C}[X,Y]$ satisfaisant $p(0,0) = 0$ et $\deg p < d_1 \ldots d_l$. Il suffit de montrer que l'application $\alpha : V_d \to A$ envoyant f_1 sur l'unique f_2 tel que $(f_1, f_2) \in H_d$ est régulière. Comme $\alpha(f_1)$ est implicitement défini par l'égalité $\operatorname{Jac}(f_1, \alpha(f_1)) = 1$, cela provient de l'énoncé élémentaire suivant (cf. [K], lemme 6.2 pour les détails). □

Lemme des fonctions implicites. Soit $\varphi : W \times A \to B$ un morphisme, où W est une variété et A, B des espaces vectoriels de dimension finie. Soit b un vecteur fixé de B. Si pour tout $w \in W$, l'application $\varphi_w : A \to B$, $a \mapsto \varphi(w,a)$ est telle que :

(i) φ_w est linéaire ; (ii) φ_w est injective ; (iii) b appartient à l'image de φ_w ;

alors l'application $\alpha : W \to A$ implicitement définie par $\varphi(w, \alpha(w)) = b$ est régulière.

1.5. La variété $\mathcal{G}_{=m}$.

Soit $\mathcal{G}_{=m}$ l'ensemble des automorphismes polynomiaux dont le degré est exactement égal à m. Il est clair que $\mathcal{G}_{=m}$ est localement fermé si bien qu'il hérite d'une structure de variété algébrique. Le résultat suivant nous a été suggéré par D. Wright :

Théorème 1.4. Si $d = (d_1, \ldots, d_k)$ et $m = d_1 \ldots d_k$, alors $\mathcal{G}_d$ est fermé dans $\mathcal{G}_{=m}$.

Preuve. Si $f \in \overline{\mathcal{G}}_d \cap \mathcal{G}_{=m}$, on se ramène au cas où $\deg f_1 = m$ et $\deg f_2 < m$. Comme $f_1 \in \overline{\mathcal{V}}_d$, on a $f_1 \in \mathcal{V}_d$ par le lemme suivant, d'où $f \in \mathcal{G}_d$. □

La preuve du lemme 1.9 est technique (cf. [K], lemme 2.2). Disons simplement que nous raisonnons par récurrence sur k et que nous utilisons le critère 1.1.

Lemme 1.9. Soit $d = (d_1, \ldots, d_k)$. Si $v \in \overline{\mathcal{V}}_d$ est une variable de degré $d_1 \ldots d_k$, alors $v \in \mathcal{V}_d$.

Voici quatre corollaires au théorème 1.4.

Corollaire 1.2. L'ensemble $\mathcal{G}_d$ est localement fermé dans $\mathcal{G}$.

Corollaire 1.3. Pour toute famille connexe d'automorphismes $S \to \mathcal{G}$, le multidegré est constant si et seulement si le degré est constant.

Notons l'analogie entre ce corollaire et l'énoncé classique (cf. [26], th. (III, 9.9)) :

Théorème. Soit S un schéma intègre nöthérien et soit $V \subseteq \mathbb{P}_S^N$ un sous-schéma fermé. Pour tout $s \in S$, soit V_s la fibre considérée comme un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_{k(s)}^N$. Alors V est plat sur S si et seulement si le polynôme de Hilbert de V_s est indépendant de s.

Comme pour les groupes algébriques, la variété $\mathcal{G}_{=m}$ est l'union disjointe de ses composantes irréductibles :

Corollaire 1.4. Les composantes irréductibles de $\mathcal{G}_{=m}$ sont les $\mathcal{G}_d$, où d décrit l'ensemble des multidegrés $(d_1, \ldots, d_k)$ satisfaisant $d_1 \ldots d_k = m$.

Le corollaire 1.4 et la proposition 1.4 fournissent le résultat qui suit :

Corollaire 1.5. La variété $\mathcal{G}_{=m}$ est lisse.

1.6. La variété $\mathcal{G}_{\leq m}$.

Ma première publication sur la variété des automorphismes répond à une remarque de Bass, Connell et Wright formulée dans leur article [5] faisant le point sur la conjecture Jacobienne (il s'agit de la remarque 1.7, p. 294). Ils notent que l'égalité $\mathcal{G}_{\leq m} = \mathcal{J}_{\leq m}$ découlerait de l'égalité des dimensions jointe à l'irréductibilité de $\mathcal{J}_{\leq m}$. Cependant, je montre le résultat suivant (cf. [A]) :

Proposition 1.6. La variété $\mathcal{G}_{\leq m}$ est irréductible si et seulement si $m \leq 3$.

L'égalité $\dim \mathcal{G}_{(d_1,\ldots,d_k)} = d_1 + \cdots + d_k + 6$ montre que $\overline{\mathcal{G}}_{(m)}$ est une composante irréductible de $\mathcal{G}_{\leq m}$. Soit $\mathcal{G}^{\leq k}$ l'ensemble des automorphismes de longueur $\leq k$. Vu que $\mathcal{G}^{\leq 1}$ est fermé dans $\mathcal{G}$, on a $\overline{\mathcal{G}}_{(m)} = \mathcal{G}_{\leq m} \cap \mathcal{G}^{\leq 1}$. $\square$

Il n'est pas nécessaire d'invoquer le théorème 1.1 dans toute sa force pour montrer que $\mathcal{G}^{\leq 1}$ est fermé dans $\mathcal{G}$. Soit π l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X, Y]$ qui à $p = \sum_{k \geq 0} p_k$ associe $\sum_{k \geq 2} p_k$, où chaque p_k est k-homogène. Rappelons que deux vecteurs u, v d'un espace vectoriel V sont linéairement dépendants si et seulement si $u \wedge v = 0$ dans $\bigwedge^2 V$. Pour montrer que $\mathcal{G}^{\leq 1}$ est fermé, il suffit de constater qu'un automorphisme $f = (f_1, f_2)$ est de longueur ≤ 1 si et seulement si $\pi(f_1) \wedge \pi(f_2) = 0$.

Nous avons déjà remarqué que les composantes irréductibles de $\mathcal{G}_{\leq m}$ sont des $\overline{\mathcal{G}}_d$. La conjecture 1.2 propose même une description des multidegrés d apparaissant. Nous reproduisons ci-dessous une preuve élémentaire de cette conjecture dans le cas $m \leq 9$ (cf [A], th. 2) et une preuve plus élaborée dans le cas $m \leq 27$ (cf [K], §7).

Preuve de la conjecture 1.2 dans le cas $m \leq 9$.

Si $d = (d_1, \ldots, d_k)$ est un multidegré, définissons sa longueur par $l(f) = k$ et son module par $|d| = d_1 + \cdots + d_k$. Si $\overline{\mathcal{G}}_d$ est strictement inclus dans $\overline{\mathcal{G}}_e$, il est clair que $|d| < |e|$ (car $\overline{\mathcal{G}}_d$ est irréductible de dimension $|d| + 6$). Si $m \leq 9$, il se trouve que tous les éléments de C_m différents de (m) ont un même module inférieur ou égal à m. Dès lors, si $d, e \in C_m$, le seul cas où $\overline{\mathcal{G}}_d$ pourrait être strictement inclus dans $\overline{\mathcal{G}}_e$ est celui où $d \neq (m)$ et $e = (m)$. Comme $l(d) \geq 2$ et $\overline{\mathcal{G}}_{(m)} \subseteq \mathcal{G}^{\leq 1}$, c'est impossible. □

Preuve de la conjecture 1.2 dans le cas $m \leq 27$.

Si $\overline{\mathcal{G}}_d$ est strictement inclus dans $\overline{\mathcal{G}}_e$, nous avons déjà noté que $|d| < |e|$. Si l'on suppose en outre que $d, e \in C_m$ (où m est un entier quelconque), montrons par l'absurde que $l(d) < l(e)$. En effet, sinon l'on aurait $l(d) = l(e)$ (par la semicontinuité inférieure de la longueur), d'où $d \leq e$ (par le lemme 1.8). Une contradiction.

Si $m \leq 27$, il nous suffit de vérifier à la main que quels que soient $d, e \in C_m$, on a $|e| \leq |d|$ ou $l(e) \leq l(d)$. Cela revient à vérifier que $l(d) < l(e) \Longrightarrow |d| \geq |e|$. Par exemple, si $m = 27$, C_{27} est constitué de toutes les permutations des suite finies suivantes : (27), $(2, 13)$, $(3, 9)$, $(4, 6)$, $(5, 5)$, $(2, 2, 6)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 3, 3)$, $(2, 2, 2, 3)$. La vérification est immédiate. □

Prenons $m = 28$. Les multidegrés $(5, 5)$ et $(2, 2, 7)$ appartiennent à C_{28}. Cependant, nous ne savons pas encore si l'inclusion $\mathcal{G}_{(5,5)} \subseteq \overline{\mathcal{G}}_{(2,2,7)}$ est satisfaite ou non.

1.7. Le cas de la longueur 2.

Soit K un corps de caractéristique nulle. Il est bien connu que l'énoncé suivant (cf. [1, 68]) portant sur des polynômes en une seule indéterminée entraîne le théorème de Jung.

Théorème (Abhyankar-Moh-Suzuki, 1974) (forme algébrique). Si $a, b \in K[X]$ sont tels que $K[a, b] = K[X]$, alors $\deg a$ divise $\deg b$ ou $\deg b$ divise $\deg a$.

Dans [L], nous formulons la conjecture suivante :

Conjecture 1.3 (dite de rigidité). Si $m, n \geq 1$, l'affirmation suivante est vraie :

R(m,n). Soit $a = X(1 + a_1 X + \ldots + a_m X^m)$, $b = X(1 + b_1 X + \ldots + b_n X^n) \in \mathbb{C}[X]$, où les $a_i, b_j \in \mathbb{C}$. Écrivons $a \circ b = X(1 + c_1 X + \ldots c_N X^N)$, où $N = (m+1)(n+1) - 1$ et les $c_k \in \mathbb{C}$. Si $c_1 = \ldots = c_{m+n} = 0$, alors $a = b = X$.

En utilisant des bases de Gröbner, nous avons vérifié $R(m, n)$ par ordinateur pour $m \leq 5$ et $n \leq 8$. Notons que cet énoncé porte sur des polynômes en une indéterminée. Comme pour le théorème d'Abhyankar-Moh-Suzuki, l'hypothèse $R(m, n)$ a des conséquences pour les automorphismes polynomiaux du plan. En effet, voici le résultat principal de [L] :

Théorème 1.5. Si $R(m, n)$ est vraie et $d = (m + 1, n + 1)$, alors $\overline{\mathcal{G}}_d = \bigcup_{e \preceq d} \mathcal{G}_e$.

Corollaire 1.6. Supposons que la conjecture 1.3 soit satisfaite. Soient d, e des multidegrés.

(i) on a : $d \preceq e \Longrightarrow d \sqsubseteq e$;
(ii) si d et e ont des longueurs ≤ 2, on a même : $d \preceq e \Longleftrightarrow d \sqsubseteq e$.

Preuve. Pour montrer (i), il suffit de revenir à la définition de $\preceq$.

Si $d = (d_1, \dots, d_k)$, $e = (e_1, \dots, e_k)$ et $d_j \leq e_j$ pour tout j, nous avons déjà signalé que $\mathcal{G}_d \subseteq \overline{\mathcal{G}}_e$. Si $d = (d_1, \dots, d_k)$ et $e = (d_1, \dots, d_{j-1}, d_j + d_{j+1} - 1, d_{j+2}, \dots, d_k)$, où $1 \leq j \leq k-1$, on a $\mathcal{G}_{(d_j+d_{j+1}-1)} \subseteq \overline{\mathcal{G}}_{(d_j,\, d_{j+1})}$ par le théorème 1.5, d'où $\mathcal{G}_e \subseteq \overline{\mathcal{G}}_d$.

L'assertion (ii) est une conséquence directe du théorème 1.5. $\square$

Commençons par expliquer pourquoi $R(m,n)$ s'interprète comme une hypothèse de rigidité. En considérant les a_i, b_i comme des indéterminées de degré i, on peut voir les c_i comme des polynômes homogènes de degré i de $\mathbb{C}[a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n]$. L'hypothèse $R(m,n)$ signifie alors que $(c_1, \dots, c_{m+n})$ est un système régulier de paramètres.

La définition d'un système régulier de paramètres se trouve dans n'importe quel ouvrage d'algèbre commutative (par exemple [19]). Rappelons-la néanmoins. Graduons l'algèbre des polynômes $R = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_r]$ en décrétant que chaque z_k est homogène d'un certain degré strictement positif (dépendant de k). Soit R_m l'espace des polynômes m-homogènes. Si $p = (p_1, \dots, p_r) \in R^r$, soit $\phi_p : \mathbb{A}^r \to \mathbb{A}^r$ le morphisme de variétés algébriques défini par $\phi_p(z) = (p_1(z), \dots, p_r(z))$. Soit également I_p l'idéal de R engendré par les p_k. Si chaque p_k est homogène d'un certain degré strictement positif (dépendant de k), on dit que p est un **système régulier de paramètres** si les assertions équivalentes suivantes sont satisfaites :

(i) $(\phi_p)^{-1}(0) = \{0\}$;
(ii) ϕ_p est un morphisme fini ;
(iii) ϕ_p est un morphisme quasi-fini ;
(iv) ϕ_p est un morphisme propre ;
(v) ϕ_p est un morphisme plat ;
(vi) $\dim_{\mathbb{C}} R/I_p < +\infty$;
(vii) si $d > \max\limits_k \deg p_k$, alors pour l assez grand on a $R_{dl} \subseteq I^l$.

Si p est un système régulier de paramètres, notons que ϕ_p est surjectif. En effet, comme ϕ_p est propre (resp. plat), son image est fermée (resp. ouverte).

Par conséquent, $R(m,n)$ équivaut à dire que l'endomorphisme polynomial de $\mathbb{A}^{m+n}$ envoyant $(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)$ sur $(c_1, \dots, c_{m+n})$ est quasi-fini. Cela signifie bien que dans un certain sens la composition des polynômes est rigide. Pour le moment, nous ne savons prouver $R(m,n)$ que dans le cas général suivant (cf. [L], th. A) :

Théorème 1.6. Si m ou $n \leq 2$, alors $R(m,n)$ est vraie.

Résumé de la preuve. Notons tout d'abord que $R(m,n)$ équivaut à $R(n,m)$. De plus, l'affirmation suivante équivaut à dire que $R(m,n)$ est vraie pour tout n.

R(m). Soit $a = X(1 + a_1X + \ldots + a_mX^m) \in \mathbb{C}[X]$ et soit $a^{-1} \in \mathbb{C}[[X]]$ son inverse formel pour la composition. Si m coefficients consécutifs de a^{-1} sont nuls, alors $a = X$.

Comme $R(1)$ est évidente, il suffit de prouver $R(2)$.
Écrivons $a = X(1 + a_1X + a_2X^2)$ sous la forme $a = X(1 - \lambda_1X)(1 - \lambda_2X)$.
Si $a^{-1} = X\left(1 + \sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{n+1} X^n\right)$, on pourrait vérifier à la main la relation suivante :

$$n(n-1)(\lambda_1 - \lambda_2)^2u_n + (n-1)(2n-1)(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - 2\lambda_2)(\lambda_2 - 2\lambda_1)u_{n-1} \\ -3(3n-4)(3n-2)\lambda_1^2\lambda_2^2u_{n-2} = 0. \qquad (*)$$

Si deux coefficients consécutifs u_n sont nuls, on vérifie alors que u_n est nul pour n assez grand. Par conséquent, a^{-1} est un polynôme, ce qui prouve que $a = X$. $\square$

Nous avons deviné la relation précédente (*) par ordinateur. Il existe néanmoins plusieurs méthodes théoriques permettant de trouver de telles relations pour chaque m (on donne une relation pour $m = 3$ en [L], I.3). Malheureusement, si $m \geq 3$, nous n'arrivons pas à en déduire que $R(m)$ est vraie.

Grâce aux théorèmes 1.5 et 1.6, on a le résultat suivant :

Théorème 1.7. Si $d = (d_1, d_2)$ avec d_1 ou $d_2 \leq 3$, on a $\overline{\mathcal{G}}_d = \bigcup_{e \preceq d} \mathcal{G}_e$.

Et l'on a aussi l'application amusante que voici :

Corollaire 1.7. Tout sous-groupe fermé de $\mathcal{G}$ contenant le groupe affine et un automorphisme de longueur 1 est égal à $\mathcal{G}$.

Preuve du corollaire. En effet, soit $\mathcal{H}$ un tel groupe. On a $\mathcal{H} \cap \mathcal{G}_{(d)} \neq \varnothing$ pour un certain $d \geq 2$. Si $d > 2$, un calcul trivial montre que $\mathcal{H} \cap \mathcal{G}_{(d-1)} \neq \varnothing$. On en déduit que $\mathcal{H} \cap \mathcal{G}_{(2)} \neq \varnothing$, puis que $\mathcal{G}_{(2)} \subseteq \mathcal{H}$. Si $\mathcal{G}_{(d)} \subseteq \mathcal{H}$, on a $\mathcal{G}_{(d+1)} \subseteq \overline{\mathcal{G}}_{(d,2)} \subseteq \overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$. On a donc $\mathcal{G}_{(d)} \subseteq \mathcal{H}$ pour tout $d \geq 2$, ce qui montre que $\mathcal{H} = \mathcal{G}$. $\square$

Question 1.1. Existe-t-il un sous-groupe fermé non trivial de $\mathcal{G}$ contenant le groupe affine ?

La preuve du théorème 1.5 utilise la semicontinuité de la longueur d'un automorphisme (théorème 1.1) et le lemme 1.8. Le critère 1.1 ramène la preuve à des calculs de limites (quand T tend vers 0) dans $\mathbb{C}((T))$. Ces calculs (quoique fastidieux) sont triviaux. L'hypothèse $R(m, n)$ permet de montrer que certaines familles de polynômes constituent des systèmes réguliers de paramètres. Nous utilisons aussi l'énoncé théorique suivant (cf. [L], lemmes 2.1 et 2.2) :

Lemme 1.10. Soit $p=(p_1,\dots,p_r)$ un système régulier de paramètres de $R=\mathbb{C}[z_1,\dots,z_r]$.

1. Si $q\in R$ est homogène de degré strictement supérieur à ceux des p_k, quel que soit $b\in\mathbb{A}^r_{\mathbb{C}[[T]]}$ satisfaisant $b(0)=0$, on a

$$\operatorname{val} q(b) \;\geq\; \min_k \;\operatorname{val} p_k(b) \;+\; 1.$$

2. Quel que soit $\gamma\in\mathbb{A}^r$, il existe $q\geq 1$ et $b\in\mathbb{A}^r_{\mathbb{C}[[T]]}$ tel que $\lim\limits_{T\to 0}\dfrac{p(b)}{T^q}=\gamma$.

Remarque. On peut même s'arranger pour avoir $p(b)=T^q\,\gamma$.

2. Automorphismes dynamiquement triviaux.

Commençons par définir les termes employés dans le titre.

Définition 2.1. Un endomorphisme f de l'espace affine $\mathbb{A}^N$ est dynamiquement trivial si son degré dynamique $dd(f):=\lim_{n\to\infty}(\deg f^n)^{1/n}$ vaut 1. Pour un automorphisme, cela revient à dire que son entropie topologique est nulle (cf. [24, 69]).

La section 2.1 est consacrée à l'étude du degré des itérés d'un automorphisme du plan. On y introduit le langage des suites récurrentes linéaires. Cela nous permet de définir la notion d'endomorphisme polynomial localement fini (resp. quasi-localement fini) qui fait l'objet de la section 2.2 (resp. 2.3).

2.1. Le cas de la dimension 2.

Soit f un automorphisme polynomial du plan. En utilisant la structure amalgamée du groupe des automorphismes, on vérifie aisément (cf. [24]) que le degré dynamique $\mathrm{dd}(f)$ est un entier naturel non nul et que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{dd}(f)=1$;

(ii) f est triangularisable (i.e. conjugué à un automorphisme triangulaire) ;

(iii) la suite $n\mapsto\deg f^n$ est bornée.

De plus, si $\mathrm{dd}(f)\geq 2$, f est conjugué à un automorphisme g satisfaisant quel que soit n

$$\deg g^n=[\,\mathrm{dd}(f)\,]^n.$$

Dans l'article [D], nous affinons cette description :

Théorème 2.1. Les conditions (i-iii) précédentes équivalent aux suivantes :

(iv) $\deg f^2\leq\deg f$;

(v) $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \deg f^n\leq\deg f$;

(vi) la suite $n\mapsto\deg f^n$ est ultimement périodique (i.e. périodique pour n grand).

De plus, si $\mathrm{dd}(f)\geq 2$, la suite $n\mapsto\deg f^n$ est géométrique.

On en tire les deux corollaires suivants, valables pour n'importe quel automorphisme polynomial du plan complexe.

Corollaire 2.1. On a $\mathrm{dd}(f) = \max\{\,1,\ (\deg f^2)\,/\,(\deg f)\,\}$.

Corollaire 2.2. La série formelle $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (\deg f^n)\, T^n$ est rationnelle, i.e. appartient à $\mathbb{Q}(T)$.

Les assertions du théorème 2.1 se déduisent de la structure amalgamée de $\mathcal{G}$, à l'exclusion de l'assertion (vi) qui repose sur un théorème profond de théorie des nombres que nous allons expliciter. Commençons par rappeler la définition d'une suite récurrente linéaire (cf. [12] pour un tour d'horizon de ce domaine). Soit V un espace vectoriel sur un corps K. Désignons par $V^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $u\ :\ \mathbb{N} \to V$. Pour $p = \displaystyle\sum_k p_k\ T^k \in K[T]$, on définit $p(u) \in V^{\mathbb{N}}$ par la formule $\big(p(u)\big)\,(n) = \displaystyle\sum_k p_k\ u(n+k)$, quel que soit n.

Il est bien connu que l'ensemble des polynômes annulant u est un idéal de $K[T]$. On dit que u est une suite récurrente linéaire si cet idéal est non nul. Dans ce cas, l'unique polynôme unitaire générateur s'appelle le polynôme minimal de u et on le note μ_u.

L'assertion (iii) équivaut à dire que la suite $n \mapsto f^n$ est récurrente linéaire. Dès lors, l'assertion (vi) est une conséquence du résultat suivant (cf. [64] pour l'énoncé et [41] pour la preuve). Le symbole de Kronecker $\delta(x, y)$ vaut 1 si $x = y$ et 0 sinon.

Théorème (Skolem-Mahler-Lech, 1953). Soit u une suite récurrente linéaire complexe, alors la suite $n \mapsto \delta(u_n, 0)$ est ultimement périodique.

De manière équivalente, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, u_n = 0\}$ est une union finie de progressions arithmétiques. Un sous-ensemble P de $\mathbb{N}$ est qualifié de progression arithmétique s'il existe deux entiers naturels a et r tels que $P = \{a + rn,\ n \in \mathbb{N}\}$.

La notion de suite récurrente linéaire autorise la définition suivante.

Définition 2.2. Soit f un endomorphisme polynomial de $\mathbb{A}^N$.

1. On dit que f est localement fini (LF en abrégé) si la suite $n \mapsto f^n$ est une suite récurrente linéaire ;
2. On dit que f est quasi-localement fini (QLF en abrégé) si la suite $n \mapsto f^n(a)$ est une suite récurrente linéaire quel que soit $a \in \mathbb{A}^N$.

2.2. Automorphismes localement finis.

Dans l'article [G], avec S. Maubach, nous dégageons quelques propriétés élémentaires des endomorphismes localement finis. Nous notons qu'un endomorphisme f est LF s'il satisfait les conditions équivalentes suivantes :

(i) l'espace vectoriel engendré par les f^n $(n \geq 0)$ est de dimension finie ;

(ii) la suite $n \mapsto \deg\ f^n$ est bornée ;

(iii) quel que soit $r \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]$, l'espace vectoriel engendré par les $r \circ f^n$ $(n \geq 0)$ est de dimension finie.

Remarque. Grâce au théorème de Skolem-Mahler-Lech, ces assertions équivalent à dire que la suite $n \mapsto \deg f^n$ est ultimement périodique.

La condition (iii) signifie que l'endomorphisme linéaire $f^* : r \mapsto r \circ f$ de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]$ est LF au sens familier (cf. par exemple [21]) et elle justifie la terminologie. Elle se reformule en disant que f^* est une limite inductive d'endomorphismes d'espaces vectoriels de dimensions finies.

Si f est un endomorphisme de $\mathbb{A}^N$, l'ensemble des polynômes $p \in \mathbb{C}[T]$ annulant f est un idéal de $\mathbb{C}[T]$. Cet idéal est non nul si et seulement si f est LF. Dans ce cas, l'unique polynôme unitaire générateur s'appelle le polynôme minimal de f et on le note μ_f. Ce polynôme coïncide avec le polynôme minimal de la suite récurrente linéaire $n \mapsto f^n$.

Même si un endomorphisme polynomial générique n'est *pas* LF, de manière étonnante, on rencontre beaucoup d'endomorphismes LF dans la littérature :

(1) Les endomorphismes affines sont LF ;

(2) Les endomorphismes triangulaires et élémentaires sont LF ;

(3) L'automorphisme de Nagata est LF. Il est annulé par $(T-1)^3$;

(4) Dans l'article [9], M. de Bondt définit les quasi-translations comme étant les automorphismes f satisfaisant l'égalité $f + f^{-1} = 2\,\mathrm{id}$ et il les utilise pour obtenir des résultats forts. Notons qu'un endomorphisme polynomial est une quasi-translation si et seulement s'il est annulé par $(T-1)^2$.

(5) Tout automorphisme d'ordre fini est LF. En dimension ≥ 3, on ne sait toujours pas si un tel automorphisme est linéarisable (i.e. conjugué à un automorphisme linéaire).

(6) Plus généralement, si un groupe algébrique agit (morphiquement) dans l'espace affine, alors chaque élément du groupe induit un automorphisme LF de l'espace affine (il est d'ailleurs clair que tout automorphisme LF s'obtient de la sorte).

(7) Si D est une dérivation localement finie de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]$, alors $\exp D$ est un automorphisme LF.

(8) Les endomorphismes nilpotents sont LF.

Comme l'attestent les trois propositions suivantes (prouvées dans [G]), les endomorphismes polynomiaux LF ressemblent beaucoup aux endomorphismes linéaires.

Proposition 2.1. Si f est LF, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est injectif ;

(ii) f est surjectif ;

(iii) f est un automorphisme ;

(iv) $\mathrm{Jac}\, f \in \mathbb{C}^*$;

(v) $\mathrm{Jac}\, f \neq 0$.

L'équivalence entre (iii) et (iv) signifie que les endomorphismes LF satisfont la conjecture Jacobienne. Notons que le Jacobien d'un endomorphisme LF est toujours constant.

L'énoncé suivant généralise au cas polynomial un résultat de base d'algèbre linéaire.

Proposition 2.2. Si f est un endomorphisme polynomial nilpotent de l'espace affine $\mathbb{A}^N$ (i.e. $f^n = 0$ pour un certain n), alors $f^N = 0$.

Comme dans le cas linéaire, on montre que la suite $k \mapsto \dim f^k(\mathbb{A}^N)$ stationne dès que deux de ses termes consécutifs sont égaux. Enfin, les automorphismes LF admettent une décomposition de Jordan multiplicative en éléments semisimples et unipotents. Définissons ces termes. Soit f un endomorphisme polynomial LF de $\mathbb{A}^N$ et soit f^* l'endomorphisme d'algèbre associé. Nous dirons que f est semisimple (resp. unipotent) si l'endomorphisme linéaire associé f^* est semisimple (resp. unipotent). Remarquons que f est semisimple (resp. unipotent) si et seulement si son polynôme minimal est à racines simples (resp. est de la forme $(T-1)^p$).

Proposition 2.3. Si f est un automorphisme polynomial LF de $\mathbb{A}^N$, il existe un unique couple (f_s, f_u) d'automorphismes LF satisfaisant les assertions suivantes :
(i) $f = f_s \circ f_u = f_u \circ f_s$; (ii) f_s est semisimple ; (iii) f_u est unipotent.

Cette décomposition provient de la décomposition de Jordan-Chevalley, qui affirme qu'un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ contient les composantes semisimples et unipotentes de chacun de ses éléments (cf. par exemple [27], §15).

Nous généralisons aussi le théorème de Cayley-Hamilton au cas polynomial. Si f est un endomorphisme linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie, la formule close $\chi_f := \det(T\,\mathrm{id} - f)$ fournit un polynôme annulateur de f. Dans le cas polynomial, nous montrons l'énoncé suivant :

Théorème 2.2. Soit f un endomorphisme polynomial de $\mathbb{A}^n$ s'annulant à l'origine et tel que $d := \sup_n \deg f^n < +\infty$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ sont les valeurs propres de la partie linéaire de f, alors le polynôme suivant annule f :

$$\chi_f := \prod_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^N \\ 0 < |\alpha| \leq d}} (T - \lambda^\alpha).$$

Comme d'habitude, nous convenons que $\lambda^\alpha = \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_N^{\alpha_N}$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$.

On a $\deg \chi_f = \binom{N+d}{d} - 1$ et dans le cas linéaire ($d = 1$) on retrouve le polynôme caractéristique usuel. Ce résultat n'est pas complètement satisfaisant car on ne connaît pas de formule donnant d a priori. On ne connaît même pas d'algorithme permettant de décider si d est fini ou pas (i.e. si f est LF ou pas).

Il en va autrement en dimension 2 car l'assertion (v) du théorème 2.1 se généralise à un endomorphisme quelconque (i.e. qui n'est pas un automorphisme).

Lemme 2.1. Si f est un endomorphisme LF de $\mathbb{A}^2$, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\deg f^n \leq \deg f$.

Idée de la preuve. Si f n'est pas un automorphisme, on a $\mathrm{Jac}\, f = 0$ par la proposition 2.1 et l'on en déduit l'existence de $u : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$ et $v : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ tels que $f = v \circ u$. La suite du raisonnement est élémentaire (cf. [G], lemme 4.4 pour les détails, où l'on peut supprimer l'hypothèse que f fixe l'origine). $\square$

Dès lors, on obtient une version plus aboutie du théorème de Cayley-Hamilton :

Corollaire 2.3. Soit f un endomorphisme polynomial LF de $\mathbb{A}^2$ s'annulant à l'origine. Si $d := \deg f$ et si λ_1, λ_2 sont les valeurs propres de la partie linéaire de f, le polynôme suivant annule f :

$$\chi_f := \prod_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ 0 < |\alpha| \leq d}} (T - \lambda^\alpha).$$

Cet énoncé fournit un polynôme annulateur de degré $d(d+3)/2$. Par une analyse plus fine, on obtient le résultat suivant (cf. [G], th. 4.2).

Thèorème 2.3. Soit f un endomorphisme polynomial LF de $\mathbb{A}^2$ s'annulant à l'origine. Si $d := \deg f$ et si μ_f désigne le polynôme minimal, on a $\deg \mu_f \ \leq \ d + 1$.

Idée de la preuve. On considère deux cas.

Dans le cas inversible, on montre que f s'écrit sous la forme $f = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$, où g et φ s'annulent à l'origine et $d = rs^2$, avec $r = \deg g$ et $s = \deg \varphi$. Si $g = (aX + p(Y), bY)$, on montre que f est annulé par le polynôme

$$q = \prod_{\substack{(k,l) \in \mathbb{N}^2 \\ 0 \ < \ kr+l \ \leq \ rs}} (T - a^k b^l).$$

Il suffit alors de vérifier que $\deg q = s(\frac{rs}{2} + \frac{r}{2} + 1) \leq rs^2 + 1 = d + 1$.

Dans le cas non inversible, on montre qu'il existe $u : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$ et $v : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ s'annulant à l'origine tels que $f = v \circ u$ et $u \circ v = a\,\mathrm{id}$, où $a \in \mathbb{C}$. On montre alors que f est annulé par le polynôme $T(T-a)\dots(T-a^d)$. $\square$

En 1979, Kambayashi a conjecturé que toute action (algébrique) d'un groupe réductif sur $\mathbb{A}^N$ est linéarisable (cf. [32]). Quand $N = 2$, il a déduit ce résultat de la structure amalgamée du groupe des automorphismes du plan. Néanmoins, en 1989, Schwarz a donné un contre-exemple en dimension supérieure pour SL_2 et certains autres groupes (cf. [57]). En 1991, Knop a donné un contre-exemple pour tous les groupes connexes réductifs non abéliens (cf. [36]) et Masuda, Moser-Jauslin et Petrie ont donné un contre-exemple pour certains groupes finis non abéliens (cf. [43, 44]).

Citons pourtant quelques résultats positifs. En 1985, Kraft et Popov ont montré que toute action d'un groupe semisimple sur $\mathbb{A}^3$ est linéarisable (cf. [37]) et Panyushev a étendu ce résultat à $\mathbb{A}^4$ (cf. [51, 52]). Enfin, il résulte du travail de Kaliman, Koras, Makar-Limanov et Russell que toute action d'un tore sur $\mathbb{A}^3$ est linéarisable (cf. [31]).

Par contre, on ne sait toujours pas si l'action d'un groupe réductif abélien est linéarisable En particulier, si $N \geq 3$ et $e \geq 2$, on ne sait pas si un automorphisme de $\mathbb{A}^N$ d'ordre fini e est linéarisable (cf. [38, 39]). Le cas intermédiaire où G est le produit d'un tore et d'un groupe cyclique fini, i.e. le cas où il existe un automorphisme semisimple f tel que $G = \overline{< f >}$ s'énonce de la manière suivante :

Question 2.1. Les automorphismes semisimples sont-ils linéarisables ?

Même si dans le cas linéaire il est bien connu que l'exponentielle réalise une surjection de $\mathrm{M}_N(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$, nous n'avons pas su répondre à la question analogue dans le cas polynomial :

Question 2.2. Tout automorphisme LF de $\mathbb{A}^N$ est-il l'exponentielle d'une dérivation LF de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]$?

L'application exponentielle induit une bijection des matrices nilpotentes dans les matrices unipotentes. Ce résultat s'étend sans difficulté au cas polynomial (cf. [G], lemme 2.3) :

Proposition 2.4. L'exponentielle induit une bijection des dérivations localement nilpotentes de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]$ dans l'ensemble des automorphismes unipotents de $\mathbb{A}^N$.

Exemple. L'automorphisme de Nagata est l'exponentielle d'une dérivation localement nilpotente (cf [66]). Si l'on sait déjà qu'il est LF, c'est une conséquence du théorème 2.2 et de la proposition 2.4.

Enfin, un élément du groupe linéaire $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ est semisimple si et seulement si sa classe de conjugaison est fermée. Le but de l'article [M] est de montrer la généralisation suivante qui nous a été suggérée par H. Kraft.

Théorème 2.4. Un automorphisme polynomial du plan affine complexe est semisimple si et seulement si sa classe de conjugaison est fermée.

Dans cet énoncé, le groupe des automorphismes est muni de sa structure de variété algébrique de dimension infinie. Un résultat analogue en dimension $N \geq 3$ serait très fort car il prouverait que les automorphismes semisimples de $\mathbb{A}^N$ sont linéarisables :

Proposition 2.5. Si la classe de conjugaison d'un automorphisme semisimple est fermée, cet automorphisme est linéarisable.

Preuve. Soit f un automorphisme satisfaisant les hypothèses de la proposition. Grâce au lemme suivant, on peut supposer que f fixe l'origine. Si $h_t := t\,\mathrm{id}$ désigne l'homothétie de rapport t, alors $\lim_{t\to 0} (h_t)^{-1} \circ f \circ h_t$ est égale à la partie linéaire de f. $\square$

Le résultat suivant nous a été communiqué par L. Moser-Jauslin.

Lemme 2.2. Tout automorphisme semisimple admet un point fixe.

Preuve. Si f est un automorphisme semisimple, le groupe algébrique $G := \overline{< f >}$ engendré par f est isomorphe au produit d'un tore par un groupe cyclique fini. Il est clair que G contient un élément d'ordre fini dont l'ensemble des points fixes coïncide avec celui de G. Or, tout automorphisme polynomial d'ordre fini admet un point fixe (cf. [53]). $\square$

Remarque. Smith a montré que tout homéomorphisme de $\mathbb{R}^N$ dont l'ordre est une puissance d'un nombre premier admet un point fixe (cf. [65]). Par contre, si r n'est pas la puissance d'un nombre premier, il existe un entier N et un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}^N$ d'ordre r n'admettant pas de point fixe (cf. [10], p. 61).

2.3. Automorphismes quasi-localement finis.

L'article [J] est consacré aux endomorphismes QLF (cf. déf. 2.2, p. 20). Soit f un endomorphisme polynomial de $\mathbb{A}^N$. Nous écrirons souvent $\mathbb{C}[X]$ au lieu de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]$ et $\mathbb{C}(X)$ au lieu de $\mathbb{C}(X_1, \ldots, X_N)$. Nous désignons par $\mathbb{C}[X]^f$ l'algèbre des polynômes invariants par f et par $\mathbb{C}(X)^f$ le corps des fractions invariantes. Le résultat clé est le suivant (pour une preuve, cf. [J, prop. 1.2 et 1.4] ainsi que le théorème principal de ce même article) :

Théorème 2.5. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est QLF ;
(ii) la suite $n \mapsto f^n$ est récurrente linéaire dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}(X)^N$ sur $\mathbb{C}(X)$;
(iii) la suite $n \mapsto f^n$ est récurrente linéaire dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}(X)^N$ sur $\mathbb{C}(X)^f$.

Si $K = \mathbb{C}(X)^f$, on vérifie que l'ensemble $\mathcal{J}_f$ des polynômes de $K[T]$ annulant f est un idéal. L'équivalence entre (i) et (iii) se reformule ainsi :

Théorème 2.6. Un endomorphisme polynomial f est QLF si et seulement si $\mathcal{J}_f \neq \{0\}$.

Si f est QLF, soit ν_f l'unique polynôme unitaire de $K[T]$ engendrant l'idéal $\mathcal{J}_f$.
Les deux énoncés suivants se déduisent du théorème 2.6.

Corollaire 2.4. Si f est QLF, il existe $A, B \geq 0$ tels que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \deg f^n \leq An + B$.

Corollaire 2.5. Un endomorphisme QLF est dynamiquement trivial.

Question 2.3. La réciproque du corollaire 2.4 est-elle vraie ?

A priori, les coefficients de ν_f sont des fractions. Néanmoins :

Proposition 2.6. Si f est QLF, les coefficients de ν_f appartiennent à $\mathbb{C}[X]^f$.

La démonstration de la proposition 2.6 s'appuie sur le lemme suivant appliqué à l'anneau $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]$. Rappelons que par définition, le polynôme minimal d'une suite récurrente linéaire à valeurs dans un anneau intègre A est à coefficients dans le corps des fractions de A.

Lemme 2.3. Si une suite récurrente linéaire est à valeurs dans un anneau factoriel nöthérien, alors son polynôme minimal est à coefficients dans le même anneau.

Voici une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme QLF soit LF.

Proposition 2.7. Si f est QLF, alors f est LF si et seulement si $\nu_f \in \mathbb{C}[T]$. En outre, si c'est le cas, on a $\mu_f = \nu_f$.

Enfin, les endomorphismes QLF satisfont la conjecture Jacobienne :

Proposition 2.8. Si f est QLF, alors f est inversible si et seulement si $\operatorname{Jac} f \in \mathbb{C}^*$.

La démonstration ne présente pas de difficulté (cf. [J], prop. 3.2). Elle utilise le fait qu'un automorphisme birationnel de l'espace affine dont le Jacobien est une constante non nulle est un automorphisme (cf. [35], [5] ou [21]).

Remarque. Rappelons qu'un endomorphisme polynomial $f = (f_1, \ldots, f_N)$ de $\mathbb{A}^N$ est dit triangulaire si chaque f_L s'écrit sous la forme $aX_L + b$, oì $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}[X_{L+1}, \ldots, X_N]$. De plus, on dit que f est triangularisable s'il est conjugué (par un automorphisme polynomial) à un endomorphisme triangulaire.

Considérons les assertions : (i) f est triangularisable ; (ii) f est LF ; (iii) f est QLF ; (iv) f est dynamiquement trivial. Il est clair que (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv).

Note. L'assertion (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte par exemple du fait que pour un endomorphisme triangulaire f de $\mathbb{A}^N$, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\deg f^n \leq C$, où $C = (\deg f)^{N-1}$.

Si f est un automorphisme de $\mathbb{A}^2$, on a déjà vu que (i) et (iv) sont équivalentes, si bien que dans ce cas les assertions (i-iv) sont toutes équivalentes. Par contre, en dimension supérieure, ces assertions définissent des classes distinctes :

-L'automorphisme de Nagata est LF, mais par [8], il n'est pas triangularisable.

-On vérifierait sans peine que l'automorphisme $f : (X, Y, Z) \mapsto (Y, X + YZ, Z)$ est QLF avec $\nu_f = (T - 1)(T^2 - ZT - 1)$. Dès lors, par la proposition 2.7, il n'est pas LF.

-Soit $f : \mathbb{A}^5 \to \mathbb{A}^5$, $(X, Y, Z, T, U) \mapsto (Y, X + YZ, T, Z + TU, U)$. On vérifierait aisément que $\deg f^n = (n^2 - n + 4)/2$ pour $n \geq 1$ si bien que f est dynamiquement trivial sans être QLF grâce au corollaire 2.4.

Finissons cette partie en décrivant la construction d'automorphismes proposée dans l'article en préparation "Polynomial automorphisms from representation theory". Il se trouve que ces automorphismes sont QLF.

Soit K un corps algébriquement clos. Supposons que $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ soit une représentation (régulière) d'un groupe linéaire algébrique G défini sur K. Soit $R := S(V^*)$ l'algèbre des fonctions régulières sur V et soit $S := R^G$ la sous-algèbre des invariants. Désignons par $G(S)$ le groupe des points de G à valeurs dans S.

Remarque. Si A est une algèbre sur K, $G(A)$ est par définition l'ensemble des morphismes de $\operatorname{Spec} A$ dans G (dans la catégorie des schémas sur K).

Par conséquent, $G(R)$ peut être vu comme l'ensemble des morphismes $g : V \to G$. Avec cette identification, $G(S)$ est le sous-ensemble des morphismes satisfaisant la condition additionnelle $\forall\, h \in G$, $\forall\, v \in V$, $g(h.v) = g(v)$.

On peut toujours supposer que G est un sous-groupe fermé d'un certain $\mathrm{GL}_n(K)$. On a alors $G(S) = \{A \in \mathrm{GL}_n(S), \forall\, v \in V, A(v) \in G\}$.

Si $G = \{A \in \mathrm{GL}_n(k),\ p_1(A) = \cdots = p_r(A) = 0\}$, où les p_k sont des polynômes à coefficients dans K, on a aussi $G(S) = \{A \in \mathrm{GL}_n(S),\ p_1(A) = \cdots = p_r(A) = 0\}$.

Désignons par $\mathcal{A}ut(V)$ le groupe des automorphismes polynomiaux de V. On vérifie que le morphisme $\rho :\ G \to \mathrm{GL}(V)$ s'étend en un morphisme $\widetilde{\rho} :\ G(S) \to \mathcal{A}ut(V)$ grâce à la définition suivante :

Définition 2.3. Si $g \in G(S)$, soit $\widetilde{\rho}(g) :\ V \to V$, $v \mapsto g(v).v$.

Notons que $\widetilde{\rho}(g)$ est QLF. En effet, on peut supposer que G est un sous-groupe fermé d'un certain $\mathrm{GL}_n(K)$, ce qui nous permet de voir g comme un élément de $\mathrm{GL}_n(S)$. Par conséquent, le polynôme caractéristique de la matrice g annule $\widetilde{\rho}(g)$ et l'on conclut par le théorème 2.6 énoncé ci-dessus.

Proposition 2.9. Si G est réductif et si $\rho :\ G \to \mathrm{GL}(V)$ est injectif, alors $\widetilde{\rho} :\ G(S) \to \mathcal{A}ut(V)$ est également injectif. En outre, en identifiant G à un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ et $G(S)$ à un sous-groupe de $\mathcal{A}ut(V)$, on a $G = G(S) \cap \mathrm{GL}(V)$.

Preuve. Comme ρ est injectif, on peut supposer que G est fermé dans $\mathrm{GL}(V)$. Montrons que $\mathrm{Ker}\widetilde{\rho} = \{1\}$. Soit $g \in G(S)$ tel que $\widetilde{\rho}(g) = \mathrm{id}_V$. Comme G est réductif, on peut écrire $V = \bigoplus\limits_{1 \le k \le r} V_k$, où chaque V_k est un G-module irréductible. Si $v \in V$, écrivons $v = \sum\limits_k v_k$ $(v_k \in V_k)$. Si $h \in G$, l'égalité $g(hv)hv = hv$ s'écrit $\sum\limits_k g(v)hv_k = \sum\limits_k hv_k$ car $g(hv) = g(v)$. Comme $g(v)hv_k$ et hv_k appartiennent à V_k, on a $g(v)hv_k = hv_k$. Par conséquent, $\operatorname*{Vect}\limits_{h \in G} hv_k \subseteq \mathrm{Ker}\Big(g(v) - \mathrm{id}_V\Big)$ et si $v_k \neq 0$ cela implique $V_k \subseteq \mathrm{Ker}\Big(g(v) - \mathrm{id}_V\Big)$. Finalement, si tous les v_k sont non nuls, on a $\mathrm{Ker}\Big(g(v) - \mathrm{id}_V\Big) = V$, i.e. $g(v) = \mathrm{id}_V$. Par densité, cette égalité reste valide pour tout $v \in V$.

Si $g \in G(S) \cap GL(V)$, montrons maintenant que $g \in G$. L'application $v \mapsto g(v)v$ étant linéaire, on a $\forall v \in v$, $\forall \lambda \in k$, $g(\lambda v)\lambda v = \lambda g(v)v$, si bien que $g(\lambda v)v = g(v)v$ pour $\lambda \neq 0$. Par densité, on obtient $g(0)v = g(v)v$, i.e. $g = g(0)$. $\square$

Finissons par quelques exemples. Nous nous limitons au cas où $K = \mathbb{C}$ et $G = \mathrm{SL}_2$.

Exemple 1. On considère l'action de SL_2 par conjugaison sur l'espace V des matrices 2×2 de traces nulles.

Comme V est constitué des matrices de la forme $\begin{bmatrix} Y & X \\ Z & -Y \end{bmatrix}$, on identifie $R = SV^*$ à $\mathbb{C}[X, Y, Z]$. On a alors $S = R^G = \mathbb{C}[q]$, où $q = -\det \begin{bmatrix} Y & X \\ Z & -Y \end{bmatrix} = XZ + Y^2$.

Quel que soit $\alpha \in S$, on a $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G(S)$ et

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & X \\ Z & -Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Y + \alpha Z & X - 2\alpha Y - \alpha^2 Z \\ Z & -(Y + \alpha Z) \end{bmatrix}.$$

L'automorphisme induit s'identifie donc à $(X - 2\alpha Y - \alpha^2 Z, Y + \alpha Z, Z)$. En prenant $\alpha = q$, on obtient l'automorphisme de Nagata.

Exemple 2. On considère l'action de SL_2 par multiplication à gauche sur l'espace V des matrices 2×2.

Comme V est constitué des matrices de la forme $\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix}$, on identifie $R = SV^*$ à $\mathbb{C}[X, Y, Z, T]$. On a alors $S = R^G = \mathbb{C}[q]$, où $q = \det \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} = XT - YZ$.

Si $\alpha \in S$, on a $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G(S)$ et $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + \alpha Z & Y + \alpha T \\ Z & T \end{bmatrix}$.

L'automorphisme induit s'identifie donc à $(X + \alpha Z, Y + \alpha T, Z, T)$. En prenant $\alpha = q$, on obtient l'automorphisme d'Anick (cf. [15], p. 343).

Exemple 3. On considère l'action de SL_2 par multiplication à gauche sur l'espace V des matrices 2×3.

Comme V est constitué des matrices de la forme $\begin{bmatrix} X & Y & Z \\ T & U & V \end{bmatrix}$, on identifie $R = SV^*$ à $\mathbb{C}[X, Y, Z, T, U, V]$. On a alors $S = R^G = \mathbb{C}[d_1, d_2, d_3]$, où

$$d_1 = \det \begin{bmatrix} Y & Z \\ U & V \end{bmatrix}, \; d_2 = \det \begin{bmatrix} X & Z \\ T & V \end{bmatrix} \text{ et } d_3 = \det \begin{bmatrix} X & Y \\ T & U \end{bmatrix}.$$

Si $\alpha, \beta \in S$, l'élément $\begin{bmatrix} 1 + \alpha\beta & -\beta^2 \\ \alpha^2 & 1 - \alpha\beta \end{bmatrix}$ de $G(S)$ induit l'automorphisme suivant :

$$\begin{bmatrix} X & Y & Z \\ T & U & V \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 + \alpha\beta & -\beta^2 \\ \alpha^2 & 1 - \alpha\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ T & U & V \end{bmatrix}.$$

En prenant $\alpha = d_1$ et $\beta = d_2$, on obtient un automorphisme s'écrivant sous la forme $\mathrm{id} + h$, où h est un endomorphisme homogène de degré 5 dont les composantes sont linéairement indépendantes. L'endomorphisme h est donc un nouveau contre-exemple au problème suivant formulé par divers auteurs (cf. par exemple le problème 7.1.5 de [21]) et résolu par de Bondt (cf. [9]) :

Problème. Est-ce que l'image d'un endomorphisme homogène de l'espace affine dont la matrice Jacobienne est nilpotente est nécessairement incluse dans un hyperplan ?

Remarques. 1. Si h est un endomorphisme homogène de degré ≥ 2 de l'espace affine, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Jac}(\mathrm{id} + h) = 1$; (ii) la matrice Jacobienne de h est nilpotente.

2. Si α, β sont des indéterminées, la matrice de Cohn $\begin{bmatrix} 1+\alpha\beta & -\beta^2 \\ \alpha^2 & 1-\alpha\beta \end{bmatrix}$ est le prototype d'un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}[\alpha,\beta])$ ne s'écrivant pas comme produit de matrices élémentaires (cf. [14]).

3. Groupes de jets et plongements de gros points.

3.1. Groupes de jets.

Commençons par rappeler la définition d'un automorphisme modéré.

Définition 3.1. a. Un automorphisme polynomial (resp. analytique) de $\mathbb{A}^N$ est triangulaire s'il s'écrit sous la forme $f = (a_1X_1 + p_1, ..., a_NX_N + p_N)$, où $a_k \in \mathbb{C}^*$ et $p_k \in \mathbb{C}[X_{k+1}, \ldots, X_N]$ (resp. où a_k, p_k sont des fonctions analytiques sur $\mathbb{A}^N$ ne dépendant que des indéterminées $X_{k+1}, \ldots, X_N$ avec l'hypothèse supplémentaire que a_k ne s'annule pas).

b. Un automorphisme polynomial (resp. analytique) est modéré si c'est le composé d'automorphismes affines et triangulaires.

Le problème suivant est célèbre :

Problème de la modération. Les automorphismes polynomiaux (resp. analytiques) de $\mathbb{A}^N$ sont-ils tous modérés ?

Dans le cas polynomial, la réponse est positive pour $N = 2$ (cf. [29]), négative pour $N = 3$ (cf. [62, 63]) et non résolue pour $N \geq 4$. Dans le cas analytique, la réponse est négative pour $N \geq 2$ (cf. [2, 3]).

Fixons quelques notations. Désignons par GL le groupe linéaire de $\mathbb{C}^N$. Soit E le monoïde des endomorphismes polynomiaux de $(\mathbb{C}^N, 0)$, i.e. de $\mathbb{C}^N$ fixant 0. Soit A le groupe des automorphismes polynomiaux de $(\mathbb{C}^N, 0)$ et T le sous-groupe des automorphismes modérés. Soient $\widetilde{E}$, $\widetilde{A}$ et $\widetilde{T}$ les objets analogues dans le cas analytique.

Si $f \in \widetilde{E}$, son n-jet à l'origine sera noté $J_n f$. Si M est un sous-monoïde de $\widetilde{E}$, $J_n(M) := \{J_n f,\ f \in M\}$ désigne le monoïde des n-jets associé à M.

On a $J_n(E) = J_n(\widetilde{E}) = \bigoplus_{1 \le k \le n} E_k$, où $E_k :=$ éléments k-homogènes de E.

Si f appartient à un objet gradué, désignons par $f_{(k)}$ sa composante k-homogène.

Le groupe des éléments inversibles de $J_n(E)$ vaut $J_n(E)^* = \{f \in J_n(E),\ f_{(1)} \in \mathrm{GL}\}$.

L'application Jacobienne Jac : $E \to R := \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]$ induit l'application Jac : $J_n(E) \to J_{n-1}(R)$, où $J_{n-1}(R) = \bigoplus_{0 \le k \le n-1} R_k$ et $R_k :=$ éléments k-homogènes de R.

Enfin, l'écriture $H \le G$ signifie que H est un sous-groupe de G.

Théorème (Anick, 1983). $J_n(A) = J_n(T) = \{f \in J_n(E),\ \mathrm{Jac}\, f \in \mathbb{C}^*\}$.

Remarque. L'égalité $J_n(A) = \{f \in J_n(E),\ \mathrm{Jac}\, f \in \mathbb{C}^*\}$ résoud la conjecture Jacobienne au niveau des n-jets tandis que l'égalité $J_n(A) = J_n(T)$ résoud le problème de la modération au niveau des n-jets.

Ce résultat est montré dans l'article [4]. Le recours à la notion de GL-module simplifie substanciellement la preuve. Les deux énoncés suivants proviennent de la théorie des représentations. Le premier figure en [7], §6 (cf. également [H], th. 1.1) et le deuxième en [H], lemme 3.4.

Lemme 3.1. Le GL-module E_{k+1} se décompose en somme de modules irréductibles :

$$E_{k+1} = E^0_{k+1} \oplus E^1_{k+1}, \text{ où}$$

$$E^0_{k+1} := \{f \in E_{k+1},\ \nabla f = 0\}, \text{ avec } \nabla f := \sum_L \frac{\partial f_L}{\partial X_L} \quad \text{et} \quad E^1_{k+1} := \{r\,\mathrm{id},\ r \in R_k\}.$$

Idée de la preuve. Soit V la représentation standard de GL, $S^{k+1}V$ sa $(k+1)$-ème puissance symétrique et V^* son dual. On a $E_{k+1} \simeq S^{k+1}V \otimes V^*$. □

Remarque. Comme E^0_{k+1} et E^1_{k+1} ne sont pas isomorphes, la décomposition est unique.

Lemme 3.2. Si G est un groupe réductif connexe et W une représentation de G ne contenant pas la représentation triviale, alors tout sous-groupe de $(W, +)$ stable par G est un sous-espace vectoriel.

Idée de la preuve. Pour montrer la stabilité de W par multiplication par un scalaire, on considère l'action d'un tore maximal de G sur W. □

Preuve du théorème d'Anick. Si $G \le J_n(E)^*$ et $1 \le k \le n-1$, posons

$$H_k(G) := \{f_{(k+1)},\ f \in G, J_k f = \mathrm{id}\}.$$

Cet ensemble est un sous-groupe de $(E_{k+1}, +)$ et si $\mathrm{GL} \le G$, il est GL-stable (i.e.

stable par conjugaison par GL). Si $\mathrm{GL} \leq G \leq J_n(E)^*$, on a donc (par les lemmes 3.1 et 3.2) :

$$H_k(G) = \{0\},\ E^0_{k+1},\ E^1_{k+1} \text{ ou } E_{k+1}.$$

Si $f = \mathrm{id} + u \in J_n(E)$, où $u \in E_n$, on a $\mathrm{Jac}\, f = 1 + \nabla u$. Par conséquent, si $\mathrm{Jac}\, f \in \mathbb{C}^*$, on a $u \in E^0_n$. Dès lors, si $G \leq \{f \in J_n(E)^*,\ \mathrm{Jac}\, f \in \mathbb{C}^*\}$, on a $H_k(G) = \{0\}$ ou E^0_{k+1}.

De plus, si $\mathrm{GL} \leq G_1 \leq G_2 \leq J_n(E)^*$, on a l'équivalence suivante (cf. [H], lemme 3.6) :

$$G_1 = G_2 \iff \forall\, k,\ H_k(G_1) = H_k(G_2).$$

Posons $G_1 := J_n(T)$ et $G_2 := \{f \in J_n(E),\ \mathrm{Jac}\, f \in \mathbb{C}^*\}$.

Comme $G_1 \leq J_n(A) \leq G_2$, montrons que $G_1 = G_2$, i.e. $\forall\, k,\ H_k(G_1) = H_k(G_2)$.

Vu que $f = \mathrm{id} + (X_2^{k+1}, 0, \ldots, 0) \in T$, on a $H_k(G_1) \neq \{0\}$, d'où $H_k(G_1) = E^0_{k+1}$.

Il est donc clair que $H_k(G_1) = H_k(G_2) = E^0_{k+1}$. □

Dans le cas analytique, on prouverait de manière analogue (cf. [H], prop. 3.3) l'énoncé suivant de [2].

Théorème (Andersen, 1990). $J_n(\widetilde{A}) = J_n(\widetilde{T}) = J_n(E)^*$.

Les théorèmes 3.1 et 3.3 ci-dessous (cf. [H], th. D et E) généralisent les théorèmes d'Anick et Andersen en décrivant les groupes G satisfaisant $\mathrm{GL} \leq G \leq J_n(A)$ et $J_n(A) \leq G \leq J_n(\widetilde{A})$. Définissons les groupes monoïdaux. Si $K \subseteq \mathbb{N}_*$, posons $E_K := \bigoplus_{k \in K} E_k \subseteq E$ et $A_K := A \cap E_K$. Si S est un sous-monoïde de $(\mathbb{N}, +)$, on vérifierait que A_{1+S} est un sous-groupe de A (cf [H], prop. 3.1).

Définition 3.2. Les groupes de la forme A_{1+S} ou $J_n(A_{1+S})$ (où S est un sous-monoïde de $\mathbb{N}$) sont appelés monoïdaux.

Exemples. 1. Si $S = k\mathbb{N}$, alors $A_{1+k\mathbb{N}} = \{f \in A, f(\omega_k X) = \omega_k f(X)\}$, où $\omega_k = e^{2\pi i/k}$.
2. Si $S = \{0\} \cup \mathbb{N}_{\geq k}$, alors $A_{1+S} = \{f \in A,\ f_{(2)} = f_{(3)} = \ldots = f_{(k)} = 0\}$.

Théorème 3.1. Si $\mathrm{GL} \leq G \leq J_n(A)$, alors G est monoïdal, i.e. $G = J_n(A_{1+S})$ pour un certain sous-monoïde S de $\mathbb{N}$.

Remarque. $J_n(A_{1+S}) = J_n(A_{1+T}) \iff S \cap \{1, \ldots, n-1\} = T \cap \{1, \ldots, n-1\}$.

Corollaire 3.1. Le groupe $J_n(A)$ ne possède qu'un nombre fini de sous-groupes contenant le groupe linéaire. De plus, ces sous-groupes sont fermés.

Remarque. Si $\mathrm{GL} \leq G \leq J_n(A)$, il n'est pas (a priori) clair que G soit fermé dans $J_n(A)$. Cela explique la relative technicité de la preuve car on ne peut pas se contenter d'un argument d'algèbres de Lie. D'ailleurs, nous déduisons le théorème 3.1 du théorème 3.2 ci-dessous où les groupes qui apparaissent ne sont pas tous des groupes de Lie.

Si $G \leq J_n(A)$, soit $G_{\mathrm{id}} := \{f \in G,\, J_1 f = \mathrm{id}\}$ le sous-groupe des éléments de G qui sont tangents à l'identité à l'ordre (au moins) un. Désignons par SL le groupe spécial linéaire.

Théorème 3.2. a. Si $\mathrm{SL} \leq G \leq J_n(A)$, il existe un unique couple (H, K) satisfaisant :

(i) $\mathrm{SL} \leq H \leq \mathrm{GL}$; (ii) $K \leq J_n(A)_{\mathrm{id}}$ et K est GL-stable ; (iii) $G = H \ltimes K$.

On a alors $H = G \cap \mathrm{GL}$ et $K = G_{\mathrm{id}}$.

b. Si $K \leq J_n(A)_{\mathrm{id}}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) K est SL-stable ; (ii) K est GL-stable ;

(iii) $K = [J_n(A_{1+S})]_{\mathrm{id}}$ où S est un sous-monoïde de $\mathbb{N}$.

Les arguments de la preuve sont essentiellement les mêmes que ceux utilisés précédemment pour prouver le théorème d'Anick. Néanmoins, la preuve est plus technique et nous l'avons effectué par récurrence sur n (cf. [H], th. 4.1 et 4.2).

Afin de compléter la description proposée dans le théorème 3.2, rappelons que tout groupe H satisfaisant $\mathrm{SL} \leq H \leq \mathrm{GL}$ s'écrit sous la forme $\det^{-1}(U)$, où $\det : \mathrm{GL} \to \mathbb{C}^*$ est l'application déterminant et $U \leq \mathbb{C}^*$.

Si $1 \leq k \leq n$, soit $J_{n,k} : J_n(\widetilde{A}) \to J_k(\widetilde{A})$ l'application naturelle de troncature associant à un n-jet son k-jet tronqué. Comme $J_k(A) \leq J_k(\widetilde{A})$, on a $J_{n,k}^{-1}(J_k(A)) \leq J_n(\widetilde{A})$. En fait (cf. [H], th. E) :

Théorème 3.3. Si $J_n(A) \leq G \leq J_n(\widetilde{A})$, alors $G = J_{n,k}^{-1}(J_k(A))$ pour un certain k.

Le résultat d'Anick (i.e. $J_n(T) = J_n(A)$ pour tout n) consiste à dire que T est dense dans A pour la topologie de Krull. En utilisant le théorème 3.1, on peut montrer la généralisation suivante (cf. [H], th. A) :

Théorème 3.4. Si G est un sous-groupe du groupe des automorphismes polynomiaux contenant strictement le groupe des automorphismes affines, alors G est dense pour la topologie de Krull, i.e. quel que soit l'automorphisme polynomial f et l'entier $n \geq 1$, il existe $g \in G$ tel que les n-jets à l'origine de f et g coïncident.

On montre également le résultat du même style (cf. [H], th. B) :

Proposition 3.1. Tout automorphisme polynomial (resp. analytique) de $\mathbb{A}^N$ peut être approximé en n'importe quel nombre fini de points et à n'importe quel ordre (fini) par un automorphisme polynomial (resp. analytique) modéré.

Notons que nous retrouvons incidemment (cf. [H], §6) le résultat principal de [17] :

Théorème (Drensky, Shpilrain, Yu, 2000). Soit $p \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]$ un polynôme de degré $\leq n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la partie linéaire de p est non nulle (i.e. $p_{(1)} \neq 0$) ;

(ii) il existe une variable de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ dont p soit le n-jet.

3.2. Plongements de gros points.

Deux morphismes f_1 et $f_2 : X \to Y$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ sont équivalents s'il existe des automorphismes α et β rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ X & \xrightarrow{f_2} & Y \end{array}$$

Un schéma X est uniplongeable dans un schéma Y si tous les plongements fermés de X dans Y sont équivalents (dans la catégorie des schémas). On a les résultats suivants (cf. [1, 68, 73, 28, 30, 67, 22, 11]) :

Théorème (Abhyankar-Moh-Suzuki, 1974) (forme géométrique). La droite $\mathbb{A}^1$ est algébriquement uniplongeable dans le plan $\mathbb{A}^2$.

Théorème (Zaidenberg-Lin, 1983). Toute courbe irréductible et simplement connexe de $\mathbb{A}^2$ est algébriquement uniplongeable dans $\mathbb{A}^2$.

Théorème (Jelonek, 1987). Si $N \geq 4$, la droite $\mathbb{A}^1$ est algébriquement uniplongeable dans $\mathbb{A}^N$.

Théorème (Kaliman-Nori-Srinivas, 1991). Si $N \geq 2d + 2$, toute variété affine lisse de dimension d est algébriquement uniplongeable dans $\mathbb{A}^N$.

Théorème (Forstneric-Globevnik-Rosay, 1996). La droite $\mathbb{A}^1$ n'est pas analytiquement uniplongeable dans le plan $\mathbb{A}^2$.

Par contre, le problème suivant n'est pas résolu :

Problème ouvert. La droite $\mathbb{A}^1$ est-elle algébriquement uniplongeable dans $\mathbb{A}^3$?

Intéressons-nous au plongement des gros points dans l'espace affine à équivalence près. Dans ce texte, un gros point désigne n'importe quel schéma affine complexe dont l'algèbre des fonctions est locale finie, i.e. $F = \operatorname{Spec} B$ où B est une algèbre complexe locale finie. Un morphisme de schémas $i : F = \operatorname{Spec} B \to \mathbb{A}^N = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]$ correspond à un morphisme d'algèbres $i^* : \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N] \to B$. Le morphisme i est une immersion fermée quand i^* est surjectif. Nous montrons les résultats suivants :

Théorème 3.5. Tout gros point est analytiquement uniplongeable dans $\mathbb{A}^N$.

Théorème 3.6. Un gros point dont l'algèbre des fonctions admet une $\mathbb{Z}_+$-graduation non triviale est algébriquement uniplongeable dans $\mathbb{A}^N$.

Une graduation $B = \bigoplus_k B_k$ est dite non triviale si $B_0 \neq B$.

Théorème 3.7. Il existe un gros point non algébriquement uniplongeable dans $\mathbb{A}^2$.

Résumons la preuve de ces résultats.

Toute algèbre complexe locale finie est isomorphe à un certain S_n/I, où S_n est l'algèbre $S_n := \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]/(X_1, \ldots, X_N)^{n+1}$ et I un idéal de S_n.

On a $Aut(S_n) \simeq J_n(E)^* = \{f \in J_n(E),\, f_{(1)} \in \mathrm{GL}\}$.

Si I, J sont des idéaux de S_n, on montre (cf. [I], lemme 2.1) que tout isomorphisme $f : S_n/I \to S_n/J$ se relève en un automorphisme $\widehat{f} : S_n \to S_n$ envoyant I sur J. Si π_I désigne la surjection canonique de S_n dans S_n/I, cela signifie que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} S_n \arrow[r, "\widehat{f}"] \arrow[d, "\pi_I"] & S_n \arrow[d, "\pi_J"] \\ S_n/I \arrow[r, "f"] & S_n/J \end{tikzcd}$$

Comme $J_n(E)^* = J_n(\widetilde{A})$, $\widehat{f}$ se relève en un automorphisme analytique de $\mathbb{A}^N$, ce qui montre le théorème 3.5.

Définissons le stabilisateur de I par $Stab(I) := \{f \in Aut(S_n) = J_n(\widetilde{A}),\, f(I) = I\}$. Le critère suivant se montre aisément :

Critère 3.1. Le gros point $\operatorname{Spec} S_n/I$ est algébriquement uniplongeable dans $\mathbb{A}^N$ si et seulement si

$$\mathrm{Stab}(I)\,.\,J_n(A) = J_n(\widetilde{A}).$$

Si $H, K \leq G$, rappelons que K est un complément de H si $G = HK$ et $H \cap K = \{1\}$.

Corollaire 3.2. Si $\mathrm{Stab}(I)$ contient un complément de $J_n(A)$ dans $J_n(\widetilde{A})$, alors $\operatorname{Spec} S_n/I$ est algébriquement uniplongeable dans $\mathbb{A}^N$.

Corollaire 3.3. Si $n \geq 2$ et $\mathrm{Stab}(I) \leq \{f \in J_n(\widetilde{A}),\, J_2 f = \mathrm{id}\}$, alors $\operatorname{Spec} S_n/I$ n'est pas algébriquement uniplongeable dans $\mathbb{A}^N$.

Preuve. Par l'absurde. Si l'on avait $\mathrm{Stab}(I)\,.\,J_n(A) = J_n(\widetilde{A})$, alors, au niveau des 2-jets, on aurait $J_2(A) = J_2(\widetilde{A})$, ce qui est faux. □

Résumé de la preuve du théorème 3.6.

On commence par montrer que toute algèbre complexe locale finie admettant une $\mathbb{Z}_+$-graduation non triviale est isomorphe à $B = R/I$, où l'algèbre $R = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]$

est graduée en décrétant que chaque X_k est homogène d'un certain degré $d_k \in \mathbb{N}$ (les d_k n'étant pas tous nuls) et où I est un idéal homogène de R (cf. [I], §4).

Dès lors, si $\pi : R \to S_n$ désigne la surjection canonique et si $\overline{I} := \pi(I)$, on a $B \simeq S_n/\overline{I}$ (pour n assez grand).

Soit $G_d \subseteq J_n(E)^*$ l'ensemble des n-jets des endomorphismes $f = (p^{d_1}X_1, \ldots, p^{d_N}X_N)$, où $p \in R$ vérifie $p(0) = 1$. On vérifierait aisément que G_d est un sous-groupe de $\mathrm{Stab}(\overline{I})$. L'énoncé suivant dont la preuve est calculatoire (cf. [I], prop. 3.2) permet alors de conclure. □

Proposition 3.2. Le groupe G_d est un complément de $J_n(A)$ dans $J_n(\widetilde{A})$.

Prenons maintenant $N = 2$, de sorte que $S_n = \mathbb{C}[X, Y]/(X, Y)^{n+1}$.

Quel que soit l'entier $k \geq 1$, nous exhibons en [I], th. 6.1 un entier $n \geq k$ et un idéal I de S_n tel que $\mathrm{Stab}(I) \leq \{f \in J_n(\widetilde{A}),\ J_k f = \mathrm{id}\}$.

Par exemple, si $k = 2$, nous montrons que l'idéal I de S_{23} engendré par $X^{21} - Y^{22}$ et $(X - \alpha Y)^{21}$, $\alpha \in \{1, 2, 3, 5\}$ vérifie $\mathrm{Stab}(I) \leq \{f \in J_{23}(\widetilde{A}),\ J_2 f = \mathrm{id}\}$.

Par conséquent, le gros point $\mathrm{Spec}\, S_{23}/I$ n'est pas uniplongeable dans $\mathbb{A}^2$.

Notre vérification de l'inclusion $\mathrm{Stab}(I) \leq \{f \in J_n(\widetilde{A}),\ J_k f = \mathrm{id}\}$ s'appuie sur quelques résultats intéressants en eux-mêmes (cf. [I], prop. 5.1, lemmes 5.3 et 5.4) :

Proposition 3.3. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ des nombres complexes distincts et $w_1, \ldots, w_m$ des entiers strictement positifs. Si l'on pose $w := w_1 + \cdots + w_m$, alors la famile $(T + \lambda_i)^{w-j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq w_i$ est une base de l'espace des polynômes de degré $< w$.

Proposition 3.4. Il existe une partie infinie de $\mathbb{N}$ dont chaque sous-partie de cardinal au moins 5 est telle que l'identité est la seule homographie de $\mathbb{P}^1$ la fixant globalement.

4. Le degré de l'inverse d'un automorphisme.

4.1. Introduction.

La conjecture Jacobienne affirme qu'un endomorphisme polynomial d'un espace affine complexe est un automorphisme si et seulement si son Jacobien est une constante non nulle. En se restreignant aux endomorphismes de $\mathbb{A}^N$ de degré $\leq d$, on obtient un énoncé connu sous le nom de conjecture Jacobienne en dimension N et degré $\leq d$. Désignons par $\mathrm{CJ}(N, d)$ cette conjecture restreinte.

Soit $c(N, d) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la plus petite constante telle que pour toute algèbre complexe K et tout automorphisme f de $\mathbb{A}^N_K$, on ait :

$$\mathrm{Jac}\, f = 1 \text{ et } \deg f \leq d \Longrightarrow \deg f^{-1} \leq c(N, d).$$

L'étude du degré de l'inverse d'un automorphisme est motivée par le résultat suivant :

Proposition (Bass-Connell-Wright, 1983). CJ(N,d) est vraie si et seulement si $c(N,d) < \infty$.

L'implication directe est montrée dans [5] (cf. chap. I, prop. 1.2) et la réciproque dans [6]. Notons que l'article [16] fournit une preuve très courte de la réciproque.

Remarque. On ne peut espérer majorer le degré de f^{-1} en omettant la condition portant sur le Jacobien. En effet, pour tous $d, d' \geq 2$, on peut construire une algèbre complexe K et un automorphisme f de $\mathbb{A}^1_K$ satisfaisant $\deg f = d$ et $\deg f^{-1} = d'$ (cf. [B], lemme 1). Par contre, on ne change pas la valeur de $c(N,d)$ en remplaçant la condition $\operatorname{Jac} f = 1$ par la condition plus restrictive que f soit tangent à l'identité à l'ordre 1.

4.2. La variété $J_{N,d}$ et son élément générique $f_{N,d}$.

Définissons "l'endomorphisme générique de l'espace affine complexe $\mathbb{A}^N$ de Jacobien 1 et de degré $\leq d$ " (d'après [5]). Soit $\mathcal{E}_{N,d}$ la variété des endomorphismes polynomiaux de $\mathbb{A}^N$ de degré $\leq d$. Le sous-ensemble $J_{N,d}$ des endomorphismes de Jacobien 1 est naturellement un sous-schéma fermé de $\mathcal{E}_{N,d}$. Soit $\mathcal{O}(J_{N,d})$ l'algèbre des fonctions régulières sur $J_{N,d}$. L'application identité de $\mathcal{O}(J_{N,d})$ s'interprète comme un endomorphisme $f_{N,d}$ de l'espace affine $\mathbb{A}^N_{\mathcal{O}(J_{N,d})}$ de Jacobien 1 et de degré $\leq d$ (i.e. un point de $J_{N,d}$ à valeurs dans l'algèbre $\mathcal{O}(J_{N,d})$). Nous dirons que c'est l'endomorphisme générique de $\mathbb{A}^N$ de Jacobien 1 et de degré $\leq d$ ou que c'est l'élément générique de $J_{N,d}$. Cette terminologie est justifiée car tout endomorphisme de $\mathbb{A}^N$ de Jacobien 1 et de degré $\leq d$ s'obtient par spécialisation de $f_{N,d}$.

Décrivons plus concrètement $f_{N,d}$ (toujours d'après [5]). Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des monômes de degré $\leq d$ en les indéterminées $X_1, \dots, X_N$. L'algèbre $\mathcal{O}(\mathcal{E}_{N,d})$ s'identifie à l'algèbre A des polynômes en les indéterminées $c_{i,M}$ $(1 \leq i \leq N\,;\ M \in \mathcal{M})$. Posons $f = (f_1, \dots, f_N)$, où $f_i = \sum_{M \in \mathcal{M}} c_{i,M} M \in A[X_1, \dots, X_N]$. Soit I l'idéal de A engendré par les coefficients de $\operatorname{Jac} f - 1$ vu comme un polynôme en $X_1, \dots, X_N$. Si l'on pose $B = A/I$, l'endomorphisme générique $f_{N,d}$ s'identifie à $B \otimes_A f$ et l'algèbre $\mathcal{O}(J_{N,d})$ à B.

D'après [6] :

Lemme (Bass, 1983). Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) CJ(N,d) est satisfaite ; (ii) l'endomorphisme $f_{N,d}$ est un automorphisme.

En outre, si c'est le cas, on a $c(N,d) = \deg (f_{N,d})^{-1}$.

4.3. Quelques estimations du degré de l'inverse.

Au paragraphe 4.3.a, nous donnons un contre-exemple à l'égalité optimiste $c(N,d) = d^{N-1}$ (suggérée par la formule de Gabber). Dès lors, il semble intéressant d'estimer $c(N,d)$. Au paragraphe 4.3.b, nous donnons quelques valeurs exactes, tandis qu'au paragraphe 4.3.c nous majorons $c(N,d)$ quand CJ(N,d) est satisfaite.

4.3.a. Un contre-exemple.

Si K est un corps et f un automorphisme de $\mathbb{A}^N_K$, on a $\deg f^{-1} \leq (\deg f)^{N-1}$ par le théorème de Gabber. Une argumentation classique montre que cette inégalité demeure si K est une algèbre réduite (cf. [6, 13]). De plus, elle est optimale car pour $N, d \geq 1$ on peut construire un automorphisme triangulaire de $\mathbb{A}^N$ de degré $\leq d$ dont le degré de l'inverse vaut d^{N-1}. Dès lors, il est tentant de se demander si $c(N, d) = d^{N-1}$ (cf. [20], question 2.19). Nous répondons négativement à cette espérance dans l'article [B] :

Proposition 4.1. Soit $N = 2$ et $d \geq 3$. Si $K = \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$, alors l'automorphisme suivant de $\mathbb{A}^2_K$ vérifie $\operatorname{Jac} f = 1$, $\deg f = d$ et $\deg f^{-1} = d + 1$.

$$f = (\,(1 - d\varepsilon Y^{d-1})X + Y^2,\; Y + \varepsilon Y^d).$$

Notons que l'automorphisme exhibé est triangulaire généralisé (i.e. sa deuxième composante ne dépend que de Y). L'énoncé suivant (cf. [B], prop. 3) limite la portée de cet exemple en majorant le degré de l'inverse d'un automorphisme triangulaire généralisé du plan.

Proposition 4.2. Si K est une algèbre complexe et f un automorphisme triangulaire généralisé de Jacobien 1 de $\mathbb{A}^2_K$, on a $\deg f^{-1} \leq 4\,(\deg f)^4$.

Par un résultat de Moh (cf. [46]), $\mathrm{CJ}(2, d)$ est satisfaite pour $d \leq 100$. La proposition 4.1 montre donc que l'algèbre $\mathcal{O}(J_{2,\,d})$ n'est pas réduite pour $3 \leq d \leq 100$, i.e. :

Proposition 4.3. Le schéma $J_{2,\,d}$ n'est pas réduit pour $3 \leq d \leq 100$.

4.3.b. Quelques valeurs exactes $c(N, d)$.

Par un résultat de Wang, on sait que $\mathrm{CJ}(N, 2)$ est satisfaite quel que soit N. La preuve originale figure dans [70] et celle d'Oda (beaucoup plus courte) dans [50, 72, 5]. Dès lors, on a $c(N, 2) < +\infty$. Cependant, pour $N \geq 4$, nous ne connaissons pas encore de majorant complètement explicite de $c(N, 2)$ (toutefois, cf. la proposition 4.6 ci-dessous). Montrons maintenant que $c(2, 2) = 2$ et $c(3, 2) = 6$.

L'égalité $c(2, 2) = 2$ provient de l'énoncé suivant (cf. [B], th. 2) :

Lemme 4.1. Soit K une algèbre complexe. Si h est un endomorphisme homogène de degré ≥ 2 de $\mathbb{A}^2_K$ et si $f = \mathrm{id} + h$ est un endomorphisme de $\mathbb{A}^2_K$ dont le Jacobien vaut 1, alors f est inversible et $f^{-1} = \mathrm{id} - h$.

Preuve. Un calcul simple montre que la dérivation $D = h_1 \partial_X + h_2 \partial_Y$ vérifie $D^2 X = D^2 Y = 0$. Dès lors, D est localement nilpotente. L'égalité $f = \exp D$ montre que f est un automorphisme d'inverse $f^{-1} = \exp(-D)$. $\square$

Montrons maintenant l'égalité $c(3, 2) = 6$. Le lemme suivant (bien connu quand $K = \mathbb{C}$) m'a été signalé par A. van den Essen (cf. [B], lemme 6) :

Lemme 4.2. Soit K une algèbre complexe. Si h est un endomorphisme homogène de degré ≥ 2 de $\mathbb{A}_K^N$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Jac}(\mathrm{id}+h)=1$; (ii) la matrice Jacobienne de h satisfait $(J_h)^N=0$.

L'inégalité $c(3,2)\leq 6$ vient donc de l'énoncé suivant (la preuve donnée dans [45] pour $K=\mathbb{C}$ s'applique sans modification) :

Théorème (Meisters-Olech, 1991). Soit K une algèbre complexe. Si q est un endomorphisme 2-homogène de $\mathbb{A}_K^N$ dont la matrice Jacobienne J_q satisfait $(J_q)^3=0$, alors $f=\mathrm{id}+q$ est un automorphisme d'inverse

$$f^{-1}(X)=X-q(X)+J_q(X).q(X)-q\big(q(X)\big)+\tfrac{1}{2}J_q\big(q(X)\big)^2.X-\tfrac{1}{2}J_q\big(q(X)\big)^2.q(X).$$

Enfin, l'égalité $c(3,2)=6$ découle de la proposition suivante (cf. [B], prop. 6) :

Proposition 4.4. Soit $K=\mathbb{C}[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]/(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2,\varepsilon_1^3+\varepsilon_2^3+\varepsilon_3^3)$ et $q=(2\varepsilon_1X_1X_3-X_2^2,2\varepsilon_2X_2X_3-X_3^2,\varepsilon_3X_3^2)$, alors $f=\mathrm{id}+q$ est un automorphisme de $\mathbb{A}_K^3$ de Jacobien 1 dont l'inverse est de degré 6.

Nous répondons ainsi négativement à la question suivante de Meisters et Olech :

A-t-on nécessairement $\deg f^{-1}\leq 4$ dans le théorème précédent ?

En effet, l'automorphisme de l'espace affine de dimension 3 sur une algèbre de dimension 6 exhibé dans la proposition 4.4 permet de construire un automorphisme de l'espace affine complexe de dimension $3\times 6=18$ satisfaisant les hypothèses du théorème et dont le degré de l'inverse vaut 6 (cf. la remarque p. 291 de [B] pour les détails).

Dans l'article [C], avec M. Fournié et D. Pinchon, nous montrons l'égalité suivante :

Proposition 4.5. $c(2,3)=9$.

Preuve. Il suffit de montrer que l'endomorphisme générique $f_{2,3}$ est un automorphisme dont l'inverse est de degré 9. Nous avons effectué les calculs par ordinateur. □

4.3.c. Majoration de $c(N,d)$ dans le cas où $\mathrm{CJ}(N,d)$ est satisfaite.

Finissons par l'énoncé que voici :

Proposition 4.6. Il existe une fonction explicite $u(N,d)$ telle que les assertions suivantes soient équivalentes :

(i) $\mathrm{CJ}(N,d)$ est satisfaite ; (ii) $c(N,d)\leq u(N,d)$.

La définition de la fonction $u(N,d)$ est basée sur deux résultats d'effectivité. Le premier figure au §65 de l'article [58]. Si I est un idéal, désignons par $\sqrt{I}$ son radical, i.e. l'ensemble des éléments de l'anneau dont une certaine puissance appartient à I. Rappelons aussi que le nilradical d'un anneau est le radical de l'idéal nul.

Proposition (Seidenberg, 1974). On peut définir explicitement (mais récursivement) une fonction $e(n,d)$ telle que pour tout idéal I de $\mathbb{C}[Z_1,\ldots,Z_n]$ engendré par des éléments de degré $\le d$, on ait

$$(\sqrt{I})^{e(n,d)+1} \subseteq I.$$

Remarque. Une lecture attentive de l'article de Seidenberg permettrait de définir explicitement la fonction $e(n,d)$. En effet, l'auteur déclare à la page 275 : "In every case, formulae giving the bounding functions are written down (or sufficient indications are given for doing so)".

Le deuxième résultat est la proposition 2.8 de l'article [6] :

Proposition (Bass, 1983). Pour toute algèbre complexe K dont le nilradical $\mathfrak{n}$ satisfait $\mathfrak{n}^{e+1} = 0$ et pour tout automorphisme f de $\mathbb{A}^N_K$, on a :

$$\operatorname{Jac} f = 1 \text{ et } \deg f \le d \Longrightarrow \deg f^{-1} \le d^{N.2^e - 1}.$$

Preuve de la proposition 4.6. Si $\mathrm{CJ}(N,d)$ est satisfaite, on a $c(N,d) = \deg\,(f_{N,d})^{-1}$.

L'ensemble des monômes de degré $\le d$ en les indéterminées $X_1,\ldots,X_N$ a pour cardinal $\binom{N+d}{N}$. Posons $n := N\binom{N+d}{N}$. D'après la section 4.2, $\mathcal{O}(J_{N,\,d})$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes $\mathbb{C}[Z_1,\ldots,Z_n]$ quotientée par un idéal I engendré par des éléments de degrés $\le N$. Si l'on pose $v(N,d) := e\left(N\binom{N+d}{N},\, N\right)$, on a donc $(\sqrt{I})^{v(N,d)+1} \subseteq I$ et le nilradical $\mathfrak{n}$ de l'algèbre $\mathcal{O}(J_{N,\,d})$ satisfait $\mathfrak{n}^{v(N,d)+1} = 0$.

En appliquant la proposition précédente de Bass à l'automorphisme $f_{N,\,d}$ de $\mathbb{A}^N_{\mathcal{O}(J_{N,\,d})}$, on obtient $c(N,d) = \deg\,(f_{N,\,d})^{-1} \;\le\; d^{N.2^{v(N,d)}-1}$.

Par conséquent, si l'on pose $u(N,d) := d^{N.2^{v(N,d)}-1}$, les assertions (i) et (ii) sont bien équivalentes. $\square$

Références

[1] S.S. Abhyankar, T.T. Moh, Embeddings of the line in the plane, J. Reine Angew. Math. 276 (1975), 148-166.

[2] E. Andersén, Volume-preserving automorphisms of $\mathbb{C}^n$, Complex Variables Theory Appl. 14, n° 1-4 (1990), 223-235.

[3] E. Andersén, L. Lempert, On the group of holomorphic automorphisms of $\mathbb{C}^n$, Invent. Math. 110, n° 2 (1992), 371-388.

[4] D. J. Anick, Limits of tame automorphisms of $k[x_1, \dots, x_N]$, J. of Algebra 82 (1983), 459-468.

[5] H. Bass, E. Connell, D. Wright, The Jacobian conjecture : reduction of degree and formal expansion of the inverse, Bull. of the A.M.S. 7 (1982), 287-330.

[6] H. Bass, The Jacobian conjecture and inverse degrees, Arithmetic and Geometry, vol. II, Prog. Math. vol. 36, Birkhäuser, Boston, MA (1983), 65-75.

[7] H. Bass, Automorphisms of polynomial rings, Abelian group theory (Honolulu, Hawaii, 1983), 762-771, Lecture Notes in Math., 1006, Springer, Berlin, 1983.

[8] H. Bass, A nontriangular action of G_a on A^3, J. of Pure and Applied Algebra 33 (1984), no. 1, 1-5.

[9] M. de Bondt, Quasi-translations and counterexamples to the homogeneous dependence problem, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), 2849-2856.

[10] G. E. Bredon, Introduction to compact transformation groups, Pure and Applied Mathematics, vol. 46, Academic Press, New York-London, 1972.

[11] G. Buzzard, J. E. Fornæss, An embedding of $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}^2$ with hyperbolic complement, Math. Ann. 306 (1996), no. 3, 539-546.

[12] L. Cerlienco, M. Mignotte, F. Piras, Suites récurrentes linéaires, propriétés algébriques et arithmétiques, L'Enseignement Mathématique 33 (1987), 67-108.

[13] C.C.-A. Cheng, S.S.-S. Wang , J.-T. Yu, Degree bounds for inverses of polynomial automorphisms, Proc. of the Amer. Math. Soc. 120, n° 3 (1994), 705-707.

[14] P. M. Cohn, On the structure of the GL_2 of a ring, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. no. 30 (1966), 5-53.

[15] P. M. Cohn, Free rings and their relations (2nd edition), London Mathematical Society Monographs, 19. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London, 1985.

[16] H. Derksen, Inverse degrees and the Jacobian conjecture, Comm. in Algebra 22, n° 12 (1994), 4793-4794.

[17] V. Drensky, V. Shpilrain, J-T Yu, On the density of the set of generators of a polynomial algebra, Proc. of the Amer. Math. Soc. 128, n° 12 (2000), 3465-3469.

[18] E. Edo, S. Vénéreau, Length 2 variables and transfer, Ann. Pol. Math 76 (2001), 67-76.

[19] D. Eisenbud, Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics 150, Springer-Verlag, New York, 1995.

[20] A. van den Essen, Polynomial maps and the Jacobian conjecture, computational aspects of Lie group representations and related topics, Proc. of the Computational Algebra Seminar 190, CWI Tract, vol. 84 (1991), 29-44.

[21] A. van den Essen, Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture, Progress in Math. (Boston Mass.) 190, Birkhäuser, Basel, 2000.

[22] F. Forstneric, J. Globevnik, J.-P. Rosay, Non straightenable complex lines in $\mathbb{C}^2$, Ark. Mat. 34 (1996), 97-101.

[23] G. Freudenburg, Algebraic theory of locally nilpotent derivations. Encyclopaedia of Mathematical Sciences 136. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, VII. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[24] S. Friedland, J. Milnor, Dynamical properties of plane polynomial automorphisms, Ergod. Th & Dyn. Syst. 9 (1989), 67-99.

[25] A. Grothendieck, J. Dieudonné, Eléments de géométrie algébrique, II Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes, Publ. Math. IHES 8 (1961).

[26] R. Hartshorne, Algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[27] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups (2nd ed.), Graduate texts in Mathematics 21, Springer Verlag, 1981.

[28] Z. Jelonek, The extension of regular and rational embeddings, Math. Ann. 277 (1987), 113-120.

[29] H. W. E. Jung, Über ganze birationale Transformationen der Ebene, J. Reine Angew. Math. 184 (1942), 161-174.

[30] S. Kaliman, Extensions of isomorphisms between affine algebraic subvarieties of k^n to automorphisms of k^n, Proc. Amer. Math. Soc. 113 (1991), no. 2, 325-334.

[31] S. Kaliman, M. Koras, L. Makar-Limanov, P. Russell, $\mathbb{C}^*$-actions on $\mathbb{C}^3$ are linearizable (English summary), Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 3 (1997), 63-71 (electronic).

[32] T. Kambayashi, Automorphism group of a polynomial ring and algebraic group action on an affine space, J. Algebra 60 (1979), no. 2, 439-451.

[33] T. Kambayashi, Pro-affine algebras, ind-affine groups and the Jacobian problem. J. Algebra 185 (1996), no. 2, 481-501.

[34] T. Kambayashi, Some basic results on pro-affine algebras and ind-affine schemes, Osaka J. Math. 40 (2003), no. 3, 621-638.

[35] O. H. Keller, Ganze Cremona Transformationen, Monats. Math. Physk 47 (1939), 299-306.

[36] F. Knop, Nichtlinearisierbare Operationen halbeinfacher Gruppen aud affinen Raümen, Invent. Math. 105, n°1 (1991), 217-220.

[37] H. Kraft, V. L. Popov, Semisimple group actions on the three-dimensional affine space are linear, Comment. Math. Helv. 60 (1985), no. 3, 466-479.

[38] H. Kraft, G. Schwarz, Finite automorphisms of affine N-space (English summary), Automorphisms of affine spaces (Curaçao, 1994), 55-66, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.

[39] H. Kraft, Challenging problems on affine n-space (English summary), Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95. Astérisque No. 237 (1996), Exp. No. 802, 5, 295-317.

[40] W. van der Kulk, On polynomial rings in two variables, Nieuw. Arch. Wisk. (3) 1 (1953), 33-41.

[41] C. Lech, A note on recurring series, Arkiv for Matematik 2 (1953), 417-421.

[42] L. Makar-Limanov, Locally nilpotent derivations, a new ring invariant and applications, Lecture notes (1998), available at http ://www.math.wayne.edu/∼lml

[43] M. Masuda, T. Petrie, Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups : theory. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 88 (1991), no. 20, 9061-9064.

[44] M. Masuda, L. Moser-Jauslin, T. Petrie, Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups : applications. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 88 (1991), no. 20, 9065-9066.

[45] G. Meisters and C. Olech, Strong nilpotence holds in dimensions up to five only, Linear and Multilinear Algebra, vol. 30 (1991), 231-255.

[46] T.T. Moh, On the global Jacobian conjecture and the configuration of roots, J. Reine Angew. Math. 340 (1983), 140-212.

[47] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, Geometric invariant theory (3rd ed.), Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)], 34. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[48] D. Mumford, The red book of varieties and schemes (2nd, expanded ed.), Lecture Notes in Math. 1358. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[49] M. Nagata, On automorphism group of $k[x, y]$, Lecture Notes in Math., Kyoto Univ., 5, (1972).

[50] S. Oda, The Jacobian problem and the simply-connectedness of A^n over a field k of characteristic zero, Osaka Univ., preprint, 1980.

[51] D.I. Panyushev, Semisimple groups of automorphisms of a four-dimensional affine space (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 47 (1983), no. 4, 881-894.

[52] D.I. Panyushev, A correction to my paper : "Semisimple groups of automorphisms of a four-dimensional affine space" (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 49 (1985), no. 6, 1336-1337.

[53] T. Petrie, J. D. Randall, Finite-order algebraic automorphisms of affine varieties, Comment. Math. Helv. 61 (1986), no. 2, 203-221.

[54] R. Rentschler, Opérations du groupe additif sur le plan affine (French), C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 267 (1968), A384-A387.

[55] P. Russell, A. Sathaye, On finding and cancelling variables in $k[X,Y,Z]$, J. Algebra 57 (1979), no. 1, 151-166.

[56] A. Sathaye, On linear planes, Proc. Amer. Math. Soc. 56 (1976), 1-7.

[57] G. Schwarz, Exotic algebraic group actions, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 309, n°2 (1989), 89-94.

[58] A. Seidenberg, Constructions in algebra, Trans. Amer. Math. Soc. 197 (1974), 273-313.

[59] I. R. Shafarevich, On some infinite-dimensional groups, Rend. Mat. e Appl. (5) 25 (1966), no. 1-2, 208-212.

[60] I. R. Shafarevich, On some infinite-dimensional groups II, Math. USSR Izv. 18 (1982), 214-226.

[61] I. R. Shafarevich, Letter to the editors : "On some infinite-dimensional groups. II", (Russian) Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 59 (1995), no. 3, 224.

[62] I. P. Shestakov, U. U. Umirbaev, Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials, J. Amer. Math. Soc 17 (2004), 181-196.

[63] I. P. Shestakov, U. U. Umirbaev, The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables, J. Amer. Math. Soc 17 (2004), 197-227.

[64] T. N. Shorey, R. Tijdeman, Exponential diophantine equations, Cambridge Tracts in Mathematics 87, Cambridge University Press.

[65] P. A. Smith, Fixed-point theorems for periodic transformations, Amer. J. Math, vol. 63, no. 1 (1941), 1-8.

[66] M. K. Smith, Stably tame automorphisms, J. of Pure and Applied Algebra 58 (1989), 209-212.

[67] V. Srinivas, On the embedding dimension of an affine variety, Math. Ann. 289 (1991), 125-132.

[68] M. Suzuki, Propriétés topologiques des polynômes de deux variables complexes et automorphismes algébriques de l'espace C^2, J. Math. Soc. Japan. 26 (1974), 241-257.

[69] B. L. van der Waerden, Die Alternative bei nichtlinearen Gleichungen. Nachr. Gesellsch. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse (1928), 77-87.

[70] S. Wang, A Jacobian criterion for separability, J. Algebra 65 (1980), 453-494.

[71] D. Wright, Abelian subgroups of $\mathrm{Aut}_k(k[X,Y])$ and applications to actions on the affine plane, Illinois J. Math. 23.4 (1979), 579-634.

[72] D. Wright, On the Jacobian conjecture, Illinois J. Math. 25 (1981), 423-440.

[73] M. G. Zaidenberg, V. Y. Lin, An irreducible, simply connected algebraic curve in $\mathbb{C}^2$ is equivalent to a quasihomogeneous curve (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 271 (1983), no. 5, 1048-1052.