

Systèmes dynamiques dans les espaces homogènes

Jean-François Quint

Ecole Normale Supérieure, février 2012

Table des matières

1	Théorie ergodique	5
1.1	Systèmes dynamiques mesurés	5
1.2	Théorème de récurrence de Poincaré	6
1.3	Théorème ergodique de Birkhoff	7
1.4	Théorème ergodique de Von Neumann	10
1.5	Inégalité maximale	11
1.6	Ergodicité	15
1.7	Mélange	16
1.8	Exercices	20
1.8.1	Ensembles invariants	20
1.8.2	Translations des tores	21
1.8.3	Endomorphismes des tores	21
2	Systèmes dynamiques topologiques	23
2.1	Mesures invariantes	23
2.2	Unique ergodicité	26
2.3	Transitivité, mélange	27
2.4	Minimalité	29
2.5	Exercices	31
2.5.1	Minimalité et compacité	31
2.5.2	Codage	31
2.5.3	Suite de Morse	32
2.5.4	Obstructions à l'équidistribution	33
2.5.5	Mélange topologique	33
3	Groupes topologiques et réseaux	35
3.1	Groupes topologiques	35
3.2	Mesure de Haar	38

3.3	Réseaux	47
3.4	Exercices	49
3.4.1	Sous-groupes connexes, sous-groupes ouverts	49
3.4.2	Groupes compacts	49
3.4.3	Limites projectives	50
3.4.4	Systèmes de Kronecker	51
3.4.5	Groupes topologiquement cycliques	51
3.4.6	Dynamique des isométries	51
3.4.7	Sous-groupes de \mathbb{R}^d	52
3.4.8	Réseaux dans les sous-groupes	52
3.4.9	Réseaux et sous-groupes distingués	53
3.4.10	Réseaux des groupes nilpotents	53
3.4.11	Réseaux dans les produits semi-directs	54

Chapitre 1

Théorie ergodique

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux propriétés générales des systèmes dynamiques mesurés, c'est-à-dire que nous considérons des espaces probabilisés munis d'une transformation mesurable qui préserve la mesure. Nous verrons en particulier que dans ce cadre général, on peut obtenir un résultat puissant sur le comportement asymptotique des orbites : le théorème de Birkhoff.

1.1 Systèmes dynamiques mesurés

Définition 1.1.1. Un système dynamique mesuré est un quadruplet (X, \mathcal{A}, μ, T) où (X, \mathcal{A}, μ) est un espace mesuré de probabilité et $T : X \rightarrow X$ est une application \mathcal{A} -mesurable qui préserve la mesure μ , c'est-à-dire que, pour tout A dans \mathcal{A} , on a $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$.

Rappelons qu'un espace mesuré est un triplet (X, \mathcal{A}, μ) où X est un ensemble, \mathcal{A} une tribu (ou σ -algèbre) de parties de X et μ est une mesure sur (X, \mathcal{A}) . On dit que μ est une mesure de probabilité si $\mu(X) = 1$. Enfin, l'hypothèse que T est mesurable signifie que, pour tout A dans \mathcal{A} , l'ensemble $T^{-1}A$ appartient encore à \mathcal{A} .

Exemple 1.1.2. Si X est un ensemble fini, muni de la tribu totale et de la mesure de comptage normalisée, toute permutation de X induit un système dynamique mesuré – mais ce n'est pas très intéressant !

Exemple 1.1.3. Pour tout entier $d \geq 1$, soit $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ le tore de dimension d , muni de la topologie quotient. Munissons cet espace de sa tribu borélienne

et de la mesure qui y est induite par la restriction de la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^d au cube $[0, 1]^d$ – que nous appelons mesure de Lebesgue de \mathbb{T}^d . Alors, pour tout x dans \mathbb{R}^d , la transformation $t \mapsto x + t$ de \mathbb{T}^d préserve la mesure.

Exemple 1.1.4. Soit A un élément de $\text{GL}_d(\mathbb{R})$ à coefficients entiers. Alors la transformation $t \mapsto At$ de \mathbb{T}^d préserve la mesure.

Exemple 1.1.5. Pour tout x dans \mathbb{R} , soit $[x]$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier relatif $\leq x$ et $\{x\} = x - [x] \in [0, 1[$ sa partie fractionnaire. La transformation borélienne $x \mapsto \{\frac{1}{x}\}$ de l'intervalle $[0, 1[$ (avec la convention $\{\frac{1}{0}\} = 0$) préserve la mesure finie $\frac{dx}{1+x}$.

Exemple 1.1.6. Soient M une variété compacte orientable et ω une forme volume sur M . Si X est un champ de vecteurs lisse sur X dont la divergence pour la forme ω est nulle, le flot de X préserve la mesure associée à la forme ω .

L'intérêt de la définition que nous avons donnée d'un système dynamique mesuré est qu'elle entraîne des propriétés générales de comportement des orbites que nous allons à présent décrire.

1.2 Théorème de récurrence de Poincaré

La première de ces propriétés est un phénomène de retour des trajectoires.

Théorème 1.2.1 (Poincaré, 1890). *Soient (X, \mathcal{A}, μ, T) , un système dynamique mesuré et A dans \mathcal{A} avec $\mu(A) > 0$. Alors, pour μ -presque tout x dans A , il existe une infinité d'entiers n tels que $T^n x \in A$.*

Rappelons que l'expression « pour μ -presque tout x » signifie que l'ensemble des points qui ne vérifient pas la propriété est de mesure 0 pour μ .

Le théorème signifie qu'une trajectoire issue de A reviendra infiniment souvent dans cet ensemble. Notons que le théorème de récurrence de Poincaré peut être vu comme une conséquence du théorème ergodique de Birkhoff ci-après. Nous en donnons quand-même la démonstration directe car elle est très simple et illustre bien l'interaction entre les idées dynamiques et la théorie de la mesure.

Démonstration. Commençons d'abord par montrer que presque tout point de A revient au moins une fois dans A . Introduisons l'ensemble B des points de

A qui n'y reviennent jamais, c'est-à-dire posons

$$B = A \cap \bigcap_{n \geq 1} T^{-n} A^c.$$

Il s'agit de montrer que $\mu(B) = 0$. Or, par construction, pour tout $n \geq 1$, on a $T^{-n}B \subset A^c$ et donc $T^{-n}B \cap B = \emptyset$. Il vient, pour tous entiers $n < p$,

$$T^{-n}B \cap T^{-p}B = T^{-n}(B \cap T^{-(p-n)}B) = \emptyset$$

et donc

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}B \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(T^{-n}B).$$

Or, comme μ est invariante par T , pour tout n , $\mu(T^{-n}B) = \mu(B)$. Comme μ est finie, on a nécessairement $\mu(B) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour conclure, on observe que ce raisonnement s'applique aussi aux transformations T^n , $n \geq 1$, qui préservent la mesure μ . Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, pour μ -presque tout x de A , il existe $k \geq 1$ tel que $T^{kn}x$ appartienne à A , en particulier, la trajectoire de x visite A après le temps n , ce qu'il fallait démontrer. \square

Remarque 1.2.2. L'intérêt de ce résultat est souvent d'ordre abstrait : même si l'ensemble des points qui ne vérifient pas une propriété est de mesure 0, il n'est pas toujours facile d'en exhiber un explicitement.

Exemple 1.2.3. La transformation $n \mapsto n + 1$ de \mathbb{Z} ne préserve pas de mesure de probabilité définie sur l'ensemble de toutes les parties de \mathbb{Z} .

1.3 Théorème ergodique de Birkhoff

Nous allons maintenant préciser la conclusion du théorème de récurrence de Poincaré en montrant que les points de A reviennent dans A avec une certaine fréquence.

Théorème 1.3.1 (Birkhoff, 1931). *Soient (X, \mathcal{A}, μ, T) , un système dynamique mesuré et φ un élément de $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Il existe un élément T -invariant $\bar{\varphi}$ de $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ tel que, pour μ -presque tout x dans X , on ait*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \bar{\varphi}(x)$$

et cette convergence a aussi lieu dans $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Enfin, si, pour un certain p dans $[1, \infty[$, φ appartient à $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, alors $\bar{\varphi}$ appartient à $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ et la convergence a lieu dans $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Remarque 1.3.2. Nous verrons ci-dessous que, si A est un élément de \mathcal{A} avec $\mu(A) > 0$, et si $\varphi = \mathbf{1}_A$, pour μ -presque tout x dans A , on a $\bar{\varphi}(x) > 0$. Ainsi, l'orbite des points de A visite-t-elle A avec une fréquence > 0 .

Remarque 1.3.3. Du fait que T préserve la mesure μ , pour tout p dans $[1, \infty]$, l'opérateur $\varphi \mapsto \varphi \circ T$ est une isométrie de l'espace de Banach $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Donnons une illustration de ce fait en montrant comment, dans le théorème de Birkhoff, la convergence dans $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $p \in [1, \infty[$, se déduit aisément de la convergence dans $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ et de raisonnements simples d'analyse fonctionnelle. En effet, posons, pour $n \geq 1$, $S_n\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ T^k$ et $T_n\varphi = \frac{1}{n}S_n\varphi$. Pour tout p dans $[1, \infty]$, si φ appartient à $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, on a $\|T_n\varphi\|_p \leq \|\varphi\|_p$.

Supposons alors que $p < \infty$ et que la suite $(T_n\varphi)_{n \geq 1}$ converge dans $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ et montrons qu'elle converge aussi dans $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$: il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $M \geq 0$ et posons $\varphi_M = \varphi \mathbf{1}_{|\varphi| \leq M}$. Si M est suffisamment grand, on a $\|\varphi - \varphi_M\|_p \leq \varepsilon$. Pour tous entiers $n, m \geq 1$, il vient alors

$$\begin{aligned} \|(T_n - T_m)\varphi\|_p &\leq \|(T_n - T_m)(\varphi - \varphi_M)\|_p + \|(T_n - T_m)\varphi_M\|_p \\ &\leq \varepsilon + \|(T_n - T_m)\varphi_M\|_{\infty}^{\frac{p-1}{p}} \|(T_n - T_m)\varphi_M\|_1^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \varepsilon + M^{\frac{p-1}{p}} \|(T_n - T_m)\varphi_M\|_1^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

et donc, si n et m sont suffisamment grands, $\|(T_n - T_m)\varphi\|_p \leq 2\varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

La démonstration du théorème de Birkhoff occupera les deux prochaines sections.

Avant d'y procéder, décrivons plus précisément la fonction $\bar{\varphi}$.

Rappelons la définition de l'espérance conditionnelle. Si (X, \mathcal{A}, μ) est un espace de probabilité et si \mathcal{B} est une sous-tribu de \mathcal{A} , notons encore μ la restriction de la mesure μ à la tribu \mathcal{B} . Alors, si φ est une fonction \mathcal{A} -mesurable de X dans \mathbb{R}_+ (resp. un élément de $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$), l'application $B \mapsto \int_B \varphi d\mu$ est une mesure σ -finie (resp. une mesure complexe) sur (X, \mathcal{B}) et cette mesure est absolument continue par rapport à μ . Il résulte du théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym qu'il existe une fonction \mathcal{B} -mesurable de X

dans \mathbb{R}_+ (resp. un élément de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$) tel que, pour tout B dans \mathcal{B} , on ait $\int_B \varphi d\mu = \int_B \psi d\mu$.

Définition 1.3.4. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace de probabilité et \mathcal{B} une sous-tribu de \mathcal{A} . Si φ est une fonction \mathcal{A} -mesurable de X dans \mathbb{R}_+ (resp. un élément de $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$), on appelle espérance conditionnelle de φ par rapport à \mathcal{B} et on note $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})$ l'unique fonction \mathcal{B} -mesurable de X dans \mathbb{R}_+ (resp. l'unique élément de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$) telle que, pour tout B dans \mathcal{B} , on ait

$$\int_B \varphi d\mu = \int_B \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B}) d\mu.$$

On note parfois $\mathbb{E}_\mu(\cdot|\mathcal{B})$ quand on veut rappeler la dépendance en μ . Si φ est la fonction caractéristique d'un ensemble A de \mathcal{A} , on note souvent $\mathbb{E}(A|\mathcal{B})$ pour $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})$.

On vérifie aisément qu'on a $|\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})| \leq \mathbb{E}(|\varphi|\mathcal{B})$ et que, si φ est ≥ 0 , $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})$ est ≥ 0 .

Exemple 1.3.5. Soit B un élément de \mathcal{A} avec $\mu(B) > 0$ et supposons que \mathcal{B} est la tribu $\{B, B^c, \emptyset, X\}$. Alors, pour A dans \mathcal{A} , $\mathbb{E}(A|\mathcal{B})$ est constante sur l'ensemble B , de valeur $\frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$.

Exemple 1.3.6. Si X est l'espace $[0, 1]^2$ muni de la restriction de la mesure de Lebesgue et \mathcal{B} est la tribu des ensembles de la forme $B \times [0, 1]$, où B est une partie borélienne de $[0, 1]$, si φ est une fonction intégrable sur X , alors, pour presque tout (x, y) de X , on a

$$\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})(x, y) = \int_0^1 \varphi(x, z) dz$$

(cette intégrale existant d'après le théorème de Fubini).

Remarque 1.3.7. L'espace $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ et l'espérance conditionnelle se restreint à $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ comme le projecteur orthogonal sur $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Supposons à présent que (X, \mathcal{A}, μ, T) soit un système dynamique mesuré. Nous pouvons alors introduire la tribu \mathcal{I} des ensembles invariants de \mathcal{A} , c'est-à-dire des ensembles A dans \mathcal{A} tels que $T^{-1}A = A$. Il apparaîtra dans la démonstration du théorème de Birkhoff que la fonction $\bar{\varphi}$ de l'énoncé est la fonction $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{I})$. On vérifiera qu'un élément de $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ est T -invariant si et seulement si il est presque partout égal à un élément \mathcal{I} -mesurable.

1.4 Théorème ergodique de Von Neumann

La démonstration de la convergence fonctionnelle dans le théorème de Birkhoff repose sur un phénomène abstrait d'analyse fonctionnelle.

Théorème 1.4.1 (Von Neumann, 1932). *Soient H un espace de Hilbert et U un opérateur linéaire isométrique de H qui n'admet pas de vecteur invariant non nul. Alors, pour tout v dans H , on a*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k v \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration. Soit U^* l'adjoint de U . Si U est inversible, le fait que U est isométrique entraîne que $U^* = U^{-1}$. En général, il reste vrai que tout vecteur U^* -invariant est aussi U -invariant. En effet, si v est U^* -invariant, on a

$$\|Uv - v\|^2 = \|Uv\|^2 - 2 \operatorname{Re}\langle Uv, v \rangle + \|v\|^2 = 2\|v\|^2 - 2 \operatorname{Re}\langle v, U^*v \rangle = 0$$

et donc $Uv = v$. Par conséquent, l'hypothèse implique que U^* n'admet pas de vecteur invariant non nul, c'est-à-dire que l'opérateur $U^* - 1$ a un noyau trivial. Il en découle que l'image de son opérateur adjoint $U - 1$ est dense, c'est-à-dire que l'ensemble des vecteurs de la forme $Uw - w$ est dense dans H .

Soit à présent v un vecteur quelconque de H et fixons $\varepsilon > 0$. Par la remarque précédente, il existe w dans H tel que

$$\|v - (Uw - w)\| \leq \varepsilon.$$

Il vient, pour $n \geq 1$,

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k v \right\| \leq \varepsilon + \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k (Uw - w) \right\| = \varepsilon + \frac{1}{n} \|U^n w - w\|$$

et, pour n assez grand, ce dernier terme est $\leq 2\varepsilon$. Le théorème suit. \square

Corollaire 1.4.2. *Soient (X, \mathcal{A}, μ, T) un système dynamique mesuré et \mathcal{I} la tribu des ensembles invariants de T . Pour tout φ dans $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, on a*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ T^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\varphi | \mathcal{I}),$$

cette convergence prenant place dans $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Démonstration. Commençons par établir le résultat analogue dans l'espace $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Soit H l'orthogonal de $L^2(X, \mathcal{I}, \mu)$ dans $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Alors l'opérateur isométrique $\varphi \mapsto \varphi \circ T$ préserve l'espace H et, par construction, ne possède pas de vecteur invariant dans H . Le théorème 1.4.1 entraîne alors que, pour tout φ dans $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ T^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}(\varphi | \mathcal{I}),$$

la convergence ayant lieu dans $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Comme l'injection naturelle de $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ est continue, cette convergence a aussi lieu dans $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Enfin, si φ est un élément quelconque de $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons ψ dans $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ avec $\|\varphi - \psi\|_1 \leq \varepsilon$. Pour $n \geq 1$, on a

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ T^k - \mathbb{E}(\varphi | \mathcal{I}) \right\|_1 \leq 2\varepsilon + \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi \circ T^k - \mathbb{E}(\psi | \mathcal{I}) \right\|_1$$

et cette quantité est $\leq 3\varepsilon$ pour n assez grand. Le résultat en découle. \square

Il s'agit maintenant de montrer comment cette convergence en moyenne peut être renforcée en une convergence presque sûre. C'est l'objet de la prochaine section.

1.5 Inégalité maximale

Soit φ dans $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Pour x dans X , on pose, pour $n \geq 1$,

$$S_n \varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k x)$$

et

$$M\varphi(x) = \sup_{n \geq 1} \left| \frac{1}{n} S_n \varphi(x) \right|.$$

On appelle $M\varphi$ la fonction maximale associée à φ .

Suivant un principe général, la convergence presque sûre dans le théorème de Birkhoff découle de la convergence en moyenne et de l'inégalité maximale suivante :

Théorème 1.5.1. *Soient (X, \mathcal{A}, μ, T) un système dynamique mesuré et φ dans $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Pour $\lambda > 0$, on a*

$$\mu(\{x \in X \mid M\varphi(x) \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \|\varphi\|_1.$$

En particulier, on a $M\varphi < \infty$ presque partout.

Montrons tout de suite comment l'inégalité maximale permet de terminer la démonstration du théorème de Birkhoff.

Démonstration du théorème 1.3.1. Soit φ dans $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Fixons $\varepsilon > 0$. Nous allons montrer qu'il existe un ensemble mesurable A de mesure $\geq 1 - 3\varepsilon$ et $n_0 \geq 1$ tels que, pour x dans A et $n \geq n_0$, on ait

$$\left| \frac{1}{n} S_n \varphi(x) - \mathbb{E}(\varphi | \mathcal{I})(x) \right| \leq 4\varepsilon.$$

La convergence presque sûre en découle clairement.

Soit $M \geq 0$. Posons $\varphi_M = \varphi \mathbf{1}_{|\varphi| \leq M}$ et choisissons M de sorte que $\|\varphi - \varphi_M\|_1 \leq \varepsilon^2$. D'une part, on a

$$\|\mathbb{E}(\varphi | \mathcal{I}) - \mathbb{E}(\varphi_M | \mathcal{I})\|_1 \leq \varepsilon^2$$

et, donc, d'après l'inégalité de Tchebycheff,

$$\mu(\{x \in X \mid |\mathbb{E}(\varphi | \mathcal{I})(x) - \mathbb{E}(\varphi_M | \mathcal{I})(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon.$$

D'autre part, d'après le théorème 1.5.1,

$$\mu(\{x \in X \mid \exists n \geq 1 \quad |S_n \varphi(x) - S_n \varphi_M(x)| \geq n\varepsilon\}) \leq \varepsilon.$$

En dehors d'un ensemble de mesure au plus 2ε , nous pouvons donc, dans nos calculs, remplacer φ par φ_M .

D'après le corollaire 1.4.2, il existe un entier $p \geq 1$ tel que

$$\left\| \frac{1}{p} S_p \varphi_M - \mathbb{E}(\varphi_M | \mathcal{I}) \right\|_1 \leq \varepsilon^2.$$

À nouveau d'après le théorème 1.5.1, on a

$$\mu\left(\left\{x \in X \mid \exists n \geq 1 \quad \left| \frac{1}{n} S_n \left(\frac{1}{p} S_p \varphi_M \right) (x) - \mathbb{E}(\varphi_M | \mathcal{I})(x) \right| \geq \varepsilon \right\}\right) \leq \varepsilon.$$

Remarquons alors que, pour tous entiers $n \geq 1$ et $\ell \geq 0$, on a

$$\left\| \frac{1}{n} S_n(\varphi_M \circ T^\ell) - \frac{1}{n} S_n \varphi_M \right\|_\infty \leq \frac{2\ell M}{n}$$

et donc

$$\left\| \frac{1}{n} S_n \left(\frac{1}{p} S_p \varphi_M \right) - \frac{1}{n} S_n \varphi_M \right\|_\infty \leq \frac{2pM}{n}.$$

Choisissons alors n_0 suffisamment grand pour que $\frac{2pM}{n_0} \leq \varepsilon$: nous avons bien montré que, pour x en dehors d'un ensemble de mesure au plus 3ε , on a, pour tout $n \geq n_0$, $\left| \frac{1}{n} S_n \varphi(x) - \mathbb{E}(\varphi | \mathcal{I})(x) \right| \leq 4\varepsilon$. \square

Il nous reste à présent à établir l'inégalité maximale. Pour cela, nous allons utiliser une technique appelée principe de transfert de Calderón-Zygmund, qui relie cette inégalité à une inégalité analogue dans l'espace $\ell^1(\mathbb{N})$ des séries sommables.

Pour tout $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $\ell^1(\mathbb{N})$, définissons une nouvelle suite Ma en posant, pour $i \geq 0$,

$$Ma_i = \sup_{n \geq 1} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_{i+k} \right|.$$

Théorème 1.5.2. *Soit a dans $\ell^1(\mathbb{N})$. Pour tout $\lambda > 0$, on a*

$$\text{card}\{i \geq 0 \mid Ma_i \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} \|a\|_1.$$

À nouveau, ce résultat entraîne en particulier que la suite Ma est partout finie.

Démonstration. Comme souvent dans ce type d'inégalité, la démonstration repose sur un raisonnement de recouvrement.

Plus précisément, fixons $\lambda > 0$ et posons $I_\lambda = \{i \geq 0 \mid Ma_i \geq \lambda\}$. Définissons à présent par récurrence un sous-ensemble J_λ de I_λ et une fonction $\nu : J_\lambda \rightarrow \mathbb{N}^*$ de la façon suivante. Si I_λ est vide, il n'y a rien à faire. Sinon, on note i_0 le plus petit élément de I_λ . Par définition, il existe un entier $n \geq 1$ tel que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_{i_0+k} \right| \geq \lambda.$$

On choisit un tel n et on pose $\nu(i_0) = n$. Si i_0, \dots, i_q ont ainsi été construits, on considère l'ensemble

$$I_\lambda \setminus ([i_0, i_0 + \nu(i_0)[\cup \dots \cup [i_q, i_q + \nu(i_q)[.$$

S'il est vide, on arrête la construction ; sinon, on note i_{q+1} le plus petit élément de cet ensemble, on choisit un entier $n \geq 1$ tel que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_{i_{q+1}+k} \right| \geq \lambda$$

et on pose $\nu(i_{q+1}) = n$. On note $J_\lambda = \{i_0, \dots, i_q, \dots\}$.

Cette construction effectuée, on vérifie aisément qu'on a $I_\lambda \subset \bigcup_{i \in J_\lambda} [i, i + \nu(i)[$ et que cette réunion est disjointe. Alors,

$$\begin{aligned} \text{card}(I_\lambda) &\leq \sum_{i \in J_\lambda} \nu(i) \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i \in J_\lambda} \left| \sum_{k=0}^{\nu(i)-1} a_{i+k} \right| \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i \in J_\lambda} \sum_{k=0}^{\nu(i)-1} |a_{i+k}| \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i \geq 0} |a_i| \\ &= \frac{1}{\lambda} \|a\|_1, \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant du caractère disjoint de l'union $\bigcup_{i \in J_\lambda} [i, i + \nu(i)[$.
□

Montrons maintenant comment cette inégalité sur les suites entraîne une inégalité dans les systèmes dynamiques mesurés.

Démonstration du théorème 1.5.1. Pour $m \geq 1$ et x dans X , posons

$$M_m \varphi(x) = \sup_{1 \leq n \leq m} \left| \frac{1}{n} S_n \varphi(x) \right|.$$

Fixons $p \geq 1$ et posons, pour x dans X , $a_i(x) = \varphi(T^i x)$ si $i < p$ et $a_i(x) = 0$ si $i \geq p$. Par construction, pour tout $i \leq p - m$, on a

$$M_m \varphi(T^i x) \leq M a(x)_i.$$

D'après le théorème 1.5.2 appliqué à la suite $a(x)$, il vient

$$\text{card}\{0 \leq i \leq p - m \mid M_m \varphi(T^i x) \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{p-1} |\varphi(T^i x)|.$$

Intégrons cette inégalité par rapport à μ . Nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{p-m} \mu(\{x \in X | M_m \varphi(T^i x) \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{p-1} \int_X |\varphi \circ T^i| d\mu.$$

Comme μ est invariante par T , ceci s'écrit

$$\mu(\{x \in X | M_m \varphi(x) \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \frac{p}{p-m+1} \|\varphi\|_1,$$

d'où en faisant tendre p vers l'infini,

$$\mu(\{x \in X | M_m \varphi(x) \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \|\varphi\|_1.$$

Le résultat en découle puisque $M\varphi$ est la limite croissante de $M_m \varphi$ quand m tend vers l'infini. \square

1.6 Ergodicité

Définition 1.6.1. Un système dynamique mesuré (X, \mathcal{A}, μ, T) est dit ergodique si et seulement si tout ensemble A de \mathcal{A} qui est invariant par T a une mesure égale à 0 ou à 1.

Les théorèmes ergodiques de Birkhoff et Von Neumann impliquent la

Proposition 1.6.2. Soit (X, \mathcal{A}, μ, T) un système dynamique mesuré. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) le système est ergodique.
- (ii) pour tout φ dans $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, pour μ -presque tout x dans X , on a
on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_X \varphi d\mu.$$

- (iii) pour tous φ, ψ dans $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \langle \varphi \circ T^k, \psi \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_X \varphi d\mu \int_X \bar{\psi} d\mu.$$

Démonstration. Soit \mathcal{B} une sous-tribu de \mathcal{A} . On vérifie aisément que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout B dans \mathcal{B} , B a pour mesure 0 ou 1.

(ii) pour tout φ dans $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, on a $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B}) = \int_X \varphi d\mu$.

La proposition découle du théorème de Birkhoff et de cette remarque appliquée à la tribu des ensembles invariants par T dans \mathcal{A} . \square

Exemple 1.6.3. Soient X un ensemble fini et T une permutation de X . Alors T est ergodique pour la mesure de comptage si et seulement si T est un cycle.

Exemple 1.6.4. Pour tout x dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la rotation $t \mapsto t + x$ de \mathbb{R}/\mathbb{Z} est ergodique pour la mesure de Lebesgue.

Démonstration. Pour p dans \mathbb{Z} , soit e_p la fonction définie sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} par $e_p(t) = e^{2i\pi pt}$. Si $p \neq 0$, on a, comme $e_p(x) \neq 1$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e_p(t + kx) = \frac{e_p(t)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e_p(x)^k = \frac{e_p(t)(1 - e_p(x)^n)}{n(1 - e_p(x))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

uniformément par rapport à t . Donc, si \mathcal{I} est la tribu des ensembles boréliens invariants par la rotation par x sur le cercle, pour tout $p \neq 0$ dans \mathbb{Z} , on a $\mathbb{E}(e_p|\mathcal{I}) = 0$. Le résultat en découle puisque les $(e_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ engendrent un sous-espace dense de l'espace des fonctions intégrables sur le cercle. \square

1.7 Mélange

Nous introduisons maintenant des propriétés qui sont des versions fortes de l'ergodicité. Nous verrons que de nombreux exemples de systèmes dynamiques les satisfont. Notons que, d'après la proposition 1.6.2, un système dynamique mesuré (X, \mathcal{A}, μ, T) est ergodique si et seulement si, pour tous A, B dans \mathcal{A} , on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-k}B) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A)\mu(B).$$

Définition 1.7.1. Soit (X, \mathcal{A}, μ, T) un système dynamique mesuré. On dit qu'il est faiblement mélangeant si et seulement si, pour tous A, B dans \mathcal{A} ,

on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu(A \cap T^{-k}B) - \mu(A)\mu(B)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On dit qu'il est fortement mélangeant si et seulement si, pour tous A, B dans \mathcal{A} , on a

$$\mu(A \cap T^{-n}B) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A)\mu(B).$$

Bien sûr, le mélange fort implique le mélange faible qui a son tour implique l'ergodicité. Les implications réciproques ne sont pas vraies : par exemple, un système périodique ou une rotation irrationnelle sont ergodique mais pas faiblement mélangeants. La transformation de Chacon est faiblement mélangeante mais n'est pas fortement mélangeante.

Rappelons que deux éléments A et B de \mathcal{A} sont dits indépendants si $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$. Un système fortement mélangeant est donc un système dans lequel les événements qui dépendent du futur tendent à devenir indépendants du présent.

Exemple 1.7.2. La transformation $x \mapsto 2x$ du cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} est fortement mélangeante.

Démonstration. Soit T cette transformation et, pour p dans \mathbb{Z} , e_p la fonction définie sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} par $e_p(t) = e^{2i\pi pt}$. On a $e_p \circ T = e_{2p}$. Donc, pour p, q dans \mathbb{Z} avec $q \neq 0$, on a $\langle e_p, e_q \circ T^n \rangle = 0$ dès que n est suffisamment grand. En utilisant la densité de l'espace engendré par les fonctions e_p , $p \in \mathbb{Z}$, dans l'espace des fonctions de carré intégrable sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} , on en déduit que si φ et ψ sont deux telles fonctions, on a $\langle \varphi, \psi \circ T^n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \varphi(t) dt \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \overline{\psi}(t) dt$, c'est-à-dire que T est fortement mélangeant. \square

La propriété de mélange faible peut se caractériser de plusieurs manières.

Proposition 1.7.3. *Soit (X, \mathcal{A}, μ, T) un système dynamique mesuré. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *le système (X, \mathcal{A}, μ, T) est faiblement mélangeant.*
- (ii) *le système produit $(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu, T \otimes T)$ est ergodique.*
- (iii) *pour tout système dynamique mesuré ergodique (Y, \mathcal{B}, ν, S) , le système produit $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu, T \otimes S)$ est ergodique.*

(iv) si $\chi : X \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est une application mesurable telle qu'il existe t dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} avec, pour μ -presque tout x dans X , $\chi(Tx) = \chi(x) + t$, on a $t = 0$ et χ est constante presque partout.

Remarque 1.7.4. Une autre caractérisation du mélange faible, en termes de la théorie spectrale des opérateurs unitaires, est la suivante : le système (X, \mathcal{A}, μ, T) est faiblement mélangeant si et seulement si l'opérateur $\varphi \mapsto \varphi \circ T$ n'admet pas de mesures spectrales atomiques dans l'espace des fonctions de carré intégrable et d'intégrale nulle sur X . Ce fait simplifierait la démonstration de la proposition, mais nous n'allons pas y faire référence, de manière à éviter d'utiliser le théorème spectral.

Démonstration. (i) \Rightarrow (iv) Posons $\varphi = e^{2i\pi\chi}$. On a

$$\int_X \varphi d\mu = \int_X \varphi \circ T d\mu = e^{2i\pi t} \int_X \varphi d\mu$$

et donc, si $t \neq 0$, $\int_X \varphi d\mu = 0$. Comme (X, \mathcal{A}, μ, T) est faiblement mélangeant, il vient

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\langle \varphi, \varphi \circ T^k \rangle| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Or, par construction, pour tout entier $k \geq 0$, $\langle \varphi, \varphi \circ T^k \rangle = e^{2i\pi kt}$, ce qui est contradictoire. On a donc bien $t = 0$ et, comme (X, \mathcal{A}, μ, T) est ergodique, χ est constant presque partout.

(iv) \Rightarrow (iii) Dans cette partie de la démonstration, nous utilisons des arguments d'ordres généraux qui relèvent plus de la théorie spectrale que de la théorie des systèmes dynamiques. Soit θ un élément de $L^2(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$. Notons K_θ l'opérateur de $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $L^2(Y, \mathcal{B}, \nu)$ tel que, pour tout φ dans $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, pour ν -presque tout y dans Y , on ait

$$K_\theta \varphi(y) = \int_X \theta(x, y) \varphi(x) d\mu(x).$$

L'existence de l'intégrale et le fait que la fonction $K\varphi$ appartient à $L^2(Y, \mathcal{B}, \nu)$ découlent du théorème de Fubini et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Notons que la norme de l'opérateur K_θ est définie par

$$\begin{aligned} \|K_\theta\| &= \sup_{\|\varphi\|_2, \|\psi\|_2 \leq 1} |\langle K_\theta \varphi, \psi \rangle| \\ &= \sup_{\|\varphi\|_2, \|\psi\|_2 \leq 1} \left| \int_{X \times Y} \theta(x, y) \varphi(x) \overline{\psi(y)} d\mu(x) d\nu(y) \right|. \end{aligned}$$

Comme les fonctions de la forme $(x, y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ engendrent un sous-espace dense de $L^2(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$, cette dernière quantité est égale à $\|\theta\|_2$. En particulier, ceci implique que, à nouveau comme les fonctions de la forme $(x, y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ engendrent un sous-espace dense de $L^2(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$, l'opérateur K_θ est limite d'opérateurs de rang fini et donc qu'il est compact. Enfin, un calcul immédiat permet de vérifier que l'adjoint K_θ^* de K_θ est défini par la formule, pour tout ψ dans $L^2(Y, \mathcal{B}, \nu)$, pour μ -presque tout x dans X ,

$$K_\theta^*\psi(x) = \int_Y \bar{\theta}(x, y)\psi(y)d\nu(y).$$

Notons U_T, U_S et $U_{T \otimes S}$ les opérateurs de composition par T, S et $T \otimes S$ sur les espaces $L^2(X, \mathcal{A}, \mu), L^2(Y, \mathcal{B}, \nu)$ et $L^2(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$. Supposons à présent que θ est un élément $U_{T \otimes S}$ -invariant d'intégrale nulle de $L^2(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ et montrons que $\theta = 0$ presque partout. Par définition, pour tout φ dans $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, pour ν -presque tout y dans Y , on a

$$\begin{aligned} K_\theta\varphi(Sy) &= \int_X \theta(x, Sy)\varphi(x)d\mu(x) \\ &= \int_X \theta(Tx, Sy)\varphi(Tx)d\mu(x) = \int_X \theta(x, y)\varphi(Tx)d\mu(x), \end{aligned}$$

d'où $K_\theta U_T = U_S K_\theta$. De même, en utilisant la formule qui définit l'adjoint de K_θ , on montre $K_\theta^* U_S = U_T K_\theta^*$. Il vient $K_\theta^* K_\theta U_T = U_T K_\theta^* K_\theta$. Par ailleurs, comme $U_T \mathbf{1}_X = \mathbf{1}_X$, on a $U_S(K_\theta \mathbf{1}_X) = K_\theta \mathbf{1}_X$ et, comme θ est d'intégrale nulle, $\int_Y K_\theta \mathbf{1}_X d\nu = 0$. Comme (Y, \mathcal{B}, ν, S) est ergodique, il vient $K_\theta \mathbf{1}_X = 0$.

Supposons $\theta \neq 0$. Alors, l'opérateur compact auto-adjoint $K_\theta^* K_\theta$ de l'espace $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ possède un espace propre H de dimension finie associé à une valeur propre $\neq 0$. Comme $K_\theta^* K_\theta \mathbf{1}_X = 0$, l'espace H est orthogonal à $\mathbf{1}_X$. Comme U_T commute à $K_\theta^* K_\theta$, U_T préserve H et y agit comme une isométrie. Par conséquent, il existe $\varphi \neq 0$ dans H et un nombre complexe de la forme $e^{2i\pi t}$ tel que $U_T \varphi = \varphi \circ T = e^{2i\pi t} \varphi$. En particulier, on a $|\varphi \circ T| = |\varphi|$ et donc, comme, du fait de l'hypothèse, (X, \mathcal{A}, μ, T) est ergodique, le module de φ est constant presque partout. Quitte à multiplier φ par une constante, on peut donc supposer qu'on a $\varphi = e^{2i\pi\chi}$ où χ est une application mesurable de X dans le cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} telle que $\chi \circ T = t + \chi$. Alors, l'hypothèse contredit le fait que φ est orthogonale à $\mathbf{1}_X$.

(iii) \Rightarrow (ii) L'hypothèse entraîne que (X, \mathcal{A}, μ, T) est ergodique; l'implication est alors triviale.

(ii) \Rightarrow (i) Remarquons que, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, étant donné des nombres complexes a_1, \dots, a_n , on a

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| \right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k|^2.$$

Donnons-nous alors A, B dans \mathcal{A} . Il vient

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu(A \cap T^{-k}B) - \mu(A)\mu(B)| \right)^2 \\ & \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\mu(A \cap T^{-k}B) - \mu(A)\mu(B))^2 \\ & = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-k}B)^2 - 2\mu(A)\mu(B) \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-k}B) + \mu(A)^2\mu(B)^2. \end{aligned}$$

Comme $(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu, T \otimes T)$ est ergodique, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-k}B)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu(A)^2\mu(B)^2$$

et

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-k}B) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu(A)\mu(B).$$

Il vient bien

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu(A \cap T^{-k}B) - \mu(A)\mu(B)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

□

1.8 Exercices

1.8.1 Ensembles invariants

Soit (X, \mathcal{A}, μ, T) un système dynamique mesuré. On dit qu'un élément A de \mathcal{A} est invariant presque partout si et seulement si on a $\mu(A \Delta T^{-1}A) = 0$ (où Δ désigne la différence symétrique).

1. Montrer que A est invariant presque partout si et seulement s'il existe un ensemble invariant B qui soit presque partout égal à A (c'est-à-dire tel que $\mu(A \Delta B) = 0$).
2. Soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $\varphi \circ T = \varphi$ presque partout si et seulement s'il existe une fonction invariante ψ avec $\varphi = \psi$ presque partout.

1.8.2 Translations des tores

Soit $d \geq 1$ et x dans \mathbb{R}^d . Donner une condition nécessaire et suffisante sur x pour que la translation $t \mapsto t + x$ de \mathbb{T}^d soit ergodique pour la mesure de Lebesgue.

1.8.3 Endomorphismes des tores

Soit $d \geq 1$. On munit le tore \mathbb{T}^d de la mesure de Lebesgue. On se propose de démontrer le résultat suivant : si A est un élément de $\text{GL}_d(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont entiers, alors A agit ergodiquement sur \mathbb{T}^d si et seulement si A n'admet pas de racine de l'unité comme valeur propre (sur \mathbb{C}). Alors, A agit de façon mélangeante.

1. Montrer que A préserve la mesure de Lebesgue de \mathbb{T}^d .

Soit $V \subset \mathbb{C}^d$ un sous- \mathbb{C} -espace vectoriel. On dit que V est rationnel s'il possède une base dont les vecteurs ont des coordonnées rationnelles.

2. Montrer que, si V est un sous-espace rationnel de \mathbb{C}^d , le quotient $(V \cap \mathbb{R}^d) / (V \cap \mathbb{Z}^d)$ est compact.
3. Montrer que, si V est un sous-espace rationnel de \mathbb{C}^d stable par A , le déterminant de la restriction de A à V est un entier non nul.

Plus généralement, si K est un sous-corps de \mathbb{C} , on dit qu'un sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^d est défini sur K s'il possède une base dont les vecteurs ont leurs coordonnées dans K .

4. Montrer que, si B est un élément de $\text{GL}_d(K)$, l'espace $\ker B$ est défini sur K .
5. Montrer que, si K est une extension finie galoisienne de \mathbb{Q} et V est un sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^d défini sur K , alors V est défini sur \mathbb{Q} si et seulement si $(V \cap K^d)$ est stable par l'action naturelle du groupe de Galois $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$.
6. Soit B dans $\text{GL}_d(\mathbb{C})$. On note Λ l'ensemble des valeurs propres de B et $\mathbb{C}^d = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ la décomposition associée de \mathbb{C}^d en sous-espaces caractéristiques. Soit $v = \sum_{\lambda \in \Lambda} v_\lambda$ dans \mathbb{C}^d . Montrer que, s'il existe λ dans Λ tel que $|\lambda| > 1$ et $v_\lambda \neq 0$, on a $B^n v \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$.

7. Soit toujours B un endomorphisme linéaire de \mathbb{C}^d et soit $V \subset \mathbb{C}^d$ le sous-espace qui est la somme des sous-espaces propres de B associés à des valeurs propres de module 1. Montrer que B préserve un produit scalaire dans V .

Soit λ une valeur propre de A .

8. Montrer que λ est un nombre algébrique qui est entier sur \mathbb{Z} .

9. Montrer que la somme des sous-espaces propres associés aux nombres algébriques conjugués de λ est un sous-espace rationnel de \mathbb{C}^d .

10. Montrer que si λ est une racine de l'unité, A n'est pas ergodique.

11. On suppose que tous les conjugués de λ sont de module 1. Montrer que λ est une racine de l'unité.

12. On suppose que λ est de module < 1 . Montrer qu'il admet un conjugué de module > 1 .

On suppose que A n'admet pas de racine de l'unité comme valeur propre.

13. Montrer que, pour tout $v \neq 0$ dans \mathbb{Z}^d , on a $A^n v \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$.

14. Conclure.

Chapitre 2

Systèmes dynamiques topologiques

Dans ce chapitre, nous introduisons le vocabulaire des systèmes dynamiques topologiques.

2.1 Mesures invariantes

Soit X un espace topologique localement compact. Rappelons que le théorème de représentation de Riesz identifie les mesures de Radon de X – c’est-à-dire les mesures boréliennes finies sur les compacts – et les formes linéaires positives sur l’espace des fonctions continues à support compact sur X . Dans toute la suite, quand nous parlerons de mesure sur un espace localement compact, nous sous-entendrons toujours qu’il s’agit d’une mesure de Radon.

Un lien fort entre la théorie topologique des systèmes dynamiques et la théorie ergodique provient du résultat suivant :

Proposition 2.1.1. *Soient X un espace topologique compact (non vide) et $T : X \rightarrow X$ une application continue. Alors T préserve une mesure de probabilité sur X .*

Exemple 2.1.2. Le résultat est faux si on ne suppose pas X compact : par exemple, la transformation $n \mapsto n + 1$ sur \mathbb{Z} ne préserve pas de mesure de probabilité.

Démonstration. Nous allons utiliser l'identification de l'ensemble des mesures de probabilité de X avec l'ensemble des formes linéaires positives de norme ≤ 1 sur l'espace $\mathcal{C}^0(X)$ des fonctions continues sur X , muni de la norme de la convergence uniforme.

Rappelons que, d'après le théorème de Banach-Alaoglu, la boule unité du dual topologique $\mathcal{C}^0(X)^*$ de $\mathcal{C}^0(X)$ est compacte pour la topologie faible-*. Comme l'ensemble des formes linéaires positives de $\mathcal{C}^0(X)$ est clairement fermé pour cette topologie, l'ensemble des mesures de probabilité est compact. Soit ν une mesure de probabilité sur X (par exemple $\nu = \delta_x$, la masse de Dirac en x pour un x de X). Pour $n \geq 1$, posons

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T_*^k \nu$$

(où $T_* \nu$ est la mesure telle que $\int_X \varphi d(T_* \nu) = \int_X \varphi \circ T d\nu$, pour φ dans $\mathcal{C}^0(X)$), de sorte que $T_* \nu_n - \nu_n = \frac{1}{n} (T_*^n \nu - \nu)$ tend vers 0 en norme dans $\mathcal{C}^0(X)^*$. Il en résulte que, comme l'opérateur T_* est continu pour la topologie faible, si μ est une valeur d'adhérence de $(\nu_n)_{n \geq 1}$, on a $T_* \mu = \mu$, ce qu'il fallait démontrer. \square

Notons que l'ensemble des mesures de probabilités invariantes par T est une partie convexe faiblement fermée de $\mathcal{C}^0(X)^*$. Nous pouvons aussi décrire les mesures ergodiques sous l'action de T :

Proposition 2.1.3. *Soient X un espace topologique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue. Si μ est une mesure de probabilité invariante par T , alors μ est ergodique si et seulement si μ est un point extrémal de l'ensemble des mesures de probabilité invariantes par T .*

Comme la topologie faible-* est localement convexe, l'ensemble des mesures de probabilité invariantes par T vérifie le théorème de Krein-Milman, c'est-à-dire qu'il est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. En d'autres termes, nous avons le

Corollaire 2.1.4. *Soient X un espace topologique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue. Alors T admet des mesures de probabilité invariantes ergodiques.*

La démonstration de la proposition 2.1.3 utilise le lemme suivant dont la démonstration est immédiate quand T est inversible.

Lemme 2.1.5. *Soit (X, \mathcal{A}, μ, T) un système dynamique mesuré. Soit φ dans $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ tel que la mesure complexe $\varphi\mu$ soit invariante par T . Alors φ est invariant par T .*

Démonstration. Si T est inversible, on a $T_*(\varphi\mu) = (\varphi \circ T^{-1})\mu$ et l'invariance de $\varphi\mu$ par T implique celle de φ par T^{-1} , donc par T .

Dans le cas général, il faut travailler un peu plus. Commençons par montrer que la mesure positive $|\varphi|\mu$ est invariante par T . Soit $\theta : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable de module 1 telle que $|\varphi| = \theta\varphi$. Pour toute fonction intégrable positive $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$, on a

$$\int_X |\varphi| \psi d\mu = \int_X \varphi \theta \psi d\mu = \int_X \varphi(\theta \circ T)(\psi \circ T) d\mu,$$

donc

$$\int_X |\varphi| \psi d\mu \leq \int_X |\varphi| (\psi \circ T) d\mu.$$

Si $\psi \leq 1$, on a aussi

$$\int_X |\varphi| (1 - \psi) d\mu \leq \int_X |\varphi| (1 - \psi \circ T) d\mu.$$

Comme, dans ces deux inégalités, les membres de droite et de gauche ont même somme, il vient

$$\int_X |\varphi| \psi d\mu = \int_X |\varphi| (\psi \circ T) d\mu$$

et, donc, la mesure $|\varphi|\mu$ est T -invariante.

Montrons à présent que φ est invariante par T . Nous pouvons bien sûr supposer que φ est à valeurs réelles. Pour M dans \mathbb{R} , posons

$$\varphi_M = \min(\varphi, M) = \frac{1}{2}(\varphi + M - |\varphi - M|),$$

si bien que la mesure $\varphi_M\mu$ est invariante par T , et $X_M = \{x \in X | \varphi(x) \geq M\}$. Nous allons montrer que l'ensemble X_M est invariant presque partout, ce qui achève la démonstration. En effet, on a

$$\begin{aligned} M\mu(X_M) &= \int_{X_M} \varphi_M d\mu = \int_{T^{-1}X_M} \varphi_M d\mu \\ &= M\mu(T^{-1}X_M \cap X_M) + \int_{T^{-1}X_M \cap X_M^c} \varphi_M d\mu, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{T^{-1}X_M \cap X_M^c} \varphi_M d\mu = M\mu(T^{-1}X_M \cap X_M^c).$$

Comme $\varphi_M < M$ sur $T^{-1}X_M \cap X_M^c$, il vient $\mu(T^{-1}X_M \cap X_M^c) = 0$, ce qu'il fallait démontrer. \square

Démonstration de la proposition 2.1.3. Supposons que μ ne soit pas ergodique. Alors, il existe un borélien T -invariant $A \subset X$ avec $0 < \mu(A) < 1$. Pour tout borélien $B \subset X$, posons

$$\mu'(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)} \text{ et } \mu''(B) = \frac{\mu(A^c \cap B)}{\mu(A^c)}.$$

On vérifie aisément que μ' et μ'' sont des mesures de probabilité invariantes par T et qu'on a $\mu = \mu(A)\mu' + (1 - \mu(A))\mu''$, si bien que μ n'est pas un point extrémal.

Réciproquement, si μ est ergodique, montrons que c'est un point extrémal de l'ensemble des mesures de probabilité invariantes. Supposons que $\mu = t\mu' + (1-t)\mu''$ où μ' et μ'' sont des mesures de probabilité invariantes et $0 < t < 1$: il s'agit de montrer qu'on a $\mu = \mu' = \mu''$. Comme $\mu' \leq \frac{1}{t}\mu$, μ' est absolument continue par rapport à μ . D'après le théorème de Radon-Nikodym, il existe φ dans $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ tel que $\mu' = \varphi\mu$. Comme μ' est invariante par T , d'après le lemme 2.1.5, φ est invariante par T , donc elle est constante, c'est-à-dire que μ' est proportionnelle à μ . Comme μ' est une mesure de probabilité, on a $\mu' = \mu$ et donc, aussi, $\mu'' = \mu$, ce qu'il fallait démontrer. \square

2.2 Unique ergodicité

Définition 2.2.1. Soient X un espace topologique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue. Nous dirons que T est *uniquement ergodique* si elle préserve une unique mesure de probabilité sur X .

Exemple 2.2.2. Les rotations irrationnelles sont *uniquement ergodiques*.

Proposition 2.2.3. Soient X un espace topologique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) T est *uniquement ergodique*.

(ii) il existe une mesure de probabilité μ sur X telle que, pour toute fonction continue φ sur X , la suite de fonctions $(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ T^k)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers la fonction constante égale à $\int_X \varphi d\mu$.

Remarque 2.2.4. En particulier, dans ce cas, le système dynamique mesuré (X, T, μ) est ergodique – ce qui découle aussi de la proposition 2.1.3 – d'où la terminologie.

Démonstration. (ii) \Rightarrow (i) Soit ν une mesure invariante par T et soit φ dans $\mathcal{C}^0(X)$. D'après le théorème de Birkhoff, pour ν -presque tout x dans X , on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}_\nu(\varphi|\mathcal{I})(x),$$

où \mathcal{I} désigne la tribu des ensembles boréliens qui sont T -invariants. Par hypothèse, on a donc, pour ν -presque tout x , $\mathbb{E}_\nu(\varphi|\mathcal{I})(x) = \int_X \varphi d\mu$, donc, comme $\int_X \mathbb{E}_\nu(\varphi|\mathcal{I}) d\nu = \int_X \varphi d\nu$, $\mu = \nu$, ce qu'il fallait démontrer.

(i) \Rightarrow (ii) Il s'agit d'une variation sur la démonstration de la proposition 2.1.1. Supposons (ii) faux : alors, si μ est une mesure T -invariante, il existe une fonction φ dans $\mathcal{C}^0(X)$, un nombre $\varepsilon > 0$, une suite strictement croissante d'entiers (n_p) et une suite x_p de points de X tels que, pour tout p , on ait

$$\left| \frac{1}{n_p} \sum_{k=0}^{n_p-1} \varphi(T^k x_p) - \int_X \varphi d\mu \right| \geq \varepsilon.$$

Pour tout p , soit $\nu_p = \sum_{k=0}^{n_p-1} \delta_{T^k x_p}$, de sorte que $\|T_* \nu_p - \nu_p\|_\infty \leq \frac{2}{n_p}$. Alors, si ν est une valeur d'adhérence de (ν_p) pour la topologie faible-*, la mesure ν est T -invariante, mais on a

$$\left| \int_X \varphi d\nu - \int_X \varphi d\mu \right| \geq \varepsilon,$$

donc $\mu \neq \nu$ et T n'est pas uniquement ergodique. \square

2.3 Transitivité, mélange

Nous allons à présent étudier des analogues topologiques des notions d'ergodicité et de mélange en théorie ergodique.

Définition 2.3.1. Soit X un espace topologique et $T : X \rightarrow X$ une application continue. On dit que T est topologiquement transitif (comme application continue) si T admet une orbite dense dans X , c'est-à-dire s'il existe x dans X tel que l'ensemble $T^{\mathbb{N}}x$ soit dense dans X .

Si T est un homéomorphisme, on dit qu'il est topologiquement transitif (comme homéomorphisme) s'il admet une orbite complète dense dans X , c'est-à-dire s'il existe x dans X tel que l'ensemble $T^{\mathbb{Z}}x$ soit dense dans X .

Enfin, on dit que T est topologiquement mélangeant si, pour tous ouverts non vides U et V de X , il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $U \cap T^{-n}V \neq \emptyset$.

Exemple 2.3.2. La notion de transitivité peut dépendre du fait qu'on la considère ou pas au sens des homéomorphismes. Par exemple, considérons l'ensemble \mathbb{Z} , muni de la transformation $n \mapsto n + 1$: elle est transitive comme homéomorphisme, mais pas comme application continue.

Rappelons qu'un espace topologique est dit être un espace de Baire s'il vérifie le lemme de Baire, c'est-à-dire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses de X est encore dense. Un tel sous-ensemble de X est appelé un G_δ dense. Les espaces métriques complets et les espaces localement compacts sont des espaces de Baire.

Proposition 2.3.3. *Soit X un espace de Baire à base dénombrable d'ouverts et $T : X \rightarrow X$ une application continue.*

- (i) *Si pour tous ouverts U et V non vides de X , il existe un entier naturel n tel que $U \cap T^{-n}V \neq \emptyset$, alors T est topologiquement transitif et l'ensemble des points d'orbite dense de T est un G_δ dense.*
- (ii) *Si T est un homéomorphisme, alors T est topologiquement transitif si et seulement si, pour tous ouverts U et V non vides de X , il existe un entier relatif n tel que $U \cap T^{-n}V \neq \emptyset$ et l'ensemble des points d'orbite dense de T est alors un G_δ dense.*

En particulier, dans un espace de Baire à base dénombrable d'ouverts, une application continue topologiquement mélangeante est topologiquement transitive.

Démonstration. (i) Soit (V_p) une base dénombrable d'ouverts de X . L'ensemble des points d'orbite dense de T est

$$\bigcap_p \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}V_p.$$

Par hypothèse, pour tout p , l'ouvert $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}V_p$ est dense dans X . Le résultat découle alors du fait que X est un espace de Baire.

(ii) La condition est suffisante pour la même raison que ci-dessus. Elle est nécessaire car, si x est un point d'orbite dense de T , si U et V sont des ouverts non vides de X , il existe des entiers n et p avec $T^n x \in U$ et $T^p x \in V$, si bien que $U \cap T^{n-p}U \neq \emptyset$. \square

Les propriétés de transitivité et de mélange peuvent se déduire de propriétés ergodiques.

Proposition 2.3.4. *Soit X un espace localement compact, $T : X \rightarrow X$ une application continue et μ une mesure de probabilité invariante pour T qui soit de support total.*

- (i) *Si μ est ergodique et X est à base dénombrable d'ouverts, T est topologiquement transitif.*
- (ii) *Si μ est mélangeante, T est topologiquement mélangeant.*

Démonstration. (i) Soit (U_p) une base dénombrable de la topologie de X . Comme μ est à support total, pour tout p , on a $\mu(U_p) > 0$ et donc d'après le théorème de Birkhoff, l'ensemble des x dans X tels que, pour tout p , on ait

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{card}\{0 \leq k < n \mid T^k x \in U_p\} > 0$$

est de mesure 1. Un tel x a bien une orbite dense.

(ii) Soient U et V des ouverts non vides de X . À nouveau, comme μ est de support total, on a $\mu(U) > 0$ et $\mu(V) > 0$. Comme μ est mélangeante, on a $\mu(U \cap T^{-n}V) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu(U)\mu(V)$ et donc, pour n suffisamment grand, $U \cap T^{-n}V \neq \emptyset$. \square

Exemple 2.3.5. La transformation $x \mapsto 2x$ du cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} est topologiquement mélangeante.

2.4 Minimalité

Nous terminons par une notion très forte de transitivité.

Définition 2.4.1. Soient X un espace topologique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue. On dit que T est minimale si toute orbite de T est dense.

Remarque 2.4.2. Nous verrons plus loin que cette définition fait sens essentiellement dans les espaces compacts.

Exemple 2.4.3. Les rotations irrationnelles sont minimales. L'application $x \mapsto 2x$ dans le cercle ne l'est pas : elle possède un point fixe !

Nous avons le résultat suivant, un peu formel :

Proposition 2.4.4. Soient X un espace topologique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue. Il existe un fermé Y non vide de X invariant par T (c'est-à-dire tel que $TY \subset Y$) tel que la restriction de T à Y soit minimale.

Démonstration. Soit \mathcal{Y} l'ensemble des fermés T -invariants non vide de X (on a $X \in \mathcal{Y}$). Ordonnons \mathcal{Y} par l'inclusion décroissante et remarquons que, si \mathcal{Z} est une partie totalement ordonnée de \mathcal{Y} , comme, par compacité, l'ensemble $Z = \bigcap_{Y \in \mathcal{Z}} Y$ est non vide, \mathcal{Z} admet un majorant. Par conséquent, d'après le lemme de Zorn, l'ensemble \mathcal{Y} admet un élément maximal, c'est-à-dire, précisément que X contient un fermé invariant minimal non vide. \square

Cette notion peut elle aussi être déduite d'une propriété des mesures invariantes :

Proposition 2.4.5. Soient X un espace topologique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue uniquement ergodique dont la mesure de probabilité invariante à un support total. Alors T est minimal.

Remarque 2.4.6. La réciproque est fautive, mais les contre-exemples ne sont pas aisés à construire.

Démonstration. Soient x un point de X et U un ouvert non vide. Soit φ une fonction continue positive non nulle sur X , à support contenu dans U . Comme μ est à support total, on a $\int_X \varphi d\mu > 0$. Or, d'après la proposition 2.2.3, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi d\mu.$$

Par conséquent, il existe un entier n tel que $\varphi(T^n x) > 0$, si bien que $T^n x$ appartient à U , ce qu'il fallait démontrer. \square

2.5 Exercices

2.5.1 Minimalité et compacité

Soient X un espace topologique. Rappelons qu'une fonction $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite semi-continue supérieurement si, pour tout x dans X , on a

$$\limsup_{y \rightarrow x} \varphi(y) \leq \varphi(x).$$

1. Montrer que si X est compact et $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement, alors φ est majorée.

On suppose dorénavant que X est localement compact et que $T : X \rightarrow X$ est une application continue dont toutes les orbites sont denses. Si U est un ouvert non vide de X , on pose, pour x dans X , $\tau_U(x) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid T^n x \in U\}$. On appelle τ_U le temps d'atteinte de U .

2. Montrer que τ_U est semi-continue supérieurement.

3. Soit K une partie compacte d'intérieur non vide de X . Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^n K$ est compact.

4. Montrer que X est compact.

2.5.2 Codage

Soit X l'espace $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, muni de la topologie produit de la topologie discrète sur $\{0, 1\}$, et soit $T : X \rightarrow X$ l'application de décalage, c'est-à-dire que, pour tout $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans X , Tx désigne la suite $(x_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$.

1. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow [0, 1[\\ x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} x_k \end{aligned}$$

est continue et surjective. Discuter, suivant les valeurs de $t \in [0, 1[$, le nombre d'antécédents de t par π .

On considère désormais π comme une application $X \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ en la composant avec la projection naturelle $[0, 1[\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

2. Montrer que, pour tout x dans X , on a $\pi(Tx) = 2\pi(x)$.

Pour tout $0 < p < 1$, soit μ_p la mesure produit $\bigotimes_{\mathbb{N}} ((1-p)\delta_0 + p\delta_1)$ sur X , qu'on appelle mesure de Bernoulli de paramètre p .

3. Montrer que μ_p est T -invariante et mélangeante.
4. Montrer que l'application $t \mapsto 2t$ sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} admet une infinité non dénombrable de mesures invariantes ergodiques.

2.5.3 Suite de Morse

On note encore X l'espace $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, muni de l'application de décalage T . On se propose de construire un fermé invariant Y de X dans lequel T agit de façon minimale et uniquement ergodique – mais non périodique.

1. On note S la substitution

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow 01 \\ 1 &\rightarrow 10, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que, pour tout x dans X , on note Sx la suite telle que, pour tout entier k , $(Sx)_{2k} = x_k$ et $(Sx)_{2k+1} \neq x_k$. Montrer qu'il existe un unique y dans X avec $y_0 = 0$ et $Sy = y$.

2. Écrire les 32 premières coordonnées de y .
3. Un élément x de X est dit ultimement périodique s'il existe k_0 dans \mathbb{N} et r dans \mathbb{N}^* tel que, pour tout $k \geq k_0$, on ait $x_{k+r} = x_k$. Montrer que y n'est pas ultimement périodique.

On note Y l'adhérence dans X de l'ensemble $\{T^n y | n \in \mathbb{N}\}$. On se propose de montrer que la restriction de T à Y est minimale.

4. Montrer que, pour tout k dans \mathbb{N} , on a $y_{k+1} = 0$, $y_{k+2} = 0$ ou $y_{k+3} = 0$.
5. Soient $k \geq 0$, $r \geq 1$ et $\ell \geq 0$ tel que $2^\ell \geq k + r$. Montrer que, pour tout entier p , il existe $q \leq 32^\ell + k$ avec $y_{p+q} = y_k, \dots, y_{p+q+r-1} = y_{k+r-1}$.
6. Montrer que T est minimal dans Y .

On va maintenant montrer que T est uniquement ergodique dans Y . Si r est un entier ≥ 1 , on appelle cylindre de X de longueur r un ensemble de la forme

$$C = \{x \in X | x_0 = u_0, \dots, x_{r-1} = u_{r-1}\}$$

avec u_0, \dots, u_{r-1} dans $\{0, 1\}$. On note parfois $C = [u_0, \dots, u_{r-1}]$. Pour tout entier $\ell \geq 0$, on pose alors

$$\mu_\ell(C) = \frac{1}{2^\ell} \text{card}\{0 \leq k \leq 2^\ell - r | y_k = u_0, \dots, y_{k+r-1} = u_{r-1}\}.$$

On note aussi \overline{C} le cylindre $[v_0, \dots, v_{r-1}]$ où, pour tout $0 \leq k \leq r-1$, $v_k \neq u_k$.

7. Montrer que, pour tout cylindre C de longueur r et pour tout $\ell \geq 0$, on a

$$\frac{1}{2}(\mu_\ell(C) + \mu_\ell(\bar{C})) \leq \mu_{\ell+1}(C) \leq \frac{1}{2}(\mu_\ell(C) + \mu_\ell(\bar{C})) + \frac{r}{2^{\ell+1}}.$$

En déduire qu'il existe $\mu(C)$ avec $\mu_\ell(C) \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} \mu(C)$ et qu'on a $\mu(C) = \mu(\bar{C})$.

8. Soient $0 \leq p < q$ des entiers, $\varepsilon > 0$ et C un cylindre de longueur r . Montrer que si $|\mu_\ell(C) - \mu(C)| \leq \varepsilon$ et $|\mu_\ell(\bar{C}) - \mu(C)| \leq \varepsilon$, on a, pour $\ell \geq 0$,

$$\left| \frac{1}{q-p} \text{card}\{p \leq k < q | T^k y \in C\} - \mu(C) \right| \leq \varepsilon + r \left(\frac{1}{2^\ell} + \frac{1}{q-p} \right).$$

9. Montrer que T est uniquement ergodique dans Y .

2.5.4 Obstructions à l'équidistribution

On note toujours X l'espace $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, muni de l'application de décalage T . Soit x un point périodique de T de période $r \geq 1$. On note μ_x la mesure $\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{r-1} \delta_{T^n x}$.

1. Montrer que l'ensemble des mesures de la forme μ_x , où x est un point périodique de T , est dense dans l'ensemble des mesures invariantes de T (pour la topologie faible-*).

2. Construire un point y de X tel que, pour toute orbite périodique x de T , il existe une suite strictement croissante (n_p) avec

$$\frac{1}{n_p} \sum_{k=0}^{n_p-1} \delta_{T^k x} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \mu_x.$$

3. Montrer que X contient un ensemble dense de points y tels que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x})_{n \geq 1}$ soit constitué de toutes les mesures invariantes de T .

2.5.5 Mélange topologique

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ que nous considérerons tantôt comme un automorphisme de \mathbb{R}^2 , tantôt comme un homéomorphisme de $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. On se propose de montrer directement que A est topologiquement mélangeant dans \mathbb{T}^2 .

1. Montrer que l'ensemble des points périodiques de A est dense dans \mathbb{T}^2 .
2. Montrer que A est diagonalisable.

On note V la droite propre de A dans \mathbb{R}^2 associée à sa valeur propre < 1 .

3. Montrer que, pour tout x dans \mathbb{T}^2 , l'ensemble $x + V$ est dense dans \mathbb{T}^2 et que, si y appartient à $x + V$, on a, dans \mathbb{T}^2 ,

$$A^n x - A^n y \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

4. Montrer que A est topologiquement mélangeant dans \mathbb{T}^2 .

Chapitre 3

Groupes topologiques et réseaux

Dans ce chapitre, qui est complètement indépendants des deux précédents, nous allons introduire des outils de théorie des groupes qui nous permettront de fabriquer de nombreux exemples intéressants de systèmes dynamiques.

3.1 Groupes topologiques

Définition 3.1.1. Un groupe topologique est un groupe G , muni d'une topologie pour laquelle les applications produit $G \times G \rightarrow G$ et inverse $G \rightarrow G$ sont continues.

Tous les groupes topologiques que nous serons amenés à manipuler seront localement compacts.

Exemple 3.1.2. Les groupes \mathbb{R}^d et \mathbb{T}^d sont des groupes topologiques localement compacts abéliens. Pour $d \geq 1$, le groupe $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$, vu comme un sous-ensemble ouvert de l'espace des matrices carrées de taille d , et le groupe $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$, vu comme un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$, sont des groupes topologiques localement compacts (non abéliens dès que $d \geq 2$). Le groupe $\mathrm{O}(d)$ des matrices orthogonales de taille d est compact.

Remarque 3.1.3. Plus généralement, un groupe de Lie est un groupe G , muni d'une structure de variété différentielle pour laquelle les applications produit

$G \times G \rightarrow G$ et inverse $G \rightarrow G$ sont lisses. Tous les exemples de groupes topologiques localement compacts que nous venons de donner sont des groupes de Lie. Nous verrons plus loin des exemples intéressants de groupes topologiques localement compacts qui n'en sont pas.

Si G est un groupe topologique et g est un élément de G , nous noterons L_g l'application $G \rightarrow G, h \mapsto gh$ et R_g l'application $G \rightarrow G, h \mapsto hg$. Nous appellerons L_g la translation à gauche par g et R_g la translation à droite par g . Ce sont des homéomorphismes de G . En particulier, si V est un voisinage de e , gV et Vg sont des voisinages de g .

Étant donné un groupe topologique localement compact G et un sous-groupe fermé H , nous allons étudier la topologie quotient sur G/H . Pour cela, nous commençons par introduire un peu de vocabulaire sur les actions de groupes topologiques :

Définition 3.1.4. Soient X un espace topologique et G un groupe topologique. Nous dirons qu'une action de G sur X est continue si l'application associée $G \times X \rightarrow X$ est continue.

Exemple 3.1.5. L'action usuelle de $GL_d(\mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^d est continue.

Définition 3.1.6. Soient X un espace topologique localement compact et G un groupe topologique localement compact agissant continûment sur X . L'action est dite propre si, pour toute partie compacte K de X , l'ensemble

$$\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$$

est compact.

Exemple 3.1.7. L'action d'un groupe sur lui-même par translations est propre. L'action de $GL_d(\mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^d n'est pas propre, puisque le stabilisateur d'un point n'est pas compact.

Les quotients des actions propres ont un bon comportement :

Proposition 3.1.8. Soient X un espace topologique localement compact, G un groupe topologique localement compact agissant continûment sur X et $G \backslash X$ l'espace quotient de cet action, muni de la topologie quotient. Alors, la projection naturelle $\pi : X \rightarrow G \backslash X$ est une application ouverte. Si l'action est propre, l'espace $G \backslash X$ est localement compact (séparé).

Démonstration. Commençons par montrer que π est ouverte. Soit $U \subset X$ un ensemble ouvert. On a

$$\pi^{-1}\pi(U) = \{x \in X \mid Gx \cap U \neq \emptyset\} = \bigcup_{g \in G} gU.$$

Comme G agit par homéomorphismes, cet ensemble est ouvert, en tant que réunion d'ouverts, si bien que $\pi(U)$ est ouvert, par définition de la topologie quotient.

Supposons maintenant l'action propre. Montrons que l'espace $G \backslash X$ est séparé. Soient x et y dans X tels que $\pi(x) \neq \pi(y)$, c'est-à-dire tels que $y \notin Gx$. Comme l'application quotient est ouverte, il nous faut exhiber des voisinages \bar{U} de x et \bar{V} de y tels que $\bar{U} \cap G\bar{V} = \emptyset$. Soient U et V des voisinages compacts de x et y . Comme l'action est propre, l'ensemble $K = \{g \in G \mid U \cap gV \neq \emptyset\}$ est compact. Pour tout k dans K , comme $x \neq ky$, il existe un voisinage U_k de x et un voisinage W_k de ky tels que $U_k \cap W_k = \emptyset$. Comme l'action est continue, il existe un voisinage V_k de y dans X et un voisinage A_k de k dans G tels que $A_k V_k \subset W_k$. Comme l'ensemble K est compact, nous pouvons trouver des éléments k_1, \dots, k_n de K tels que $K \subset \bigcup_{p=1}^n A_{k_p}$. Posons alors

$$\bar{U} = U \cap \bigcap_{p=1}^n U_{k_p} \text{ et } \bar{V} = V \cap \bigcap_{p=1}^n V_{k_p}.$$

Pour tout g dans G , on a $\bar{U} \cap g\bar{V} = \emptyset$. En effet, si g n'appartient pas à K , on a $U \cap gV = \emptyset$. Sinon, il existe p tel que g appartienne à A_{k_p} ; on a alors $g\bar{V} \subset gV_{k_p} \subset W_{k_p}$ et, par définition, $W_{k_p} \cap U = \emptyset$. Il vient $\pi(\bar{U}) \cap \pi(\bar{V}) = \emptyset$ et $G \backslash X$ est séparé.

Enfin, soient x dans X et U un voisinage compact de x . Comme l'application π est ouverte, $\pi(U)$ est un voisinage compact de $\pi(x)$, si bien que $G \backslash X$ est localement compact. \square

Corollaire 3.1.9. *Soient G un groupe topologique localement compact et H un sous-groupe fermé de G . Alors, l'espace quotient G/H , muni de la topologie quotient, est un espace localement compact (séparé). Si H est distingué, sa structure naturelle de groupe en fait un groupe topologique localement compact.*

Exemple 3.1.10. L'espace $\mathbb{R}^d - \{0\}$ peut être vu comme le quotient de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ par le stabilisateur de $(1, 0, \dots, 0)$. Le tore \mathbb{T}^d est le quotient de \mathbb{R}^d par \mathbb{Z}^d .

Démonstration. Considérons l'action de H sur G par translations à droite : pour tout h dans H , l'élément h agit sur G par l'application $R_{h^{-1}}$ (l'inverse permet de faire de cette action une action à gauche). Pour tout sous-ensemble compact K de G , on a

$$\{h \in H \mid R_{h^{-1}}K \cap K \neq \emptyset\} = H \cap (K^{-1}K),$$

qui est un sous-ensemble compact de H . Le corollaire découle alors de la proposition 3.1.8, puisque G/H est précisément le quotient de G par cette action. \square

3.2 Mesure de Haar

Nous allons à présent construire, sur tout groupe topologique localement compact, une mesure qui joue le rôle de la mesure de Lebesgue de \mathbb{R} ou de la mesure de comptage de \mathbb{Z} .

Soit G un groupe topologique localement compact.

Théorème 3.2.1 (Haar, 1933). *Il existe une mesure de Radon non nulle μ sur G qui est invariante par les translations à gauche de G . Toute autre mesure de Radon invariante à gauche sur G est proportionnelle à μ*

Définition 3.2.2. La mesure de Haar (à gauche) de G est son unique mesure de Radon invariante à gauche (à un scalaire près).

Généralement, après avoir choisi une mesure de Haar μ sur G , nous écrivons, pour toute fonction μ -intégrable φ sur G , $\int_G \varphi(g)dg$ pour $\int_G \varphi(g)d\mu(g)$.

Exemple 3.2.3. La mesure de Haar de \mathbb{R}^d est sa mesure de Lebesgue. La mesure de Haar de \mathbb{T}^d est l'image sur \mathbb{T}^d de la restriction de la mesure de Lebesgue à $[0, 1]^d$. La mesure de Haar de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ est $\chi\lambda$ où λ est la restriction à $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ de la mesure de Lebesgue de l'espace des matrices carrées et χ est la fonction $g \mapsto |\det g|^{-d}$. En particulier, la mesure de Haar du groupe \mathbb{R}^* est la restriction de la mesure de Lebesgue de \mathbb{R} , multipliée par la fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|}$.

Exemple 3.2.4. Plus généralement, si G est un groupe de Lie de dimension n et ω_e est une forme n -linéaire alternée (non nulle) sur l'espace tangent à G en e , on note, pour tout g dans G , ω_g la forme n -linéaire alternée $(L_g)_*\omega_e$ sur l'espace tangent à G en g . Alors, la n -forme $\omega : g \mapsto \omega_g$ est lisse et la mesure associée est la mesure de Haar de G .

Le théorème 3.2.1 est, en un certain sens, superflu : en effet, comme on l'a vu dans les exemples, la mesure de Haar d'un groupe localement compact concret est explicite !

L'idée de la démonstration est d'estimer la mesure d'un ensemble compact K par le nombre minimal de translatés à gauche d'un petit ensemble compact U d'intérieur non vide qu'il faut pour recouvrir K . Après une normalisation convenable, la mesure s'obtient en diminuant la taille de U . Commençons par étudier ce processus de recouvrement.

Lemme 3.2.5. *Soit U une partie compacte d'intérieur non vide de G with nonempty interior. Pour toute partie compacte K de G , on note $(K : U)$ le plus petit entier p tel qu'il existe g_1, \dots, g_p dans G avec $K \subset g_1U \cup \dots \cup g_pU$. Alors on a*

- (i) pour toute partie compacte K de G et pour tout g dans G , $(gK : U) = (K : U)$.
- (ii) pour toutes parties compactes $K \subset L$ de G , $(K : U) \leq (L : U)$.
- (iii) pour toutes parties compactes K et L de G , $(K \cup L : U) \leq (K : U) + (L : U)$ et, si $(KU^{-1}) \cap (LU^{-1}) = \emptyset$, $(K \cup L : U) = (K : U) + (L : U)$.
- (iv) pour toute partie compacte d'intérieur non vide V de G , $(K : U) \leq (K : V)(V : U)$.

Démonstration. (i) et (ii) sont immédiats.

L'inégalité dans (iii) est claire. Pour le cas d'égalité, on remarque que

$$KU^{-1} = \{g \in G \mid gU \cap K \neq \emptyset\} \text{ and } LU^{-1} = \{g \in G \mid gU \cap L \neq \emptyset\},$$

si bien que, si $(KU^{-1}) \cap (LU^{-1}) = \emptyset$, pour tous, g_1, \dots, g_p dans G tels que $K \cup L \subset g_1U \cup \dots \cup g_pU$, les ensembles

$$Q = \{1 \leq q \leq p \mid g_qU \cap K \neq \emptyset\} \text{ et } R = \{1 \leq r \leq p \mid g_rU \cap L \neq \emptyset\},$$

sont disjoints. Comme $K \subset \bigcup_{q \in Q} (g_qU \cap K)$ et $L \subset \bigcup_{r \in R} (g_rU \cap L)$, on a $\text{card } Q \geq (K : U)$ et $\text{card } R \geq (L : U)$, d'où

$$p \geq \text{card } Q + \text{card } R \geq (K : U) + (L : U),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Enfin, établissons (iv). Supposons $K \subset g_1V \cup \dots \cup g_pV$ et $V \subset h_1U \cup \dots \cup h_qU$; alors

$$K \subset \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq r}} g_i h_j U,$$

si bien que $pq \geq (K : U)$, ce qu'il fallait démontrer. \square

On peut séparer les parties compactes de G :

Lemme 3.2.6. *Soient K et L des parties compactes de G avec $K \cap L = \emptyset$. Il existe un voisinage U de e dans G tel que $(KU) \cap (LU) = \emptyset$.*

Démonstration. L'ensemble $L^{-1}K$ est une partie compacte de G qui ne contient pas e . Il existe donc un voisinage V de e tel que $V \cap L^{-1}K = \emptyset$. Il existe un voisinage U de e tel que $UU^{-1} \subset V$, d'où $UU^{-1} \cap L^{-1}K = \emptyset$, qui équivaut à $(KU) \cap (LU) = \emptyset$. \square

Démonstration du théorème 3.2.1. Commençons par établir l'existence de la mesure. Nous utiliserons la version suivante du théorème de représentation de Riesz : si X est un espace localement compact et μ est une fonction positive sur l'ensemble des parties compactes de X avec

- (i) pour toutes parties compactes $K \subset L$ dans X , $\mu(K) \leq \mu(L)$,
- (ii) pour toutes parties compactes K et L dans X , $\mu(K \cup L) \leq \mu(K) + \mu(L)$ et, si $K \cap L = \emptyset$, $\mu(K \cup L) = \mu(K) + \mu(L)$,

il existe une unique mesure de Radon sur X qui prolonge μ . D'après le lemme 3.2.5 les fonctions $K \mapsto (K : U)$ satisfont quasiment ces hypothèses, à celle d'additivité près. Pour y remédier, nous allons diminuer la taille de U et utiliser le lemme 3.2.6.

Précisons cette démarche. Fixons une fois pour toutes une partie compacte d'intérieur non vide V de G . Soit \mathcal{K} l'ensemble des parties compactes de G et \mathcal{M} l'ensemble des fonctions $m : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que,

- (i) pour tous K dans \mathcal{K} et g dans G , $m(gK) = m(K)$,
- (ii) pour tous K, L dans \mathcal{K} , avec $K \subset L$, $m(K) \leq m(L)$,
- (iii) pour tous K, L dans \mathcal{K} , $m(K \cup L) \leq m(K) + m(L)$,
- (iv) pour tout K dans \mathcal{K} , $0 \leq m(K) \leq (K : V)$.

Munissons \mathcal{M} de la topologie produit. D'après le théorème de Tychonoff, \mathcal{M} est compact. Pour tout voisinage compact U de e , notons m_U la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ K &\mapsto \frac{(K : U)}{(V : U)}. \end{aligned}$$

On a $m_U(V) = 1$ et, d'après le lemme 3.2.5, $m_U \in \mathcal{M}$. On pose $M_U = \{m_W | W \subset U\}$. Pour tous voisinages compacts U_1, \dots, U_p de e , on a

$$M_{U_1 \cap \dots \cap U_p} \subset M_{U_1} \cap \dots \cap M_{U_p}.$$

Par conséquent, par compacité, quand U parcourt l'ensemble des voisinages compacts de e , l'intersection des adhérences des ensembles M_U dans \mathcal{M} est non vide. Soit μ un élément de cette intersection. On a $\mu(V) = 1$, donc μ est non nul. De plus, si K et L sont des parties compactes de G avec $K \cap L = \emptyset$, d'après le lemme 3.2.6, il existe un voisinage U de e tel que $(KU^{-1}) \cap (LU^{-1}) = \emptyset$, si bien que, d'après le lemme 3.2.5, pour tout $W \subset U$, $m_W(K \cup L) = m_W(K) + m_W(L)$. On a donc $\mu(K \cup L) = \mu(K) + \mu(L)$ et, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique mesure de Radon qui prolonge μ . Comme μ est invariante par translations à gauche, ce prolongement l'est aussi, par unicité.

La démonstration de l'unicité de la mesure de Haar repose sur un calcul. Choisissons une mesure de Radon invariante à gauche μ sur G . Remarquons que, si K est une partie compacte de G et U une partie ouverte, il existe g_1, \dots, g_p dans G tels que $K \subset g_1U \cup \dots \cup g_pU$ si bien que $\mu(K) \leq p\mu(U)$. En particulier, on a $\mu(U) \neq 0$, puisque $\mu \neq 0$. Ainsi, si ψ est une fonction continue positive et à support compact sur G , la fonction $\theta : h \mapsto \int_G \psi(gh) d\mu(g)$ ne prend que des valeurs strictement positives sur G . De plus, comme ψ est uniformément continue, cette fonction est continue. Soit à présent ν une autre mesure de Radon invariante à gauche sur G . D'après le théorème de Fubini la mesure $\mu \otimes \nu$ sur $G \times G$ est invariante par les transformations $(g, h) \mapsto (g, gh)$ et $(g, h) \mapsto (h^{-1}g, g)$, donc par la transformation $(g, h) \mapsto (h^{-1}, gh)$, qui est leur produit. Par conséquent, si φ est une fonction continue à support compact sur G , on a, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_G \varphi(g) d\mu(g) \int_G \psi(h) d\nu(h) &= \int_{G \times G} \varphi(h^{-1}) \psi(gh) d\mu(g) d\nu(h) \\ &= \int_G \varphi(h^{-1}) \theta(h) d\nu(h). \end{aligned}$$

En remplaçant φ par la fonction continue $h \mapsto \varphi(h^{-1})\theta(h)$, on obtient, pour toute fonction continue à support compact φ ,

$$\int_G \frac{\varphi(g^{-1})}{\theta(g^{-1})} d\mu(g) \int_G \psi(h) d\nu(h) = \int_G \varphi(h) d\nu(h).$$

En appliquant ce calcul au cas où $\nu = \mu$, on obtient aussi

$$\int_G \frac{\varphi(g^{-1})}{\theta(g^{-1})} d\mu(g) = \frac{1}{\int_G \psi(h) d\mu(h)} \int_G \varphi(h) d\mu(h),$$

si bien que, pour tout ν , pour toute fonction continue à support compact φ , on a

$$\int_G \varphi(h) d\nu(h) = \frac{\int_G \psi(h) d\nu(h)}{\int_G \psi(h) d\mu(h)} \int_G \varphi(h) d\mu(h),$$

et les mesures sont proportionnelles. \square

Étudions à présent l'action de G à droite sur les mesures invariantes à gauche.

Proposition 3.2.7. *Il existe un unique homomorphisme continu $\Delta_G : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour toute mesure de Haar à gauche μ sur G , pour tout g dans G , on ait $(R_{g^{-1}})_*\mu = \Delta_G(g)\mu$, c'est-à-dire, pour toute fonction continue à support compact φ sur G ,*

$$\int_G \varphi(hg^{-1}) dh = \Delta_G(g) \int_G \varphi(h) dh.$$

De plus, pour toute telle fonction φ , on a

$$\int_G \varphi(g^{-1}) dg = \int_G \frac{\varphi(g)}{\Delta_G(g)} dg.$$

Définition 3.2.8. On appelle Δ_G la fonction modulaire de G . On dit que G est unimodulaire si $\Delta_G = 1$, c'est-à-dire si G admet des mesures invariantes à gauche et à droite.

Nous écrirons parfois Δ pour Δ_G .

Exemple 3.2.9. Les groupes abéliens sont évidemment unimodulaires. Les groupes discrets sont unimodulaires : leurs mesures de Haar sont les mesures de comptage, qui sont invariantes par toute permutation. Les groupes compacts sont unimodulaires : en effet, si G est compact, si μ est une mesure de Haar à gauche de G , μ est finie et, pour tout g dans G , on a $\mu(G) = \mu(Gg) = \mu(R_g(G))$ si bien que $\Delta_G(g) = 1$. Le calcul de sa mesure de Haar montre que le groupe $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ est unimodulaire. Il existe cependant des groupes non unimodulaires ! Considérons le groupe P des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

avec $a, c \neq 0$ et b dans \mathbb{R} . Alors, dans ce système de coordonnées, la mesure $\frac{1}{|a^2c|} da db dc$ est invariante à gauche, mais elle n'est pas invariante à droite. On vérifie que, pour $a, c \neq 0$ et b dans \mathbb{R} , on a

$$\Delta_P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \left| \frac{c}{a} \right|.$$

Démonstration de la proposition 3.2.7. Pour tout g dans G , $(R_{g^{-1}})_*\mu$ est une mesure invariante à gauche non nulle sur G . D'après le théorème 3.2.1, elle est de la forme $\Delta_G(g)\mu$, pour un unique $\Delta_G(g) > 0$. Par unicité, l'application Δ_G est un homomorphisme $G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Enfin, choisissons une fonction continue positive à support compact non nulle φ sur G . Pour tout h dans G , on a

$$\Delta_G(g) = \frac{\int_G \varphi(hg^{-1}) dh}{\int_G \varphi(h) dh},$$

si bien que, comme φ est uniformément continue, Δ_G est continu.

Pour la deuxième formule, rappelons que, d'après la démonstration de l'unicité dans le théorème 3.2.1, pour toutes fonctions continues à support compact φ et ψ sur G , on a

$$\int_G \varphi(g) dg \int_G \psi(h) dh = \int_{G \times G} \varphi(h^{-1}) \psi(gh) dg dh.$$

Par conséquent, d'après le théorème de Fubini et la définition de Δ_G , on a

$$\begin{aligned} \int_G \varphi(g) dg \int_G \psi(h) dh &= \int_G \varphi(h^{-1}) \left(\int_G \psi(gh) dg \right) dh \\ &= \int_G \psi(g) dg \int_G \varphi(h^{-1}) \Delta_G(h)^{-1} dh, \end{aligned}$$

d'où la formule. \square

Nous allons à présent étudier les mesures sur les espaces quotients de G . Soit H un sous-groupe fermé de G . Fixons des mesures de Haar à gauche sur G et H . Pour toute fonction continue à support compact φ sur G , on pose, pour g dans G ,

$$\bar{\varphi}(g) = \int_H \varphi(gh) dh.$$

Par construction, cette fonction est invariante à droite par H , si bien qu'on peut la considérer comme une fonction continue à support compact sur l'espace homogène G/H . Par ailleurs, remarquons que, pour tout h dans H , on a

$$\overline{\varphi \circ R_{h^{-1}}}(g) = \Delta_H(h) \bar{\varphi}(g).$$

Proposition 3.2.10. *L'application*

$$\begin{aligned} \varphi &\mapsto \bar{\varphi} \\ \mathcal{C}_c^0(G) &\rightarrow \mathcal{C}_c^0(G/H) \end{aligned}$$

est surjective. Si ν est une mesure de Radon sur G telle que, pour tout h dans H , $(R_{h^{-1}})_*\nu = \Delta_H(h)\nu$, il existe une unique mesure de Radon $\bar{\nu}$ sur G/H telle que, pour tout φ dans $\mathcal{C}_c^0(G)$, on ait

$$\int_G \varphi d\nu = \int_{G/H} \bar{\varphi} d\bar{\nu}.$$

Cette correspondance établit une bijection entre l'ensemble des mesures de Radon sur G/H et l'ensemble des mesures de Radon ν sur G telles que, pour tout h dans H , $(R_{h^{-1}})_*\nu = \Delta_H(h)\nu$.

Nous aurons encore besoin d'un lemme purement topologique :

Lemme 3.2.11. *Soit K un sous-ensemble compact de G/H . Il existe une fonction continue à support compact positive Φ sur G telle que, pour tout x dans K , il existe g dans G avec $gH = x$ et $\Phi(g) > 0$.*

Démonstration. Soient $\pi : G \rightarrow G/H$ la projection canonique et V un voisinage compact de e dans G . On a $K = \bigcup_{\pi(g) \in K} \pi(gV)$. Par conséquent, il existe g_1, \dots, g_p dans G tels que $K \subset \pi(g_1V) \cup \dots \cup \pi(g_pV)$. Soit Ψ une

fonction continue positive à support compact sur G qui soit > 0 sur V . On pose, pour tout g dans G ,

$$\Phi(g) = \sum_{i=1}^p \Psi(g_i^{-1}g).$$

Alors, pour tout x dans K , il existe g dans G et $1 \leq i \leq p$ tels que $\pi(x) = g$ et $g \in g_i V$, si bien que $\Phi(g) \geq \Psi(g_i^{-1}g) > 0$. \square

Démonstration de la proposition 3.2.10. Montrons que l'application $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ est surjective. Soit ψ dans $\mathcal{C}_c^0(G/H)$. Soient K le support de ψ et Φ comme dans le lemme 3.2.11. Par construction, le support de la fonction continue $g \mapsto \Phi(g)\psi(gH)$ est contenu dans l'ensemble ouvert $\{g \in G | \Phi(g) > 0\}$. Pour tout g dans G , posons

$$\varphi(g) = \frac{\Phi(g)}{\bar{\Phi}(g)}\psi(gH)$$

si $\bar{\Phi}(g) > 0$ et $\varphi(g) = 0$ sinon. Alors, φ est une fonction continue à support compact sur G et $\bar{\varphi} = \psi$.

Soient λ une mesure de Radon sur G/H et $\tilde{\lambda}$ la mesure de Radon sur G telle que, pour tout φ dans $\mathcal{C}_c^0(G)$, on ait $\int_G \varphi d\tilde{\lambda} = \int_{G/H} \bar{\varphi} d\lambda$. Pour tous h dans H et φ dans $\mathcal{C}_c^0(G)$, on a

$$\begin{aligned} \int_G \varphi d((R_{h^{-1}})_*\tilde{\lambda}) &= \int_G \varphi \circ R_{h^{-1}} d\tilde{\lambda} = \int_{G/H} \overline{\varphi \circ R_{h^{-1}}} d\lambda \\ &= \Delta_H(h) \int_{G/H} \bar{\varphi} d\lambda = \Delta_H(h) \int_G \varphi d\tilde{\lambda}. \end{aligned}$$

De plus, comme l'application $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ est surjective, l'application $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$ est injective.

Il nous reste à montrer que cette application est surjective. Soit ν une mesure de Radon sur G telle que, pour tout h dans H , $(R_{h^{-1}})_*\nu = \Delta_H(h)\nu$ et montrons qu'il existe une mesure de Radon λ sur G/H telle que $\tilde{\lambda} = \nu$. Pour ψ dans $\mathcal{C}_c^0(G/H)$, on doit avoir $\int_{G/H} \psi d\lambda = \int_G \varphi d\nu$ où φ est dans $\mathcal{C}_c^0(G)$ et $\bar{\varphi} = \psi$. Par conséquent, il s'agit seulement de vérifier que, si φ est dans $\mathcal{C}_c^0(G)$ et $\bar{\varphi} = 0$, on a $\int_G \varphi d\nu = 0$. Pour cela, nous allons essentiellement appliquer la technique qui nous a servi pour établir l'unicité de la mesure

de Haar. En effet, si φ et ψ sont dans $\mathcal{C}_c^0(G)$, on a, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_G \overline{\varphi}(g)\psi(g)d\nu(g) &= \int_H \left(\int_G \varphi(gh)\psi(g)d\nu(g) \right) dh \\ &= \int_H \frac{1}{\Delta_H(h)} \left(\int_G \varphi(g)\psi(gh^{-1})d\nu(g) \right) dh \\ &= \int_G \varphi(g) \left(\int_H \frac{\psi(gh^{-1})}{\Delta_H(h)} dh \right) d\nu(g) \\ &= \int_G \varphi(g)\overline{\psi}(g)d\nu(g). \end{aligned}$$

Or, si $\overline{\varphi} = 0$, on a, pour tout ψ , $\int_G \varphi\overline{\psi}d\nu = 0$. En particulier, comme l'application $\psi \mapsto \overline{\psi}$ est surjective, il existe ψ dans $\mathcal{C}_c^0(G)$ tel que $\overline{\psi} = 1$ sur le support de φ . On a alors $\int_G \varphi d\nu = 0$, ce qu'il fallait démontrer. \square

Corollaire 3.2.12. *Il existe une mesure de Radon G -invariante non nulle sur G/H si et seulement si, pour tout h dans H , on a $\Delta_G(h) = \Delta_H(h)$. Dans ce cas, cette mesure ν est unique à multiplication par un scalaire > 0 près et peut être normalisée de sorte que, pour tout φ dans $\mathcal{C}_c^0(G)$, on ait*

$$\int_G \varphi(g)dg = \int_{G/H} \overline{\varphi}d\nu.$$

Démonstration. Soit $\nu \mapsto \overline{\nu}$ la correspondance de la proposition 3.2.10. Pour g dans G , soit toujours L_g la translation par g dans G/H . Alors, pour toute mesure de Radon ν sur G , on a $(\overline{L_g})_*\overline{\nu} = (L_g)_*\overline{\nu}$. Par conséquent, $\overline{\nu}$ est G -invariante si et seulement si ν est une mesure de Haar de G . Mais alors, dans ce cas, on a, pour tout h dans H , $(R_{h^{-1}})_*\nu = \Delta_G(h)\nu$. Par conséquent, d'après la proposition 3.2.10, une telle mesure ν existe si et seulement si $\Delta_G = \Delta_H$ sur H . Si c'est le cas, la formule s'applique, par définition de $\overline{\nu}$. \square

Corollaire 3.2.13. *Supposons G et H unimodulaires. Alors, l'espace quotient G/H admet une unique (à multiplication près) mesure de Radon G -invariante.*

Exemple 3.2.14. Soit P comme dans l'exemple 3.2.9. Alors, l'espace quotient $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/P$ est la droite projective $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. On vérifie aisément que l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ ne préserve pas de mesure de Radon non nulle.

3.3 Réseaux

Soit G un groupe topologique localement compact.

Proposition 3.3.1. *Soit Γ un sous-groupe de G . Alors Γ est discret pour la topologie induite si et seulement si il existe un voisinage U de e dans G tel que, pour tous $\gamma \neq \eta$ dans Γ , $\gamma U \cap \eta U = \emptyset$. Dans ce cas, Γ est fermé dans G .*

Remarque 3.3.2. En général, un sous-ensemble discret d'un espace topologique n'est pas fermé, comme par exemple l'ensemble $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$ dans \mathbb{R} .

Démonstration. Si un tel voisinage existe, alors Γ est discret, puisque, pour tout γ dans Γ , on a $\Gamma \cap \gamma U = \{\gamma\}$. Réciproquement, supposons Γ discret. Alors, il existe un voisinage V de e dans G tel que $\Gamma \cap V = \{e\}$. Soit U un voisinage de e dans G tel que $UU^{-1} \subset V$. Pour tous γ, η dans Γ , si u et v sont dans U et $\gamma u = \eta v$, on a $\eta^{-1}\gamma = vu^{-1} \in V$, donc $\eta = \gamma$, ce qu'il fallait démontrer.

Supposons Γ discret et soit toujours U comme ci-dessus. Soit g dans G , $g \notin \Gamma$. Nous voulons construire un voisinage de g qui ne rencontre pas Γ . Si $g \notin \Gamma U$, on a $gU^{-1} \cap \Gamma = \emptyset$. Si $g \in \Gamma U$, il existe un unique γ dans Γ tel que $g \in \gamma U$. Comme $g \neq \gamma$, il existe un voisinage W de e tel que $\gamma \notin gW$. On a $g(U^{-1} \cap W) \cap \Gamma = \emptyset$, d'où le résultat. \square

Exemple 3.3.3. Soit e_1, \dots, e_d la base canonique de \mathbb{R}^d . Pour tout $0 \leq r \leq d$, le groupe $\mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_r$ est discret dans \mathbb{R}^d . Le groupe $\text{GL}_d(\mathbb{Z})$ est discret dans $\text{GL}_d(\mathbb{R})$.

Définition 3.3.4. Un sous-groupe discret Γ de G est cocompact (ou uniforme) si l'espace quotient G/Γ est compact.

Exemple 3.3.5. Pour $0 \leq r \leq d$, le groupe $\mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_r$ est cocompact dans \mathbb{R}^d si et seulement si $r = d$. Le groupe $\text{GL}_d(\mathbb{Z})$ n'est pas cocompact dans $\text{GL}_d(\mathbb{R})$. Soit H le groupe de Heisenberg, c'est-à-dire le groupe des matrices carrées de taille 3 de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec x, y, z dans \mathbb{R} , et soit Λ le sous-groupe de H constitué des éléments pour lesquels x, y, z sont dans \mathbb{Z} . Alors Λ est cocompact dans H .

Proposition 3.3.6. *Supposons que G admet un sous-groupe discret cocompact Γ . Alors G est unimodulaire et l'espace quotient G/Γ possède une unique mesure de probabilité borélienne G -invariante.*

Démonstration. Remarquons que, d'après le corollaire 3.2.12, si une telle mesure de probabilité existe, elle est nécessairement unique.

Soit ν une mesure de Haar à droite sur G (par exemple, choisissons une mesure de Haar à gauche μ et posons, pour toute partie borélienne B de G , $\nu(B) = \mu(B^{-1})$). On vérifie aisément que, pour tout g dans G , on a $(L_g)_*\nu = \Delta(g)\nu$, où Δ est la fonction modulaire de G . Comme ν est invariante à droite, pour tout γ dans Γ , on a $(R_{\gamma^{-1}})_*\nu = \nu$. Comme Γ est unimodulaire (puisque il est discret), d'après la proposition 3.2.10, il existe une unique mesure de Radon $\bar{\nu}$ sur G/Γ telle que, pour tout φ dans $\mathcal{C}_c^0(G)$, on ait $\int_{G/\Gamma} \bar{\varphi} d\bar{\nu} = \int_G \varphi d\nu$, où on a posé, pour g dans G ,

$$\bar{\varphi}(g\Gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(g\gamma).$$

Par unicité, pour tout g dans G , on a $(L_g)_*\bar{\nu} = \Delta(g)\bar{\nu}$. Comme G/Γ est compact, $\bar{\nu}$ est finie et on a aussi $\bar{\nu}(G/\Gamma) = ((L_g)_*\bar{\nu})(G/\Gamma)$, si bien que $\Delta(g) = 1$. Ainsi, G est unimodulaire et $\bar{\nu}$ est G -invariante. \square

Définition 3.3.7. Un sous-groupe discret Γ de G est un réseau si l'espace quotient G/Γ admet une mesure borélienne G -invariante finie.

Exemple 3.3.8. Un sous-groupe discret cocompact est un réseau, d'après la proposition 3.3.6. Nous verrons que, pour $d \geq 2$, le groupe $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ est un réseau de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$, mais qu'il n'est pas cocompact. L'existence de cet exemple est la raison essentielle pour laquelle nous développons l'étude des réseaux en général et pas seulement dans le cas cocompact.

Remarque 3.3.9. Si Γ est un réseau de G , la probabilité borélienne G -invariante de G/Γ est nécessairement unique, d'après la proposition 3.2.12.

Proposition 3.3.10. *Supposons que G admet un réseau. Alors, G est unimodulaire.*

Démonstration. Soient Γ un réseau de G et Δ la fonction modulaire de G . Comme Γ est discret, il est unimodulaire et donc, d'après la proposition

3.2.10, on a $\Delta = 1$ sur Γ , si bien que, si N est le noyau du morphisme continu $\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, on a $\Gamma \subset N$. Soient ν la probabilité borélienne G -invariante de G/Γ et μ son image dans G/N par l'application naturelle $G/\Gamma \rightarrow G/N$. Alors μ est invariante par l'action à gauche de G sur G/N . Comme N est distingué dans G , G/N admet une structure naturelle de groupe topologique localement compact et G agit à gauche sur G/N à travers l'action à gauche de G/N sur lui-même. Par conséquent, la mesure de probabilité borélienne μ sur G/N est invariante par les translations à gauche de G/N , donc μ est la mesure de Haar de G/N . Comme elle est finie, G/N est compact. Comme Δ factorise à travers un morphisme continu $G/N \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $\Delta(G)$ est un sous-groupe compact de \mathbb{R}_+^* . On a donc $\Delta(G) = 1$ et G est unimodulaire. \square

Exemple 3.3.11. Le groupe P des exemples 3.2.9 et 3.2.14 n'admet pas de réseau.

Remarque 3.3.12. Si G est un groupe topologique localement compact et Γ est un réseau de G , pour tout g dans G , la translation à gauche par g induit un système dynamique mesuré dans G/Γ .

3.4 Exercices

3.4.1 Sous-groupes connexes, sous-groupes ouverts

Soit G un groupe topologique.

1. Montrer que la composante connexe de e dans G est un sous-groupe distingué de G .
2. Montrer que tout sous-groupe ouvert de G est fermé. Montrer que tout sous-groupe fermé d'indice fini est ouvert.
3. On suppose G connexe. Montrer que, si U est un voisinage de e , U engendre G .

3.4.2 Groupes compacts

Montrer qu'un groupe topologique localement compact G est de mesure de Haar finie si et seulement s'il est compact.

3.4.3 Limites projectives

Soit I un ensemble muni d'une relation d'ordre \prec telle que, pour tous i, j dans I , il existe k dans I avec $i \prec k$ et $j \prec k$. On suppose donnée une famille $(G_i)_{i \in I}$ de groupes et, pour tous $i \prec j$ dans I , un morphisme surjectif $\varphi_{i,j} : G_j \rightarrow G_i$ tel que, pour tous $i \prec j \prec k$ dans I , on ait $\varphi_{i,j} \circ \varphi_{j,k} = \varphi_{i,k}$. On dit alors que la famille $((G_i)_{i \in I}, (\varphi_{i,j})_{i \prec j})$ est un système projectif de groupes.

1. Soit p un nombre premier. Munissons \mathbb{N} de l'ordre usuel et, pour n dans \mathbb{N} , posons $P_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Pour tous $n \leq m$, notons $\varphi_{n,m}$ le morphisme naturel $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Montrer que $((P_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\varphi_{n,m})_{n \leq m})$ est un système projectif de groupes. On l'appelle le système p -adique.

2. Munissons \mathbb{N}^* de l'ordre de la divisibilité : pour tous entiers non nuls n et m , on pose $n|m$ si $\frac{m}{n}$ est un entier. Pour n dans \mathbb{N}^* , on note Q_n le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et, pour $n|m$, on note $\varphi_{n,m}$ le morphisme naturel $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que $((Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (\varphi_{n,m})_{n|m})$ est un système projectif de groupes. On l'appelle le système de Prüfer.

Si $((G_i)_{i \in I}, (\varphi_{i,j})_{i \prec j})$ est un système projectif de groupes, on définit sa limite projective comme le sous-groupe G des éléments $(g_i)_{i \in I}$ du groupe produit $\prod_{i \in I} G_i$ tels que, pour tous $i \prec j$ dans I , on a $\varphi_{i,j}(g_j) = g_i$. On note

$$G = \varprojlim_{i \in I} G_i.$$

Supposons que, pour tout i dans I , G_i soit un groupe topologique compact et que, pour $i \prec j$, le morphisme $(\varphi_{i,j})_{i \prec j}$ soit continu. On munit alors G de la topologie induite par la topologie produit de $\prod_{i \in I} G_i$.

3. Montrer que G est un groupe topologique compact et que, pour tout i dans I , le morphisme de coordonnée $\psi_i : G \rightarrow G_i$ est surjectif. Montrer que, pour $i \prec j$ dans I , on a $\varphi_{i,j} \circ \psi_j = \psi_i$.

4. Soit H un groupe topologique compact et, pour tout i dans I , soit $\theta_i : H \rightarrow G_i$ un morphisme continu tel que, pour $i \prec j$ dans I , on ait $\varphi_{i,j} \circ \theta_j = \theta_i$. Montrer qu'il existe un unique morphisme continu $\theta : H \rightarrow G$ tel que, pour i dans I , on ait $\theta_i = \psi_i \circ \theta$.

5. On munit chacun des $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, de la topologie discrète et on note \mathbb{Z}_p la limite projective du système p -adique. On appelle \mathbb{Z}_p le groupe des entiers p -adiques. Montrer qu'il existe un unique morphisme $\theta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p$ tel que, pour tout n dans \mathbb{N} , la composante de $\theta(1)$ dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ soit l'image de 1 dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Montrer que θ est injectif et d'image dense.

6. On munit chacun des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, de la topologie discrète et on note $\hat{\mathbb{Z}}$ la limite projective du système de Prüfer. On appelle $\hat{\mathbb{Z}}$ le groupe des entiers

de Prüfer. Montrer qu'il existe un unique morphisme $\theta : \mathbb{Z} \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ tel que, pour tout n dans \mathbb{N}^* , la composante de $\theta(1)$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit l'image de 1 dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que θ est injectif et d'image dense.

7. Montrer qu'on a

$$\hat{\mathbb{Z}} \simeq \prod_{p \text{ premier}} \mathbb{Z}_p$$

(en tant que groupes topologiques).

3.4.4 Systèmes de Kronecker

Soient G un groupe compact abélien et x un élément de G .

1. On suppose que le sous-groupe engendré par x est dense dans G . Montrer que la translation $L_x : y \mapsto x + y, G \rightarrow G$ est minimale et uniquement ergodique et que son unique mesure invariante est la mesure de Haar de G .

2. Dans le cas général, notons H l'adhérence dans G du sous-groupe engendré par x . Montrer que les mesures invariantes ergodiques de la translation L_x sont les mesures de la forme $(L_y)_*\nu$ où y est un élément de G et ν est la mesure de Haar de H .

3. Montrer que l'application $x \mapsto x + 1, \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ est minimale et uniquement ergodique. Montrer que l'application $x \mapsto x + 1, \hat{\mathbb{Z}} \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ est minimale et uniquement ergodique.

3.4.5 Groupes topologiquement cycliques

Soit G un groupe topologique localement compact. On suppose qu'il existe un élément g de G tel que le sous-groupe engendré par G soit dense dans G , mais ne soit pas égal à G . On se propose de montrer qu'alors G est compact.

1. Montrer que, pour tout voisinage U de e dans G , il existe un entier positif n tel que g^n appartienne à U .

2. Montrer que l'ensemble $g^{\mathbb{N}}$ est dense dans G .

3. Montrer que G est compact.

3.4.6 Dynamique des isométries

Soient X un espace métrique compact et G le groupe des isométries de X , c'est-à-dire le groupe des homéomorphismes g de X tels que, pour tous x

et y dans X , on ait $d(gx, gy) = d(x, y)$. On munit G de la distance uniforme, c'est-à-dire que, pour g et h dans G , on pose

$$d_\infty(g, h) = \max_{x \in X} d(gx, hx).$$

1. Montrer que cette distance munit G d'une topologie de groupe compact.
2. Soit g dans G . Montrer que, pour tout x dans X , l'action de g dans l'adhérence de la g -orbite de x est minimale.

3.4.7 Sous-groupes de \mathbb{R}^d

Soit Γ un sous-groupe fermé de \mathbb{R}^d .

1. On suppose Γ discret. On choisit un élément $x \neq 0$ de Γ . Montrer que l'image de Γ dans l'espace vectoriel quotient $\mathbb{R}^d/(\mathbb{R}x)$ est discrète. En déduire, par récurrence sur d , qu'il existe $r \leq d$ et une famille \mathbb{R} -libre e_1, \dots, e_r dans Γ avec

$$\Gamma = \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_r.$$

2. On suppose que Γ n'est pas discret. Montrer que Γ contient une droite vectorielle.
3. En général, montrer qu'il existe des entiers naturels r, s avec $r + s \leq d$ et une famille \mathbb{R} -libre e_1, \dots, e_{r+s} dans Γ avec

$$\Gamma = \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_r \oplus \mathbb{R}e_{r+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}e_{r+s}.$$

4. Montrer que Γ est un réseau dans \mathbb{R}^d si et seulement s'il est discret et cocompact et que, dans ce cas, il existe g dans $\text{GL}_d(\mathbb{R})$ avec $\Gamma = g\mathbb{Z}^d$.

3.4.8 Réseaux dans les sous-groupes

Soient G un groupe topologique localement compact et Γ un sous-groupe discret de G .

1. Soit (g_n) une suite d'éléments de G . On suppose qu'il existe une suite (γ_n) d'éléments de $\Gamma \setminus \{e\}$ avec $g_n \gamma_n g_n^{-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e$. Montrer que la suite $(g_n \Gamma)$ tend vers l'infini dans G/Γ .
2. Montrer que, si Γ est un réseau de G , si la suite $(g_n \Gamma)$ tend vers l'infini dans G/Γ , il existe une suite (γ_n) d'éléments de $\Gamma \setminus \{e\}$ avec $g_n \gamma_n g_n^{-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e$.

Soit H un sous-groupe fermé de G . On suppose que $H \cap \Gamma$ est un réseau de H .

3. Montrer que l'application naturelle $H/(H \cap \Gamma) \rightarrow G/\Gamma$ est propre.
4. Montrer que l'application naturelle $\Gamma/(H \cap \Gamma) \rightarrow G/H$ est propre. En déduire que $(\Gamma H)/H$ est discret et fermé dans G/H .

3.4.9 Réseaux et sous-groupes distingués

Soient G un groupe topologique localement compact et N un sous-groupe distingué fermé de G . On pose $\overline{G} = G/N$ et on note $\pi : G \rightarrow \overline{G}$ l'application naturelle.

1. Soit μ une mesure de Haar de N . Montrer qu'il existe un morphisme continu $\chi : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout g dans G , on ait $(\text{Ad}_g)_*\mu = \chi(g)\mu$, où Ad_g est l'application $h \mapsto ghg^{-1}$. Montrer qu'on a $\Delta_G = \chi(\Delta_{\overline{G}} \circ \pi)$.

Soit Γ un sous-groupe discret de G tel que $N \cap \Gamma$ soit un réseau de N .

2. Montrer que $\overline{\Gamma} = \pi(\Gamma)$ est un sous-groupe discret de \overline{G} .

On suppose dorénavant que $\overline{\Gamma}$ est un réseau de \overline{G} . On va montrer que Γ est un réseau de G .

3. Montrer que G est unimodulaire.
3. Montrer que l'application naturelle $N/(N \cap \Gamma) \rightarrow G/\Gamma$ est propre.

On note μ l'image par cette application de la probabilité borélienne N -invariante de $N/N \cap \Gamma$. Soit φ une fonction continue à support compact sur G/Γ . Pour tout g dans G , on pose

$$\overline{\varphi}(g) = \int_{G/\Gamma} \varphi(gx) d\mu(x).$$

4. Montrer que $\overline{\varphi}$ est ΓN -invariant à droite.

Soient ν la probabilité borélienne \overline{G} -invariante de $\overline{G}/\overline{\Gamma}$ et λ l'unique probabilité borélienne sur G/Γ telle que, pour tout φ dans $\mathcal{C}_c^0(G/\Gamma)$, on ait

$$\int_{G/\Gamma} \varphi d\lambda = \int_{\overline{G}/\overline{\Gamma}} \overline{\varphi} d\nu.$$

5. Montrer que λ est G -invariante et que Γ est un réseau de G .
6. Montrer que, si $N \cap \Gamma$ est cocompact dans N et $\overline{\Gamma} = \pi(\Gamma)$ est cocompact dans \overline{G} , Γ est cocompact dans G .

3.4.10 Réseaux des groupes nilpotents

Soit G un groupe. Pour g, h dans G on note $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ leur commutateur. Si A et B sont des sous-groupes de G , on note $[A, B]$ le sous-groupe engendré par les commutateurs d'éléments de A et B . On note alors

$(C^k G)_{k \in \mathbb{N}}$ la série centrale de G , c'est-à-dire la suite de sous-groupes définie par récurrence par $C^0 G = G$ et, pour $k \geq 0$, $C^{k+1} G = [G, C^k G]$. On dit que G est nilpotent (de hauteur r) s'il existe r tel que $C^r G = \{e\}$.

1. Montrer que le groupe de Heisenberg est nilpotent. Montrer que tout p -groupe est nilpotent (un p -groupe est un groupe fini dont l'ordre est une puissance d'un nombre premier p).

On suppose dorénavant que G est un groupe topologique localement compact nilpotent.

2. Montrer que G est unimodulaire.

Soit H un sous-groupe fermé de G . On dit que H est de covolume fini dans G si la mesure G -invariante de G/H est finie. On se propose de montrer que tout sous-groupe de covolume fini de G est cocompact. On note Z le centre de G .

3. Montrer que, si H est un sous-groupe fermé de G , H est un sous-groupe distingué de \overline{HZ} .

4. Montrer que, si H est un sous-groupe fermé de covolume fini de G , le quotient \overline{HZ}/H est compact.

5. Montrer que, si H est un sous-groupe fermé de covolume fini de G , le quotient G/H est compact.

3.4.11 Réseaux dans les produits semi-directs

Soient G et H des groupes topologiques localement compacts. Une action continue de G sur H est un homomorphisme θ de G dans le groupe des automorphismes de H tel que l'application associée $G \times H \rightarrow H, (g, h) \mapsto \theta_g(h)$ soit continue. Étant donnée une telle action, on définit le produit semi-direct $G \rtimes_{\theta} H$ comme l'espace $G \times H$ muni du produit

$$(G \times H) \times (G \times H) \rightarrow G \times H \\ ((g_1, h_1), (g_2, h_2)) \mapsto (g_1 g_2, \theta_{g_2^{-1}}(h_1) h_2).$$

1. Montrer que $G \rtimes_{\theta} H$ est un groupe topologique localement compact et que les applications $G \rightarrow G \rtimes_{\theta} H, g \mapsto (g, e)$ et $H \rightarrow G \rtimes_{\theta} H, h \mapsto (e, h)$ sont des homomorphismes propres et injectifs. Dans la suite, on considérera G et H comme des sous-groupes fermés de $G \rtimes_{\theta} H$. Montrer que H est distingué dans $G \rtimes_{\theta} H$, que $GH = G \rtimes_{\theta} H$ et que, pour tous g dans G et h dans H , on a $ghg^{-1} = \theta_g(h)$.

Soit A un élément diagonalisable de $SL_2(\mathbb{R})$ à valeurs propres > 0 .

2. Montrer qu'il existe une unique action continue de \mathbb{R} sur \mathbb{R}^2 telle que 1 agisse sur \mathbb{R}^2 par la matrice A .

Pour tout t dans \mathbb{R} , on note A^t l'automorphisme linéaire de \mathbb{R}^2 associé t dans cette action. Le produit semi-direct qui en provient est noté $\mathbb{R} \rtimes_A \mathbb{R}^2$.

3. Montrer que la mesure de Haar de $\mathbb{R} \rtimes_A \mathbb{R}^2$ est le produit de la mesure de Lebesgue de \mathbb{R} et de la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^2 . Montrer que $\mathbb{R} \rtimes_A \mathbb{R}^2$ est unimodulaire.

On suppose dorénavant que A appartient à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et on note $\mathbb{Z} \rtimes_A \mathbb{Z}^2$ le produit semi-direct provenant de l'action de A sur \mathbb{Z}^2 . On considère $\Gamma = \mathbb{Z} \rtimes_A \mathbb{Z}^2$ comme un sous-groupe de $G = \mathbb{R} \rtimes_A \mathbb{R}^2$.

4. Montrer que Γ est un réseau cocompact de G et qu'il existe une application continue surjective $\varpi : G/\Gamma \rightarrow \mathbb{T}$ telle que, pour tout x dans \mathbb{T} , $\varpi^{-1}(x)$ soit homéomorphe à un tore de dimension 2.

5. Montrer que, pour tout $t \notin \mathbb{Q}$ la transformation L_{A^t} est ergodique dans G/Γ pour la mesure de Haar.