

### TD 3. Produit de convolution

On rappelle la définition du produit de convolution : si  $g$  est une fonction telle que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx$  converge, et si  $f$  est une fonction bornée, c'est-à-dire qu'il existe un nombre  $M_f > 0$  tel que  $|f(x)| \leq M_f$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , alors on pose

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

On vérifie que cette intégrale est bien absolument convergente pour toute valeur donnée de  $x$ , car on a la majoration  $|f(x-t)g(t)| \leq M_f |g(t)|$ .

#### 1. RÉGULARITÉ

**Exercice 1.** (1) On pose  $f_1(x) := \chi_{[-1/2, +1/2]}(x)$  (fonction porte). Soit  $g$  une fonction bornée, continue par morceaux, mais qui peut avoir des discontinuités. Montrer que  $f_1 * g(x)$  est bien définie.

(2) Exemple : calculer  $f_1 * f_1$ .

(3) Montrer que pour tout  $g$  comme dans la première question,

$$|f_1 * g(x+h) - f_1 * g(x)| \leq 2M_g |h|,$$

et donc que la fonction  $f_1 * g$  est (uniformément) continue (notez bien que peut-être ni  $f_1$  ni  $g$  ne sont continues).

(4) Pour  $\delta > 0$ , on pose  $f_\delta(x) := \frac{1}{\delta} f_1(\frac{x}{\delta})$ . Tracer le graphe de  $f_\delta$  et vérifier que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\delta(x) dx = 1$ . Si  $g$  est continue au point  $x$ , montrer que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} f_\delta * g(x) = g(x)$ .

(5) Si  $g$  est continue (partout), montrer que  $f_1 * g$  est dérivable (partout) et calculer sa dérivée.

**Exercice 2.** Soit  $h(x) := (1 - |x|)\chi_{[-1, +1]}(x)$ . Calculer  $\hat{h}$ . Cette fonction est-elle absolument intégrable ? Et que peut-on dire de  $\xi \hat{h}(\xi)$  ? Comparer  $\hat{h}$  à la transformée de Fourier du  $f_1$  de l'exercice 1.

#### 2. INCLUSIONS, ESTIMATIONS

Notation : quand les intégrales concernées convergent, on va écrire pour  $p > 0$ ,

$$\|f\|_p := \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

**Exercice 3.** (1) Montrer que si  $f$  est une fonction absolument intégrable sur  $\mathbb{R}$  (i.e. telle que l'intégrale  $\int |f| := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$  converge), et si  $g$  est une fonction bornée, alors pour tout  $x$ ,  $|f * g(x)| \leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f| \right) \sup_{\mathbb{R}} |g|$ . On peut écrire ceci

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

(2) Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions absolument intégrables sur  $\mathbb{R}$ , alors  $f * g$  l'est aussi et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f * g(x)| dx \leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx \right).$$

On peut écrire ceci

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

- (3) On veut maintenant étudier le cas où  $f^2$  et  $g$  sont des fonctions absolument intégrables sur  $\mathbb{R}$  ( $f$  n'étant pas nécessairement intégrable). On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz, valable aussi pour les intégrales impropres :

$$\left| \int f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \left( \int |f|^2 \right) \left( \int |g|^2 \right).$$

Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour deux fonctions judicieusement choisies, que si  $g$  est absolument intégrable, bornée, si  $f$  est bornée, et si  $f^2$  est absolument intégrable, alors pour tout  $x$  fixé,

$$\left| \int f(x-t)g(t)dt \right|^2 \leq \left( \int |f(x-t)|^2 |g(t)|dt \right) \left( \int |g(t)|dt \right)$$

(toutes les intégrales sont prises sur la droite réelle).

En déduire que

$$\int |f * g(x)|^2 dx \leq \left( \int |f(x)|^2 dx \right) \left( \int |g(t)|dt \right)^2.$$

On peut écrire ceci

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_1,$$

ou, si on échange les rôles de  $f$  et  $g$ ,

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2.$$

**Exercice 4.** (1) Montrer que si  $g$  est une fonction bornée, continue par morceaux, absolument intégrable sur  $\mathbb{R}$ , et si  $f$  est bornée et à *support borné*, c'est-à-dire qu'il existe  $A > 0$  tel que pour tout  $x$  tel que  $|x| > A$ , alors  $f(x) = 0$ , alors la fonction  $f * g$  est uniformément continue.

- (2) Montrer que si  $f$  est bornée et absolument intégrable, alors on a toujours le même résultat : la fonction  $f * g$  est uniformément continue.

Méthode : étant donné  $\varepsilon > 0$ , on veut trouver  $\delta > 0$  tel que  $|h| \leq \delta$  implique

$$|f * g(x+h) - f * g(x)| \leq \varepsilon,$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Décomposer  $f = f_A + \tilde{f}_A$ , avec  $f_A(x) := f(x)\chi_{[-A,+A]}(x)$ . En utilisant éventuellement l'exercice 3 (1), choisir  $A$  pour que  $\tilde{f}_A * g(y)$  soit petit pour toute valeur de  $y \in \mathbb{R}$ , puis utiliser la continuité de  $f_A * g$  obtenue par la question précédente.

**Exercice 5.** On suppose que  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . On va montrer que  $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

- (1) Pourquoi  $f * g$  est-elle indéfiniment dérivable ?
- (2) Montrer que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , il existe  $A_m > 0$  tel que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $|x^m g(x-y)| \leq A_m(1+|y|)^m$ . On considérera séparément les cas  $|x| \leq 2|y|$  et  $|x| \geq 2|y|$ . Dans ce dernier cas, on remarquera que  $|x-y| \geq \frac{1}{2}|x|$ .
- (3) En déduire que  $x^m f * g(x)$  est une fonction bornée pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .
- (4) Expliquer pourquoi on peut utiliser la question précédente pour montrer que  $x^m \frac{d^k}{dx^k} (f * g)(x)$  est une fonction bornée pour tous  $m, k \in \mathbb{N}$ .