Intégration - Contrôle Partiel - 14 octobre 2019

Les documents, machines à calculer, téléphones portables, ordinateurs et tablettes sont interdits. Cette épreuve dure **1h30**. Toute réponse devra être **justifiée** et **rédigée** correctement.

Question de cours : rappeler pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$ la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Exercice 1 : Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$1.\ \int_0^{+\infty} \cos(2t)\,dt \qquad 2.\ \int_1^{+\infty} t(e^{1/t^2}-1)\,dt \qquad 3.\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{1-t+t^3}\,dt$$

Exercice 2 : Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$1.\ \sum_{n\geq 0} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2} \qquad 2.\ \sum_{n\geq 0} n \sin\left(\frac{\pi}{n^3+2n+1}\right) \qquad 3.\ \sum_{n\geq 1} \frac{(\sin n)(\ln n)}{n}$$

Exercice 3 : 1. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n\to+\infty} e^{\alpha n}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n^2} = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$ [indication : on pourra utiliser un développement limité].

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit $u_n = e^{\alpha n^2}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n^3}$. Donner la nature de la série $\sum u_n$ en fonction de α.

Exercice 4 : Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de suite suivante de fonctions définies sur $[0,1]$:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2},$$

et déterminer la fonction limite si elle existe.

Exercice 5 : Facultatif

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positive tels que, au voisinage de $+\infty$, on ait

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

1. Montrer que la série de terme général $a_n = n^\alpha$ est de ce type.
2. On suppose $\alpha > -1$. Etant donné $\beta \in]-1, \alpha[$, montrer que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{(n+1)^\beta}{n^\beta}.$$

En déduire à l'aide de principe de comparaison que la série $\sum a_n$ diverge.

3. On suppose $\alpha < -1$. Etant donné $\beta \in]\alpha, -1[$, montrer que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{(n+1)^\beta}{n^\beta}.$$

En déduire à l'aide de principe de comparaison que la série $\sum a_n$ converge.

4. Application : étudier la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n+2)}.$$

Correction

Question de cours : La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 1 : 1. Pour tout $X > 0$, on a $\int_0^X \cos(2t)\,dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^X = \frac{\sin(2X)}{2}$. On sait que $\sin(2X)$ n'a pas de limite lorsque X tend vers $+\infty$ donc, l'intégrale diverge.

2. On remarque d'abord que $t(e^{1/t^2}-1)$ est positif pour tout $t \geq 1$. Maintenant, on sait que pour u proche de 0, on a l'équivalent $e^u - 1 \sim u$ donc, on peut écrire que $e^{1/t^2} - 1 \sim 1/t^2$ lorsque t tend vers l'infini, ce qui donne au final l'équivalent $t(e^{1/t^2}-1) \sim 1/t$.

Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ diverge, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t(e^{1/t^2}-1)\,dt$ diverge également.

3. On peut utiliser la règle d'Abel. Pour tout $X > 1$, on a

$$\left|\int_1^X \sin t dt\right| = |-\cos X + \cos 1| \leq |\cos X| + |\cos 1| \leq 2\,.$$

Par ailleurs, la fonction $t \longmapsto \frac{1}{1-t+t^3}$ est décroissante sur $[1;+\infty[$ (il suffit de calculer sa dérivée) et tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. La règle d'Abel nous assure alors que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{1-t+t^3}\,dt$ converge.

Une autre solution serait de montrer que cette intégrale est absolument convergente. En effet, on a

$$\left|\frac{\sin t}{1-t+t^3}\right| \leq \frac{1}{|1-t+t^3|} \sim \frac{1}{t^3}\,.$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,dt$ converge, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{1-t+t^3}\right|\,dt$ converge et donc, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{1-t+t^3}\,dt$ converge aussi.

Exercice 2 : 1. Remarquons d'abord qu'il s'agit d'une série dont le terme général est positif. On va utiliser la règle de Cauchy. En notant $u_n = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$, on a alors

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n = \left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^n$$

donc, par la méthode habituelle (rapellée ci-dessous...), on obtient $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{-2} < 1$. Par conséquent, la règle de Cauchy donne la convergence de la série.

Rappelons la technique : on écrit $\left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{2}{n+2}\right)}$. Or en $+\infty$, on a l'équivalent $n\ln\left(1-\frac{2}{n+2}\right) \sim n \times \left(-\frac{2}{n+2}\right) \sim -2$. On obtient donc bien la limite e^{-2}.

2. On note $v_n = n\sin\left(\frac{\pi}{n^3+2n+1}\right)$. Pour n suffisamment grand, les v_n sont positifs. De plus, un équivalent donne

$$v_n \sim n \times \frac{\pi}{n^3+2n+1} \sim \frac{\pi}{n^2}\,.$$

Comme la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge également.

3. On peut utiliser la règle d'Abel. La suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n\geq 1}$ est positive, décroissante et tend vers 0. Pour vérifier qu'elle est décroissante, le mieux est d'étudier les variations de la fonction $x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$ en calculant sa dérivée.

Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, on a,

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Im}(e^{ki}) = \mathrm{Im}\Big(\sum_{k=1}^{n} e^{ki}\Big) = Im\Big(e^{i}\frac{1-e^{ni}}{1-e^{i}}\Big)\,.$$

Donc,

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \sin k\Big| \leq \Big|e^{i}\frac{1-e^{ni}}{1-e^{i}}\Big| \leq \frac{|1|+|e^{ni}|}{|1-e^{i}|} \leq \frac{2}{|1-e^{i}|}\,.$$

La règle d'Abel nous donne alors la convergence de la série.

Exercice 3 : 1. On commence par remarquer que pour n suffisamment grand (en fait $n > \alpha$), on a $1-\frac{\alpha}{n} > 0$. Par conséquent, si n est assez grand, alors on écrit

$$e^{\alpha n}\Big(1-\frac{\alpha}{n}\Big)^{n^2} = e^{\alpha n} \times e^{n^2 \ln\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)} = e^{\alpha n + n^2 \ln\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)}\,.$$

Maintenant, on rappelle que pour x proche de 0, on a le développement limité à l'ordre 2

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\,,$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

On obtient donc les calculs suivants, pour n proche de l'infini.

$$\begin{array}{rcl} \ln\left(1-\frac{\alpha}{n}\right) & = & -\frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha^2}{2n^2} + \frac{\alpha^2}{n^2}\varepsilon\left(-\frac{\alpha}{n}\right) \\ n^2\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}\right) & = & -n\alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \alpha^2\varepsilon\left(-\frac{\alpha}{n}\right) \\ \alpha n + n^2\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}\right) & = & -\frac{\alpha^2}{2} + \alpha^2\varepsilon\left(-\frac{\alpha}{n}\right) \end{array}$$

En faisant tendre n vers l'infini dans la dernière équation, on obtient le résultat demandé.

2. On va utiliser la règle de Cauchy. On fixe $\alpha \in \mathbf{R}$. Pour $n > \alpha$, on a $u_n > 0$ et

$$\sqrt[n]{u_n} = u_n^{\frac{1}{n}} = e^{\alpha n}\Big(1-\frac{\alpha}{n}\Big)^{n^2}\,.$$

D'après la question précédente, on a $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$. Si $\alpha \neq 0$ alors $e^{-\frac{\alpha^2}{2}} < 1$ et donc la série de terme général u_n converge (règle de Cauchy).

Maintenant, si $\alpha = 0$ alors $u_n = 1$ pour tout n et donc la série diverge.

Exercice 4 : On commence par la convergence simple. Si on fixe $x \in [0,1]$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0\,.$$

Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers 0 sur $[0,1]$.

Maintenant, pour la convergence uniforme, on va déterminer $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0|$. Pour $n \in \mathbf{N}$ la fonction f_n est dérivable et

$$f_n'(x) = \frac{1+n^2x^2 - x(2n^2x)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}\,.$$

Par conséquent, f_n est croissante sur $[0;\frac{1}{n}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{n};1]$.

On en déduit que $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n}$, ce qui donne

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 0\,.$$

On a donc bien la convergence uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 5 : 1. Si $a_n = n^\alpha$ alors $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha$. On utilise maintenant le développement limité suivant : pour x proche de 0, on a $\big(1+x\big)^\alpha = 1+\alpha x + o(x)$. Par conséquent, pour n proche de $+\infty$, on a bien

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. On a vu que $\dfrac{(n+1)^\beta}{n^\beta} = 1+\dfrac{\beta}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc, on peut écrire

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{(n+1)^\beta}{n^\beta} = \frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left[(\alpha-\beta)+\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

où $\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Comme $\alpha-\beta>0$ il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $(\alpha-\beta)+\varepsilon(\dfrac{1}{n}) \geq 0$. On obtient donc bien $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq \dfrac{(n+1)^\beta}{n^\beta}$ pour tout $n \geq n_0$.

Maintenant, il suffit d'écrire (pour $n \geq n_0$)

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \ldots \times \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \geq \frac{n^\beta}{(n-1)^\beta} \times \ldots \times \frac{(n_0+1)^\beta}{n_0^\beta} = \frac{n^\beta}{n_0^\beta}$$

ce qui donne $a_n \geq a_{n_0}\dfrac{n^\beta}{n_0^\beta}$ pour $n \geq n_0$. Comme $\beta > -1$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^\beta$ diverge et donc la série de terme général a_n diverge.

3. Par la même méthode, on montre que si $\beta > \alpha$ alors il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{(n+1)^\beta}{n^\beta}$ ce qui donne $a_n \leq a_{n_0}\dfrac{n^\beta}{n_0^\beta}$ pour $n \geq n_0$. Comme $\beta < -1$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^\beta$ converge et donc la série de terme général a_n converge.

4. On note $a_n = \dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n+2)}$.

On a alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+4} = \frac{2n+4-3}{2n+4} = 1-\frac{3}{2n+4} = 1-\frac{3}{2n}\times\frac{1}{1+2/n}$$

Maintenant, on peut écrire pour n proche de l'infini, $\dfrac{1}{1+2/n} = 1-\dfrac{2}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ce qui donne

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1-\frac{3}{2n}\left(1-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1-\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme $-\frac{3}{2} < -1$ la série de terme général a_n converge.