Université Paul Sabatier
L2 Spé Math/Phy, Analyse Hilbertienne

S4, Année 2018-2019

# TD 3. Produit de convolution

On rappelle la définition du produit de convolution : si $g$ est une fonction telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx$ converge, et si $f$ est une fonctions bornée, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $M_f > 0$ tel que $|f(x)| \leq M_f$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors on pose

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

On vérifie que cette intégrale est bien absolument convergente pour toute valeur donnée de $x$, car on a la majoration $|f(x-t)g(t)| \leq M_f|g(t)|$.

## 1. Régularité

**Exercice 1.** (1) On pose $f_1(x) := \chi_{[-1/2,+1/2]}(x)$ (fonction porte). Soit $g$ une fonction bornée, continue par morceaux, mais qui peut avoir des discontinuités. Montrer que $f_1 * g(x)$ est bien définie.

(2) Exemple : calculer $f_1 * f_1$.

(3) Montrer que pour tout $g$ comme dans la première question,

$$|f_1 * g(x+h) - f_1 * g(x)| \leq 2M_g|h|,$$

et donc que la fonction $f_1 * g$ est (uniformément) continue (notez bien que peut-être ni $f_1$ ni $g$ ne sont continues).

(4) Pour $\delta > 0$, on pose $f_\delta(x) := \frac{1}{\delta} f_1(\frac{x}{\delta})$. Tracer le graphe de $f_\delta$ et vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\delta(x)dx = 1$. Si $g$ est continue au point $x$, montrer que $\lim_{\delta\to 0} f_\delta * g(x) = g(x)$.

(5) Si $g$ est continue (partout), montrer que $f_1 * g$ est dérivable (partout) et calculer sa dérivée.

**Exercice 2.** Soit $h(x) := (1-|x|)\chi_{[-1,+1]}(x)$. Calculer $\hat{h}$. Cette fonction est-elle absolument intégrable ? Et que peut-on dire de $\xi\hat{h}(\xi)$ ? Comparer $\hat{h}$ à la transformée de Fourier du $f_1$ de l'exercice 1.

## 2. Inclusions, estimations

Notation : quand les intégrales concernées convergent, on va écrire pour $p > 0$,

$$\|f\|_p := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

**Exercice 3.** (1) Montrer que si $f$ est une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ (i.e. telle que l'intégrale $\int |f| := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ converge), et si $g$ est une fonction bornée, alors pour tout $x$, $|f * g(x)| \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f|\right) \sup_{\mathbb{R}} |g|$. On peut écrire ceci

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

(2) Si $f$ et $g$ sont des fonctions absolument intégrables sur $\mathbb{R}$, alors $f * g$ l'est aussi et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f * g(x)|dx \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx\right).$$

On peut écrire ceci

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

(3) On veut maintenant étudier le cas où $f^2$ et $g$ sont des fonctions absolument intégrables sur $\mathbb{R}$ ($f$ n'étant pas nécessairement intégrable). On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz, valable aussi pour les intégrales impropres :

$$\left|\int f(x)g(x)dx\right|^2 \leq \left(\int |f|^2\right)\left(\int |g|^2\right).$$

Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour deux fonctions judicieusement choisies, que si $g$ est absolument intégrable, bornée, si $f$ est bornée, et si $f^2$ est absolument intégrable, alors pour tout $x$ fixé,

$$\left|\int f(x-t)g(t)dt\right|^2 \leq \left(\int |f(x-t)|^2|g(t)|dt\right)\left(\int |g(t)|dt\right)$$

(toutes les intégrales sont prises sur la droite réelle).

En déduire que

$$\int |f*g(x)|^2dx \leq \left(\int |f(x)|^2dx\right)\left(\int |g(t)|dt\right)^2.$$

On peut écrire ceci

$$\|f*g\|_2 \leq \|f\|_2\|g\|_1,$$

ou, si on échange les rôles de $f$ et $g$,

$$\|f*g\|_2 \leq \|f\|_1\|g\|_2.$$

**Exercice 4.** (1) Montrer que si $g$ est une fonction bornée, continue par morceaux, absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, et si $f$ est bornée et à *support borné,* c'est-à-dire qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $x$ tel que $|x| \geq A$, alors $f(x) = 0$, alors la fonction $f*g$ est uniformément continue.

(2) Montrer que si $f$ est bornée et absolument intégrable, alors on a toujours le même résultat : la fonction $f*g$ est uniformément continue.

Méthode : étant donné $\varepsilon > 0$, on veut trouver $\delta > 0$ tel que $|h| \leq \delta$ implique

$$|f*g(x+h) - f*g(x)| \leq \varepsilon,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Décomposer $f = f_A + \tilde{f}_A$, avec $f_A(x) := f(x)\chi_{[-A,+A]}(x)$. En utilisant éventuellement l'exercice 3 (1), choisir $A$ pour que $\tilde{f}_A * g(y)$ soit petit pour toute valeur de $y \in \mathbb{R}$, puis utiliser la continuité de $f_A * g$ obtenue par la question précédente.

**Exercice 5.** On suppose que $f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On va montrer que $f*g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(1) Pourquoi $f*g$ est-elle indéfiniment dérivable ?

(2) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $A_m > 0$ tel que pour tout $x,y \in \mathbb{R}$, $|x^m g(x-y)| \leq A_m(1+|y|)^m$. On considérera séparément les cas $|x| \leq 2|y|$ et $|x| \geq 2|y|$. Dans ce dernier cas, on remarquera que $|x-y| \geq \frac{1}{2}|x|$.

(3) En déduire que $x^m f*g(x)$ est une fonction bornée pour tout $m \in \mathbb{N}$.

(4) Expliquer pourquoi on peut utiliser la question précédente pour montrer que $x^m \frac{d^k}{dx^k}(f*g)(x)$ est une fonction bornée pour tous $m,k \in \mathbb{N}$.