S4 - Analyse Hilbertienne - ECTS 3 - 36h

Enseignants : Jasmin Raissy (cours + 1 groupe TD), Claire Dartyge (1 groupe TD)

Prérequis: séries entières, intégrales généralisées. Dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre. Théorie de l'intégration en général (notamment l'espace L^2).

MCC : 1 Contrôle Partiel le 5 mars, 2 Devoirs Maison au cours du semestre, 1 Contrôle Terminal

- **Séries de Fourier**
  - Préliminaires
    - Exponentielle complexe et définition des fonctions trigonométriques. Dérivation d'une fonction à valeurs complexes (et règles usuelles).
  - Définition et premières propriétés des séries de Fourier.
  - Théorèmes de convergence.
- **Transformée de Fourier**
  - Définition et premières propriétés.
    - Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\xi t}dt$.
    - Modifications de la transformée de Fourier sous translation, dilatation, multiplication par une exponentielle d'imaginaire, dérivation, multiplication par t, de la fonction f.
    - $\hat{f}$ est continue, bornée, sa valeur en 0 est l'intégrale de f.
  - Espace de Schwartz.
    - Définition, stabilité par multiplication par les polynômes, dérivation, et transformation de Fourier.
    - La transformée de Fourier d'une (densité) gaussienne est une gaussienne.
  - Convolution
    - Définition : identité approchée. Exemples : familles de gaussiennes.
    - Définition : produit de convolution.
    - Approximation par la convolution par une identité approchée.
  - Formule d'inversion
    - Formule de multiplication : $\int \hat{f}g = \int f\hat{g}$; formule d'inversion (quand f et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$).
    - Formule de Plancherel. La transformation de Fourier est une isométrie.
  - Propriétés de la convolution
    - Commutativité, dérivabilité, inégalités sur les normes L^p...
    - $(fg)\hat{} = \hat{f} * \hat{g}$, $(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$.

- **Espaces de Hilbert**
  - Rappels sur les espaces euclidiens et préhilbertiens
    - Produit hermitien, projection orthogonale, base orthonormée.
  - Définition ; bases
    - Un espace de Hilbert est un espace muni d'un produit hermitien, complet pour la métrique induite.
    - Exemples : ℓ^2, $L^2(0, 2\pi)$, $L^2(\mathbb{R})$.
    - Bases hilbertiennes : définition, exemples.
    - Inégalité de Bessel, théorème de Parseval.
  - Extension de la transformée de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$.
    - On utilise le théorème général sur le prolongement des applications uniformément continues à partir d'un ensemble dense (l'espace de Schwartz en l'occurrence). Les formules usuelles (Plancherel, inversion...) s'étendent aussi.

■ Applications

Les sujets de cette section peuvent se traiter ou pas selon les choix de l'enseignant et des étudiants, et le temps disponible.

- ▷ Formule sommatoire de Poisson
  - ▷ $\tilde{f}(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}$.
  - ▷ Applications à des questions de théorie du signal.
- ▷ Principe d'incertitude de Heisenberg
  - ▷ $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2|\psi(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi\right) \geq \frac{1}{16\pi^2}$.
  - ▷ Idée de la signification en mécanique quantique.
- ▷ Equation de la chaleur
  - ▷ Noyau de la Chaleur $H_t(x) = \left(e^{-\pi(2\sqrt{\pi t}\xi)^2}\right)\hat{}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\pi(\frac{x}{2\sqrt{\pi t}})^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Alors $u(t,x) = f * H_t(x)$ vérifie l'équation de la chaleur (dans un demi-plan).
- ▷ Fonctions harmoniques
  - ▷ Peuvent âtre motivées par une distribution de température à l'équilibre (puisqu'on a pas vu l'analyse complexe). La formule de Poisson sur le demi-plan peut âtre dérivée à partir de la transformée de Fourier.
- ▷ Equation des ondes

Jasmin RAISSY

Institut de Mathématiques de Toulouse - Université Paul Sabatier

Bureau 213 Bât 1R2 (2ème étage)

E-mail : `jraissy@math.univ-toulouse.fr`

Web : `http://www.math.univ-toulouse.fr/~jraissy/`