TD n° 1 : Langage mathématique

***Exercice* 1.1.** On note $A = \{1,2,3,4\}$ et $B = \{1,5\}$. Décrire les ensembles $\mathcal{P}(B)$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ et $A \times B$.

***Exercice* 1.2.** Pour $x \in \mathbb{R}$ on note

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0, \\ x-1 & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que cela définit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, expliciter $f^{-1}([\alpha, +\infty[)$.

***Exercice* 1.3.** Décrire simplement les parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, +\infty[.$$

***Exercice* 1.4.** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
1. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $a \leqslant b + \varepsilon$. A-t-on nécessairement $a \leqslant b$?
2. Que peut-on dire si $a < b + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$?

***Exercice* 1.5.** Soient E, F et G trois ensembles. Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G.
1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.
4. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.

***Exercice* 1.6.** Soient E un ensemble et f une fonction de E dans E. On suppose que $f \circ f = f$. Montrer que si f est injective ou surjective, alors $f = \mathrm{Id}_E$.

***Exercice* 1.7.** Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E. Montrer que

$$A \cup B = A \cap C \iff \big(B \subset A \quad \text{et} \quad A \subset C\big).$$

***Exercice* 1.8.** Déterminer l'ensemble des réels a tels que

(i) $\forall \varepsilon \geqslant 0, \quad |a| \leqslant \varepsilon.$
(ii) $\forall \varepsilon > 0, \quad |a| \leqslant \varepsilon.$
(iii) $\forall \varepsilon > 0, \quad |a| < \varepsilon.$
(iv) $\forall \varepsilon \geqslant 0, \quad |a| < \varepsilon.$

***Exercice* 1.9.** Pour chacune des assertions suivantes, dire si elles sont vraies, fausses ou ne sont pas des assertions correctes. Dans les deux premiers cas, justifier.

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \quad 0 < \eta < \varepsilon.$
(ii) $\forall \varepsilon \in]0,1[, \exists \varepsilon^2 \in]0,1[, \quad 0 < \varepsilon^2 < \varepsilon.$
(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} < \varepsilon.$
(iv) $\exists \eta > 0, \forall \varepsilon > 0, \quad 0 < \eta < \varepsilon.$
(v) $\varepsilon < 0.$
(vi) $\forall \varepsilon > 0, \forall R > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \quad n\varepsilon > 2R.$

***Exercice* 1.10.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Parmi les assertions suivantes, lesquelles peut-on déduire de cette information ? Justifier !

(i) $\forall \delta > 0, \exists y \in \mathbb{R}, \quad |f(y)| \leqslant \delta.$

(ii) $\forall \varepsilon > 1, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon.$

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant 2\varepsilon.$

(iv) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| < \varepsilon.$

(v) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$

(vi) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon.$

(vii) $\forall \varepsilon \geqslant 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon.$

(viii) $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| > \varepsilon.$

***Exercice* 1.11.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

(i) La fonction f s'annule.

(ii) La fonction f est la fonction nulle.

(iii) La fonction f n'est pas constante.

(iv) La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.

(v) La fonction f n'est pas surjective.

(vi) La fonction f admet un minimum.

(vii) La fonction f prend des valeurs arbitrairement grandes.

(viii) La fonction f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

***Exercice* 1.12.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Exprimer verbalement les assertions suivantes :

(i) $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad f(x) = c.$

(ii) $\forall x \in I, \quad f(x) = 0 \implies x = 0.$

(iii) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, \quad f(x) = y.$

(iv) $\forall x, y \in I, \quad x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y).$

(v) $\forall x, y \in I, \quad f(x) = f(y) \implies x = y.$

(vi) $\forall x, y \in I, \quad x = y \implies f(x) = f(y).$

***Exercice* 1.13.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Exprimer les négations des assertions suivantes :

(i) $\forall x \in I, \quad f(x) = 0.$

(ii) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, \quad f(x) = y.$

(iii) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad |f(x)| \leqslant M.$

(iv) $\forall x \in I, \forall y \in I, \quad f(x) \leqslant f(y) \implies x \leqslant y.$

(v) $\forall x \in I, \quad f(x) > 0 \implies x \leqslant 0.$

***Exercice* 1.14.** Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que le produit de n entiers impairs est impair.

***Exercice* 1.15.** Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

***Exercice* 1.16.** Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $2^n \leqslant n!$, où $n! = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n$.

***Exercice* 1.17.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$ on note

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$ on a

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$