Université Paul Sabatier – Toulouse III- L1 Parcours Spécial MATHS
Contrôle Intermédiaire, 17 Octobre 2019 (1h30).

AVERTISSEMENTS : Les exercices sont indépendants les uns des autres. Les documents et les calculatrices sont interdits. La clarté de la rédaction et la qualité des justifications seront prises en compte dans la notation. Le barème sur 21 est indicatif.

Question de cours (4 points). Soit f et g deux fonctions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$.
1. Donner la définition de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Démontrer la propriété suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (f+g)(x) = +\infty.$$

Exercice 1. (4 points)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$A_n =]\tfrac{1}{n}, 2 + \tfrac{1}{n}[.$$

Déterminer l'ensemble

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n.$$

Justifier votre réponse en donnant une preuve rigoureuse par double inclusion.

Exercice 2. (4.5 points).
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{x^5 + x^3 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}$.
(On pourra utiliser sans le justifier le fait que $x^2 + x + 1 \neq 0$ pour tout réel x).
1. En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction f est-elle continue ?
2. Calculer les limites de f en $+\infty$, $-\infty$ et en 0.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[-1, +1]$ (solution que l'on ne cherchera pas à expliciter). Indication : on pourra commencer par calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

Exercice 3. (4 points).
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) \text{ pour } x \neq 0 \\ 0 \text{ en } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$.
2. Étudier la continuité de f en $x_0 = 0$.

Exercice 4. (4.5 points).
Pour chacune des affirmations ci-dessous, dites si elle est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse par une preuve rigoureuse.
1. Toute fonction strictement croissante sur $[a, b]$ est une injection entre $[a, b]$ et $[f(a), f(b)]$.
2. Toute fonction strictement croissante sur $[a, b]$ est une bijection entre $[a, b]$ et $[f(a), f(b)]$.
3. Si f est une fonction strictement croissante sur $]0, +\infty[$ alors f ne peut pas avoir de limite finie en $+\infty$.

Corrigé

Question de cours (4 points). Soit f et g deux fonctions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$.
1. On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall M > 0, \exists N > 0, x \geq N \implies f(x) \geq M.$$

(variante :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R}, x \geq N \implies f(x) \geq M.)$$

2. Soit $M > 0$. Pour montrer que $\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x) = +\infty$, il faut montrer qu'il existe $N > 0$ tel que $x \geq N \implies f(x) + g(x) \geq M$.

Comme on suppose que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty,$$

on sait qu'il existe $N_1 > 0$ et $N_2 > 0$ tel que :

$$x \geq N_1 \implies f(x) \geq M \qquad \text{et} \qquad x \geq N_2 \implies g(x) \geq M.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$, on a alors

$$x \geq N \implies x \geq N_1 \text{ et } x \geq N_2 \implies f(x) + g(x) \geq M + M \geq M$$

comme attendu.

Exercice 1. (4 points)
Montrons que

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n =]0,3[.$$

Tout d'abord pour tout entier $n \geq 1$ on a $0 < \frac{1}{n} < 2 + \frac{1}{n} \leq 3$, ainsi $A_n \subset]0,3[$ et donc l'union des A_n est également contenue dans l'intervalle $]0,3[$.

Réciproquement, montrons que tout nombre $x \in]0,3[$ est contenu dans au moins un des A_n. Si $x > 1$, on a $x \in A_1 =]1,3[$. Si $x \in]0,1]$, choisissons un entier n tel que $n > \frac{1}{x}$, ainsi $\frac{1}{n} < x \leq 1$ et donc $x \in A_n =]\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}[$.

Exercice 2. (4.5 points).
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{x^5+x^3+2x+2}{x^2+x+1}$.
1. La fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}$, comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule jamais.
2. En $x = 0$ par continuité la fonction f tend vers sa valeur en 0 :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 2.$$

Pour $x \neq 0$ on peut écrire

$$f(x) = \frac{x^5}{x^2}\frac{1 + 1/x^2 + 2/x^4 + 2/x^5}{1 + 1/x + 1/x^2} = x^3\frac{1 + 1/x^2 + 2/x^4 + 2/x^5}{1 + 1/x + 1/x^2}.$$

La fraction tend vers 1 en $-\infty$ et $+\infty$, donc la limite de $f(x)$ en $-\infty$ et $+\infty$ est la même que la limite de x^3 :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

3. On remarque que

$$f(-1) = \frac{-1-1-2+2}{1-1+1} = -2 \text{ et } f(1) = \frac{1+1+2+2}{1+1+1} = 2$$

Comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaire appliqué à la fonction f sur l'intervalle $[-1,+1]$ nous assure l'existence d'un nombre $c \in [-1,1]$ tel que $f(c)=0$.

Exercice 3. (4 points).
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) \text{ pour } x \neq 0 \\ 0 \text{ en } x = 0. \end{cases}$$

1. Sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ est continue comme composée de fonctions continues, et la fonction $x \mapsto x^2$ est aussi continue. La fonction f est alors continue comme produit de fonctions continues.

2. Pour montrer que f est continue en $x_0 = 0$, il faut montrer que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 est égale à $f(0) = 0$. Pour tout $x \neq 0$, on a $\sin(1/x) \in [-1,1]$, et donc

$$-x^2 \leq x^2 \sin(1/x) \leq x^2$$

Comme on a $\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} -x^2 = 0$, le théorème des gendarmes implique qu'on a également

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Exercice 4. (4.5 points).

1. L'affirmation est vraie.
Soit f une fonction strictement croissante sur $[a,b]$. Montrons que f est une injection entre $[a,b]$ et $[f(a),f(b)]$. Soit $x_1, x_2 \in [a,b]$ tel que $x_1 \neq x_2$. Comme f est strictement croissante, si $x_1 > x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$, et si $x_2 > x_1$ alors $f(x_2) > f(x_1)$. Dans tous les cas on a $f(x_1) \neq f(x_2)$, ce qui montre que f est injective.

2. L'affirmation est fausse.
Donnons un exemple de fonction strictement croissante sur $[a,b]$ qui ne soit pas une bijection entre $[a,b]$ et $[f(a),f(b)]$. Par exemple, la fonction $f\colon [-1,1] \to [1,2]$ définie comme suit convient :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

En effet les réels $y \in [0,1[$ n'admettent pas d'antécédent.
NB : si dans l'énoncé on supposait de plus la fonction continue, alors l'affirmation deviendrait vraie, et on pourrait montrer la surjectivité à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

3. L'affirmation est fausse.
La fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est un exemple de fonction strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et admettant une limite finie en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x} = 1.$$