TD n$^{\text{o}}$ 2 : Fonctions d'une variable réelle

Limites

***Exercice* 2.1.** **1.** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$x \xrightarrow[x \to x_0]{} x_0, \qquad x^2 \xrightarrow[x \to x_0]{} x_0^2 \qquad \text{et} \qquad 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.$$

2. Montrer que l'application $x \mapsto \cos(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

***Exercice* 2.2.** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $l \in \mathbb{R}$.
1. Montrer que f tend vers l en a si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| \leqslant \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon \tag{1}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| \leqslant \delta \implies |f(x) - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon \tag{3}$$

2. Montrer que ce n'est pas le cas avec les assertions suivantes :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \geqslant 0, \forall x \in I, \quad |x - a| \leqslant \delta \implies |f(x) - l| \leqslant \varepsilon \tag{4}$$

$$\forall \varepsilon \geqslant 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| \leqslant \delta \implies |f(x) - l| \leqslant \varepsilon \tag{5}$$

***Exercice* 2.3.** Soit $\alpha > 0$. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction qui tend vers α en 0. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0, \delta[$.

***Exercice* 2.4.** Étudier l'existence et, le cas échéant, la valeur des limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^5 + 4x^3 + x^2}{-3x^2 + 50x}$ **2.** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{4x^5 + 4x^3 + x^2}{-3x^2 + 50x}$ **3.** $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{4x^5 + 4x^3 + x^2}{-3x^2 + 50x}$

4. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 4x^2 + x}$ **5.** $\displaystyle\lim_{x \to 8} \frac{1}{x - 8}$ **6.** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + |x|}{x}$

7. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + 3} - \sqrt{x + 2}$ **8.** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 + x^2}}{x}$

***Exercice* 2.5.** On note E la fonction qui à un réel x associe sa partie entière ($E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x).
1. Étudier les limites éventuelles de E en 0, $+\infty$ et $-\infty$.
2. Étudier la limite éventuelle en 0 de la fonction $x \mapsto xE\left(\frac{1}{x}\right)$.

***Exercice* 2.6.** Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ et deux fonctions ε_1 et ε_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tels que ε_1 et ε_2 tendent vers 0 en 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^2 \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + x^2 \varepsilon_2(x).$$

1. Montrer qu'il existe $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ et une fonction ε de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 en 0 tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(f + g)(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

2. Même question en remplaçant $f + g$ par fg.

***Exercice* 2.7.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui tend vers 0 en 0 tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^2 \varepsilon(x).$$

1. On suppose que $a_0 \neq 0$. Montrer qu'il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $x \in [-\nu, \nu]$, $f(x)$ a même signe que a_0.
2. On suppose que $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$. Montrer qu'il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $x \in [-\nu, \nu]$, $f(x)$ a même signe que $a_1 x$.
3. On suppose que $a_0 = a_1 = 0$ et $a_2 \neq 0$. Montrer qu'il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $x \in [-\nu, \nu]$, $f(x)$ a même signe que $a_2 x^2$.
4. Que peut-on dire du signe de f au voisinage de 1 ?

***Exercice* 2.8.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 1-périodique (*i.e.* $f(x+1) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). On suppose que f admet une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Propriétés des fonctions continues

***Exercice* 2.9.** Soit f une fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[\varepsilon, +\infty[$ pour tout $\varepsilon > 0$.
1. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
2. A l'aide d'un contre-exemple, montrer que f n'est pas nécessairement continue sur $[0, +\infty[$.

***Exercice* 2.10.** Soient f_+ et f_- des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}_-^*$ dans $\mathbb{R}$, respectivement. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \begin{cases} f_+(x) & \text{si } x \geqslant 0, \\ f_-(x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La fonction f ainsi définie est-elle bien continue ?

***Exercice* 2.11.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1. Montrer que si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $|f|$ (qui à x associe $|f(x)|$) l'est également.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

***Exercice* 2.12.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} = -\infty$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

***Exercice* 2.13.** Un marcheur parcourt six kilomètres en une heure (il ne marche pas forcément à vitesse constante). Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel il marche exactement trois kilomètres.

***Exercice* 2.14.** Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ et vers $+\infty$. Montrer que f est minorée et atteint son minimum.

Dérivabilité

***Exercice* 2.15.** Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

***Exercice* 2.16.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{si } x \leqslant 1, \\ ax + b & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Déterminer a, b pour que f soit dérivable en 1, puis faire l'étude de f et tracer son graphe.

***Exercice* 2.17.** On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$.
1. Donner son domaine de définition D_f. La fonction est elle continue ? Dérivable ?
2. Calculer f' et donner le tableau de variation de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ a trois solutions dans $\mathbb{R}$.
4. Tracer le graphe de f.

***Exercice* 2.18.** Soit f une fonction continue de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]0,+\infty[$. On suppose que f' tend vers une limite $l \in \mathbb{R}$ en 0. Montrer que f est dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = l$.

***Exercice* 2.19.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que f tend vers l en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) = 0$.

Fonctions usuelles

***Exercice* 2.20.** Dans cet exercice on ne suppose pas connue la fonction exponentielle. On suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

(i) $f(0) = 1$,

(ii) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = f$.

1. En considérant la fonction $t \mapsto f(t)f(-t)$, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $f(t) \neq 0$ et

$$f(-t) = \frac{1}{f(t)}.$$

2. Montrer que $f(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que si g est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$, alors $g = f$.

4. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction h dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $h(0) = C$ et $h' = \alpha h$, donnée par $h : t \mapsto Cf(\alpha t)$.

5. Soit $s \in \mathbb{R}$. En considérant la fonction $t \mapsto \frac{f(t+s)}{f(s)}$, montrer que $f(t+s) = f(t)f(s)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

6. Montrer que f est croissante, puis que pour tout $t \geqslant 0$ on a $f(t) \geqslant t$. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $\varphi_n : x \mapsto \frac{f(x)}{x^{n+1}}$. Montrer que φ_n est croissante sur $[n,\infty[$. En déduire la limite de $\frac{f(x)}{x^n}$ en $+\infty$.

8. Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$. Montrer que la bijection réciproque est dérivable et calculer sa dérivée en tout point.

***Exercice* 2.21.** Étudier l'existence et, le cas échéant, la valeur des limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x}$	**2.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{-3}e^{-x}$	**3.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{-2}\ln(x)^3$	**4.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x\ln(x))^{-4}e^x$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln(x)^4xe^{-2x}$	**6.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2e^{2x}$	**7.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)$	**8.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(e^x+e^{-x})$
9. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	**10.** $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$	**11.** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$	**12.** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{2x}-e^2}{x-1}$

***Exercice* 2.22.** On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{\cos x + \sin^2 x}$.

1. Étudier la fonction f sur l'intervalle $I = [0, 2\pi]$.

2. Combien l'équation $f(x) = \sqrt{e}$ a-t-elle de solution dans I ?

***Exercice* 2.23.** On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\big(\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\big)$.

1. Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $I = \big[0, \frac{\pi}{2}\big[$.

2. Calculer $f'(x)$ et simplifier l'expression.

3. Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.

4. On note g la fonction réciproque de f.

a. Préciser les variations de g.

b. Calculer $g'(f(x))$ pour tout $x \in I$.

c. Expliciter g et retrouver les résultats précédents.

***Exercice* 2.24.** **1.** Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ on a

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Calculer $\arccos\big(\sin(3\pi/2)\big)$, $\arcsin\big(\sin(11\pi/7)\big)$, $\arctan\big(\tan(-17\pi/5)\big)$.

3. On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.

a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable au moins sur $\mathbb{R}^*$.

b. Calculer sa dérivée et la simplifier au maximum.

c. f est-elle dérivable en 0 ?

d. Donner une expression plus simple de f par une fonction usuelle.

***Exercice* 2.25.** **1.** Pour $x \in \mathbb{R}^*$, calculer : $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. Donner deux expressions de la dérivée de $x \mapsto \tan(x)$. En déduire $\cos^2(\arctan x)$.
3. On considère la fonction définie par $g(x) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ sur $I =]0, +\infty[$.
a. Montrer que g est continue sur I.
b. Calculer la limite de g à droite en 0. Montrer qu'on peut prolonger g par continuité en 0. On note toujours g la fonction ainsi prolongée.
c. Montrer que g est dérivable sur I et calculer g'.
d. g est-elle dérivable en 0 ? On pourra utiliser la question 1.
e. Montrer que g est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.
f. La fonction réciproque g^{-1} est-elle croissante ? décroissante ?

***Exercice* 2.26.** Pour $x > 1$ on note $f(x) = \sin\left(\frac{\frac{\pi x}{2}+1}{x-1}\right)$.
1. Donner l'ensemble de définition ainsi que l'ensemble image de la fonction arcsin.
2. Montrer qu'il existe $x_0 > 1$ tel que $\frac{\frac{\pi x_0}{2}+1}{x_0-1} = \frac{3\pi}{2}$.
3. Montrer que f définit une bijection de $[x_0, +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera. On notera g la réciproque cette bijection.
4. Donner une expression de g.

Dérivées d'ordres supérieurs - Développements limités

***Exercice* 2.27.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|e^x - 1 - x| \leqslant \frac{|x|^2}{2} e^x$.

***Exercice* 2.28.** Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
1. a. Montrer que si f admet un minimum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \geqslant 0$.
b. Montrer que la réciproque n'est pas vraie.
2. On suppose que $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$. Montrer que f admet un minimum local strict en x_0.

***Exercice* 2.29.** Donner les développements limités des fonctions suivantes en 0, à l'ordre indiqué entre parenthèses :

(i) $x \mapsto \sqrt{1+x} \times \ln(1+x)$ (à l'ordre 3)
(ii) $x \mapsto \sin(x)/(1+x)$ (à l'ordre 4)
(iii) $x \mapsto e^{\cos(x)}$ (à l'ordre 4)
(iv) tan (à l'ordre 5)
(v) arctan (à l'ordre 5)
(vi) $x \mapsto \frac{\tan(x)}{1+\arctan(x)}$ (à l'ordre 3)

***Exercice* 2.30.** **1.** Calculer le développement limité au point 1 et à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$.
2. Calculer le développement limité au point $\frac{\pi}{3}$ et à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

***Exercice* 2.31.** Étudier l'existence et, le cas échéant, la valeur des limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0^\pm} \frac{1}{x\cos(x) - \sin(x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 + 2x} - x$
3. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \tan(x) - \cos(x)}{\sin(x^2)\ln(1+x)}$
4. $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin(x))}{(\pi - 2x)^2}$

***Exercice* 2.32.** On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \mapsto \cos(x) - 1 + (e^x - 1)^3$. En utilisant un développement limité, montrer que f admet un maximum local en 0.