Université Paul Sabatier — Année 2019-2020

L2 Parcours Spécial

Intégration

Révisions et compléments sur les séries numériques

Exercice 1 : Donner la nature de la série $\sum_n u_n$ dans les cas suivants.

1. $u_n = \dfrac{n^2-2n+7}{n^5-4n^3+n+1}$ 2. $u_n = n\sin\dfrac{1}{n}$ 3. $u_n = \big(\dfrac{1}{2}\big)^n$ 4. $u_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$

5. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\big(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\big)$ 6. $u_n = (-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n}$ 7. $u_n = \dfrac{\cos(n^2\pi)}{n\ln n}$ 8. $u_n = \sum_{n\geq 1}\ln\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}$

9. $u_n = \sum_{n\geq 1}\big(1-\dfrac{3}{n}\big)^{2n}$ 10. $u_n = \sum_{n\geq 0}\big(\dfrac{1}{n+1}\big)^n$ 11. $u_n = \sum_{n\geq 1}(\cos n).\sin\dfrac{1}{n^2}$ 12. $u_n = \sum_{n\geq 2}\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$

13. $u_n = \sum_{n\geq 1}\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$

Exercice 2 : On considère les suites $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer qu'elles sont équivalentes.

Comparer la nature des séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} v_n$.

Est-ce en contradiction avec la propriété de cours sur les comparaisons de nature de séries à l'aide d'un équivalent ?

Exercice 3 : On montre le théorème des séries alternées.

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ positive, décroissante et qui converge vers 0. Alors, la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ converge.

De plus, si on note $R_n = \sum_{k\geq n+1}^{\infty}(-1)^k a_k$ le reste de cette série, on a alors la majoration $|R_n|\leq a_{n+1}$.

On note $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des sommes partielles et on considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
2. Montrer quec $v_n \leq u_n$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$.
3. En déduire que la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ converge.
4. On note $S = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ la somme de la série. Expliquer pourquoi $v_n \leq S \leq u_n$ pour tout $n\in\mathbf{N}$.
5. En déduire que $-a_{2n+1}\leq R_{2n}\leq 0$ et $0\leq R_{2n-1}\leq a_{2n}$ pour tout n et conclure la majoration du reste de la série.

Exercice 4 : On montre le théorème d'Abel.

On considère deux suites réelles $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et on note, pour tout n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$. On suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est positive, décroissante et converge vers 0 et qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $|S_n| \leq M$ pour tout n. Alors la série $\sum_{n\geq 0}\alpha_n u_n$ converge.

1. Montrer que pour tout n, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k = \alpha_n S_n + \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k$$

2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n S_n = 0$.
3. Montrer que $\left| \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k \right| \leq M(\alpha_0 - \alpha_n)$.
4. Conclure.

Exercice 5 : Utiliser le théorème d'Abel pour démontrer le théorème sur les séries alternées.