Università degli studi di Pisa
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

tesi di laurea specialistica

Normalizzazione di campi vettoriali olomorfi

Candidato
Jasmin Raissy

Relatore
Prof. M. Abate

Controrelatore
Prof. S. Marmi

Anno Accademico 2005/2006

Indice

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è discutere la teoria delle forme normali di campi vettoriali olomorfi locali singolari nell'origine di $\mathbb{C}^n$, presentando sia risultati recenti sulla normalizzazione olomorfa sia una sistematizzazione dei risultati classici sulla normalizzazione formale.

La prima parte è quindi dedicata alla formalizzazione della teoria della forma normale di Jordan-Chevalley generalizzata ad algebre di Lie di dimensione infinita che siano limite proiettivo di algebre di Lie semi-semplici di dimensione finita. Ogni elemento di questa speciale classe di algebre di Lie, che chiameremo algebre di Lie *filtrate semi-semplici*, ammette una decomposizione unica come somma di un elemento semi-semplice con un elemento nilpotente che commutano, dove un elemento dell'algebra è detto semi-semplice [risp. nilpotente] se lo è, nel senso usuale, ristretto ad ogni algebra della filtrazione. Inoltre tale decomposizione è conservata dalla rappresentazione aggiunta e passando ad una qualsiasi rappresentazione dell'algebra che rispetti la filtrazione. La decomposizione ottenuta è detta ancora *decomposizione di Jordan-Chevalley.*

Lo spazio dei campi vettoriali formali singolari nell'origine di $\mathbb{C}^n$, che indicheremo con $\widehat{\mathfrak{X}}_n$, è un'algebra di Lie filtrata, quindi possiamo applicare la teoria svolta e ottenere una decomposizione unica di Jordan-Chevalley per ogni campo vettoriale di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$.

Un campo vettoriale X di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ sarà detto *semi-semplice* se, per ogni intero positivo $k \geq 1$, il campo vettoriale $X_{(k)}$, ottenuto troncando X ai suoi termini di grado k, è un endomorfismo semi-semplice dello spazio vettoriale di dimensione finita J_n^k dei k-getti di serie formali complesse in n variabili, nulle nell'origine. Analogamente, un campo vettoriale X di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ sarà detto *nilpotente* se, per ogni intero positivo $k \geq 1$, il campo vettoriale $X_{(k)}$ è un endomorfismo nilpotente di J_n^k.

Ogni campo vettoriale X di $\widehat{\mathfrak{X}}^n$ può essere quindi scritto in maniera unica nella forma

$$X = S + N$$

dove S è un campo vettoriale semi-semplice, N è un campo vettoriale nilpotente, e vale $[S, N] = 0$.

Introduciamo dunque la cosiddetta *forma normale di Poincaré-Dulac* di un campo vettoriale. Un campo vettoriale X di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ è detto in forma normale di Poincaré-Dulac se è della forma

$$X = X^{\mathrm{s}} + X^{\mathrm{n}},$$

dove X^{s} è un campo vettoriale lineare semi-semplice e X^{n} è un campo vettoriale che commuta con X^{s}, è nilpotente ristretto ai k-getti $\mathfrak{X}_n^k$ di campi vettoriali per ogni intero positivo k e sarà detto *risonante*. Dalla teoria svolta sulla decomposizione di Jordan-Chevalley, deduciamo inoltre, come corollario, il seguente classico risultato, dovuto a Poincaré [Po] e Dulac [Du], sulla normalizzazione formale, di cui una dimostrazione classica si trova in [Ar].

Teorema. (Poincaré-Dulac, 1904) *Sia X un elemento di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$. Allora esiste un cambiamento di variabili formale che porta il campo X in forma normale di Poincaré-Dulac.*

Utilizzando il metodo di Newton, è infatti possibile dimostrare che per ogni campo vettoriale semi-semplice di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ esiste un cambiemento di coordinate formale che porta il campo dato nel suo temine lineare semi-semplice. Dato X in $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ la cui decomposizione di Jordan sia $S+N$, il cambio formale di coordinate che porta S nella sua parte lineare semi-semplice, porta X in forma normale di Poincaré-Dulac.

Nella seconda parte indaghiamo sulla normalizzazione *olomorfa* di campi vettoriali olomorfi locali nulli in 0, che indichiamo con $\mathfrak{X}_n$. Dato un campo vettoriale olomorfo X singolare in 0, ci chiediamo quando esso ammetta una normalizzazione olomorfa che lo porti in forma normale di Poincaré-Dulac. Anche nel caso di un campo vettoriale olomorfo, a causa del problema dei piccoli divisori (per un'introduzione al problema dei piccoli divisori si rimanda a [Ma]), il cambio di coordinate ottenuto con il metodo di Newton può essere non convergente. Brjuno ha infatti dimostrato che esistono campi vettoriali olomorfi che non ammettono alcuna normalizzazione olomorfa (si veda [LD] pag. 38).

Ci concentriamo su risultati recenti, ottenuti da Zung in [Zu1] e [Zu2], che forniscono condizioni necessarie e/o sufficienti di tipo geometrico per l'esistenza di una normalizzazione olomorfa, in contrasto con le tecniche ormai classiche, dovute principalmente a Brjuno (si veda [Brj]), di sapore più analitico e di teoria dei numeri.

Nel 2002, Zung ha infatti dimostrato il seguente risultato (per la definizione di grado torico si veda pag. 53)

Teorema. (Zung, 2002) *Sia X un elemento di $\mathfrak{X}_n$. Allora X ammette una normalizzazione di Poincaré-Dulac convergente in un intorno dell'origine se e solo se è preservato, in un intorno dell'origine, da un'azione effettiva di un toro (reale) di dimensione uguale al grado torico di X, che abbia l'origine come punto fisso e tale che la parte semi-semplice di X appartenga alla sottoalgebra abeliana di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ associata alla parte lineare dell'azione.*

Oltre ad esporre in maniera esaustiva tale risultato, indaghiamo sulla necessità dell'ultima ipotesi sull'azione. Dimostriamo infine il seguente risultato, sempre dovuto a Zung (si veda [Zu1]), che ci fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza di una siffatta azione per un campo X di $\mathfrak{X}_n$.

Teorema. (Zung, 2002) *Sia X un campo vettoriale di $\mathfrak{X}_n$. Supponiamo che esista un intero positivo m, con $1 \leq m \leq n$, per cui esistono m campi vettoriali locali* *olomorfi $X_1 = X, X_2, \ldots, X_m$ e $n - m$ funzioni locali olomorfe $f_1, \ldots, f_{n-m}$ in $(\mathbb{C}^n, 0)$ con le seguenti proprietà:*

(i) i campi vettoriali $X_1, \ldots, X_m$ commutano a due a due e sono linearmente indipendenti;

(ii) le funzioni $f_1, \ldots, f_{n-m}$ sono integrali primi comuni per $X_1, \ldots, X_m$, cioè per ogni j e k si ha $X_j(f_k) = 0$, e sono funzionalmente indipendenti quasi ovunque.

Allora X ammette una normalizzazione di Poincaré-Dulac convergente in un intorno dell'origine.

Vediamo brevemente il contenuto dei vari capitoli.

Nel Capitolo 1 richiamiamo le nozione di gruppo di Lie e di algebra di Lie evidenziando le proprietà principali delle algebre di Lie che intervengono nella dimostrazione dell'esistenza e dell'unicità della decomposizione di Jordan-Chevalley in algebre di Lie semi-semplici di dimensione finita. Introduciamo quindi, utilizzando la nozione di limite proiettivo, la nozione di spazio vettoriale di dimensione infinita filtrato e di algebra di Lie filtrata semi-semplice e, seguendo i testi [Bou2], [Ch], [Hu] e [Ja], generalizziamo a tali spazi la decomposizione di Jordan-Chevalley.

Nel Capitolo 2 mostriamo, seguendo [LD], che lo spazio $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ è un'algebra di Lie filtrata e applichiamo la teoria svolta nel Capitolo 1; introduciamo la forma normale di Poincaré-Dulac e mostriamo che ciascuna forma normale di Poincaré-Dulac di un campo vettoriale formale si ottiene dalla decomposizione di Jordan-Chevalley del campo vettoriale.

Il Capitolo 3 è dedicato alle diseguaglianze di Łojasiewicz in campo complesso. Tali diseguaglianze sono uno degli strumenti chiave nella dimostrazione dell'ultimo Teorema di Zung che presenteremo.

Nel Capitolo 4 esponiamo in maniera esaustiva i recenti risultati di Zung dell'articolo [Zu1], introducendo, su consiglio del Prof. Zung, una nozione di *grado torico* di un elemento di $\mathfrak{X}_n$ differente da quella presente in [Zu1] e [Zu3].

Ringraziamenti

Ringrazio il Prof. Marco Abate per il suo prezioso aiuto e per l'infinita pazienza con cui mi ha aiutata durante la stesura di questa tesi.

Ringrazio il Prof. Edward Bierstone per i suoi validissimi suggerimenti riguardo la dimostrazione del Teorema 4.3.5.

Ringrazio il Prof. Jacky Cresson con cui ho avuto l'onore e il piacere di discutere di questa tesi.

Ringrazio il Prof. Nguyen Tien Zung per i suoi suggerimenti e chiarimenti.

Desidero infine ringraziare tutti coloro che mi hanno sostenuto con i loro consigli, la loro indescrivibile pazienza ed il loro affetto.

Capitolo 1
Gruppi e Algebre di Lie

1.1 Gruppi di Lie

Definizione 1.1.1. Un *gruppo di Lie* è un gruppo $(G, \cdot)$ fornito anche di una struttura di varietà differenziabile tale che il prodotto $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$ e l'inverso $g \mapsto g^{-1}$ siano applicazioni differenziabili.

Ad esempio ogni spazio vettoriale complesso (o reale) V di dimensione finita con la sua struttura di gruppo additivo è un gruppo di Lie in un modo canonico. Inoltre, l'insieme $\mathrm{Aut}(V)$ degli automorfismi lineari di V è un sottoinsieme aperto dello spazio vettoriale di dimensione finita $\mathrm{End}(V)$ delle applicazioni lineari di V in sé, in quanto $\mathrm{Aut}(V)$ coincide con l'insieme $\{A \in \mathrm{End}(V) : \det(A) \neq 0\}$ e il determinante è una funzione continua. Quindi $\mathrm{Aut}(V)$ eredita la struttura di varietà differenziabile e, passando in coordinate locali, l'operazione di gruppo di $\mathrm{Aut}(V)$ è il prodotto fra matrici, che è un'applicazione differenziabile. Ne segue che anche $\mathrm{Aut}(V)$ possiede una struttura canonica di gruppo di Lie, e otteniamo i gruppi

$$GL(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad GL(n, \mathbb{C}) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n).$$

Poiché le applicazioni lineari di $\mathbb{K}^n$ in $\mathbb{K}^m$, dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, possono essere descritte da matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$, si ha che $GL(n, \mathbb{K})$ è canonicamente isomorfo al gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili, quindi possiamo pensare $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$ come gruppi di matrici.

È un gruppo di Lie anche S^1, inteso come l'insieme dei numeri complessi di modulo unitario, con il prodotto di numeri complessi. Inoltre, il *toro* $\mathbb{T}^n = (S^1)^n$ di dimensione n è un gruppo di Lie abeliano, in quanto se $G_1, \ldots, G_r$ sono gruppi di Lie, allora il prodotto cartesiano $G_1 \times \cdots \times G_r$ considerato col prodotto componente per componente è un gruppo di Lie.

Definizione 1.1.2. Un *omomorfismo* di gruppi di Lie è un'applicazione $F\colon G \to H$ fra gruppi di Lie che sia differenziabile e un omomorfismo di gruppi. Un *isomorfismo di gruppi di Lie* è un diffeomorfismo che è anche un isomorfismo di gruppi.

Ad esempio la funzione esponenziale $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ è un omomorfismo di gruppi di Lie ($\mathbb{R}^*$ è un gruppo di Lie con la moltiplicazione), in quanto è differenziabile e si ha $e^{t+s} = e^t \cdot e^s$.

Il rivestimento universale $\pi: \mathbb{R} \to S^1$ dato da $\pi(t) = e^{it}$ è un omomorfismo di gruppi di Lie. Più in generale, l'applicazione $\pi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ data da

$$\pi(t^1, \ldots, t^n) = (e^{it^1}, \ldots, e^{it^n})$$

è un omomorfismo di gruppi di Lie.

Definizione 1.1.3. Se G è un gruppo di Lie e h è un suo elemento, la *traslazione sinistra* $L_h: G \to G$ e la *traslazione destra* $R_h: G \to G$ sono rispettivamente definite da $L_h(g) = hg$ e $R_h(g) = gh$. Sono chiaramente diffeomorfismi di G con se stesso, ma non degli isomorfismi di gruppi di Lie. Invece, il *coniugio* $C_h: G \to G$ definito da $C_h(g) = hgh^{-1}$ è un isomorfismo di gruppi di Lie.

I gruppi di Lie appaiono spesso come gruppi di simmetria di una varietà:

Definizione 1.1.4. Siano G un gruppo di Lie, e M una varietà. Un'*azione* (*differenziabile*) di G su M è un'applicazione $\theta: G \times M \to M$ differenziabile tale che

$$\theta\big(g_1, \theta(g_2, p)\big) = \theta(g_1 g_2, p) \qquad \text{e} \qquad \theta(e, p) = p$$

per tutti gli elementi g_1, g_2 di G e p in M, dove e è l'elemento neutro di G. Per ogni g in G sia $\theta_g: M \to M$ data da $\theta_g(p) = \theta(g, p)$; allora si ha $\theta_{g_1} \circ \theta_{g_2} = \theta_{g_1 g_2}$ e $\theta_e = \mathrm{Id}_M$.

Definizione 1.1.5. Siano G un gruppo di Lie, M una varietà e θ un'azione di G su M. L'azione è detta *fedele*, o *effettiva*, se l'applicazione che ad ogni elemento g di G associa θ_g è iniettiva.

Ad esempio il gruppo $GL(n, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, agisce su $\mathbb{K}^n$ per moltiplicazione. Notiamo inoltre che un gruppo di Lie agisce su se stesso in almeno due modi: per traslazione sinistra, e per coniugio.

Definizione 1.1.6. Sia $\theta: G \times M \to M$ un'azione di un gruppo di Lie G su una varietà M. L'*orbita* di un punto $p \in M$ è l'insieme $G \cdot p = \{\theta_g(p) : g \in G\}$. Si vede facilmente che le orbite costituiscono una partizione di M, cioè che la relazione "appartenere ad una stessa orbita" è di equivalenza. Indicheremo con M/G lo spazio quoziente relativo a questa relazione di equivalenza, e diremo che l'azione è *transitiva* se esiste un'unica orbita, ossia se per ogni p, $q \in M$ esiste $g \in G$ tale che $\theta_g(p) = q$.

1.2 Campi vettoriali su gruppi di Lie e algebre di Lie

Definizione 1.2.1. Un campo vettoriale X su un gruppo di Lie G è *invariante a sinistra* se si ha $\mathrm{d}L_h(X) = X$ per ogni $h \in G$, cioè se

$$\forall h, g \in G \qquad \mathrm{d}(L_h)_g(X_g) = X_{hg},$$

dove $L_h: G \to G$ è la traslazione sinistra.

I campi vettoriali invarianti a sinistra sono particolarmente importanti, in quanto sono strettamente legati allo spazio tangente a G nel suo elemento neutro, come mostra il risultato che segue.

Lemma 1.2.2. *Sia G un gruppo di Lie di elemento neutro $e \in G$. Allora:*

(i) *L'applicazione $X \mapsto X(e)$ è un isomorfismo fra il sottospazio dei campi vettoriali su G costituito dai campi vettoriali invarianti a sinistra e lo spazio tangente T_eG.*

(ii) *Se X e Y sono campi vettoriali su G invarianti a sinistra, allora anche il campo vettoriale $[X, Y] = XY - YX$ lo è.*

Dimostrazione. (i) Se X è un campo vettoriale su G invariante a sinistra, chiaramente abbiamo

$$X(h) = \mathrm{d}L_h\bigl(X(e)\bigr)$$

per ogni $h \in G$, per cui X è completamente determinato dal suo valore in e. Viceversa, se scegliamo $v \in T_eG$ e poniamo $X_v(h) = \mathrm{d}L_h(v) \in T_hG$ per ogni $h \in G$ otteniamo un campo vettoriale invariante a sinistra che vale v nell'elemento neutro.

(ii) Se X e Y sono campi vettoriali invarianti a sinistra si ha

$$XY(f \circ L_h) = X((\mathrm{d}L_h Y(f)) \circ L_h) = (\mathrm{d}L_h X\, \mathrm{d}L_h Y)(f) \circ L_h,$$

e, analogamente,

$$YX(f \circ L_h) = (\mathrm{d}L_h Y\, \mathrm{d}L_h X)(f) \circ L_h.$$

Quindi

$$\mathrm{d}L_h[X, Y] = [\mathrm{d}L_h X, \mathrm{d}L_h Y] = [X, Y]$$

per ogni $h \in G$, per cui anche $[X, Y]$ è invariante a sinistra. □

Dunque lo spazio tangente all'identità di un gruppo di Lie eredita dai campi vettoriali invarianti a sinistra un'ulteriore struttura algebrica data dalla parentesi di Lie $[\cdot, \cdot]$.

Definizione 1.2.3. Uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ dotato di un'ulteriore operazione $[\cdot\,, \cdot]\colon V \times V \to V$ che, per ogni v_1, v_1, v_3 in V e per ogni a, b in $\mathbb{K}$, soddisfa le seguenti proprietà:

(i) $[v_1, v_2] = -[v_2, v_1]$ (anticommutatività),

(ii) $[av_1 + bv_2, v_3] = a[v_1, v_3] + b[v_2, v_3]$ (linearità),

(iii) $\bigl[v_1, [v_2, v_3]\bigr] + \bigl[v_2, [v_3, v_1]\bigr] + \bigl[v_3, [v_1, v_2]\bigr] = 0$ (identità di Jacobi),

è detto un'*algebra di Lie.* Se V e W sono algebre di Lie, un *morfismo* di algebre di Lie è un'applicazione $L\colon V \to W$ lineare che soddisfi $[L(v_1), L(v_2)] = L[v_1, v_2]$ per ogni coppia di elementi v_1, v_2 di V.

Esempio 1.2.4. Sia A un'algebra non commutativa sul campo $\mathbb{K}$. Allora possiamo munire A di una struttura di algebra di Lie tramite il *commutatore* $[\cdot\,, \cdot]\colon A \times A \to A$ definito da

$$[X, Y] = XY - YX \qquad \forall X, Y \in A;$$

si verifica subito che il commutatore soddisfa le proprietà (i)-(iii) della Definizione 1.2.3. In particolare se consideriamo l'algebra associativa degli endomorfismi di uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$, otteniamo l'*algebra di Lie degli endomorfimi di* V, che denotiamo con $\mathfrak{gl}(V)$; per $V = \mathbb{K}^n$ l'algebra di Lie $\mathfrak{gl}(V)$ verrà indicata con $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Definizione 1.2.5. Sia G un gruppo di Lie di elemento neutro e. Per ogni v in T_eG, indichiamo con X_v il campo vettoriale su G invariante a sinistra che verifica $X_v(e) = v$. Lo spazio tangente all'elemento neutro, considerato con la sua struttura di spazio vettoriale e con l'operazione $[\cdot,\cdot]\colon T_eG \times T_eG \to T_eG$ definita da $[v, w] = [X_v, X_w](e)$, è detto l'*algebra di Lie del gruppo* G e si denota con $\mathfrak{g}$.

Definizione 1.2.6. Sia G un gruppo di Lie connesso. Un *sottogruppo a un parametro* di G è un'applicazione differenziabile $\theta\colon \mathbb{R} \to G$ che sia un omomorfismo di gruppi. In altre parole, richiediamo che $\theta(0)$ sia l'elemento neutro e di G, e che, per ogni s, t appartenenti a $\mathbb{R}$, si abbia $\theta(t + s) = \theta(t) \cdot \theta(s)$.

Proposizione 1.2.7. *La corrispondenza tra l'insieme dei sottogruppi a un parametro di un gruppo di Lie connesso G e l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G definita da*

$$\Theta\colon \theta \mapsto \dot\theta(0),$$

per ogni sottogruppo a un parametro θ, è una biiezione canonica.

Dimostrazione. Possiamo interpretare $\mathfrak{g}$ come lo spazio dei campi vettoriali su G invarianti a sinistra. Allora l'inversa di Θ è l'applicazione che ad ogni campo vettoriale invariante a sinistra X di $\mathfrak{g}$ associa la curva integrale di X avente come punto iniziale l'elemento neutro e di G, che denotiamo con θ^X. Basta quindi dimostrare che θ^X è un sottogruppo a un parametro. Infatti, se Φ è il flusso associato a X, allora vale $\theta^X(s+t) = \Phi_{t+s}(e) = \Phi_t(\Phi_s(e))$ e, poiché X è invariante a sinistra, lo è anche Φ, ossia $\Phi_t(ge) = g\,\Phi_t(e)$ per ogni g in G. Quindi, prendendo $g = \Phi_s(e)$, si ha

$$\Phi_t(\Phi_s(e) \cdot e) = \Phi_s(e)\Phi_t(e) = \theta^X(s) \cdot \theta^X(t),$$

ossia θ^X è un omomorfismo di gruppi di Lie fra $\mathbb{R}$ e G. È evidente che la composizione $X \mapsto \theta^X \mapsto \dot\theta^X(0)$ è l'identità. Viceversa, per vedere che anche la composizione $\theta \mapsto \dot\theta(0) = X \mapsto \theta^X$ è l'identità, osserviamo che il sottogruppo a un parametro θ definisce un flusso $\Phi\colon \mathbb{R} \times G \to G$; tale flusso è definito da $(t, g) \mapsto g \cdot \theta(t)$, e verifica $\partial/\partial t|_0 \Phi(t, g) = \mathrm{d}L_g(\dot\theta(0))$, che è lo stesso flusso che corrisponde al campo vettoriale invariante X. Ne segue che le loro curve integrali del flusso Φ e del fllusso di X con punto iniziale e devono coincidere, ossia $\theta = \theta^X$. $\square$

Esempio 1.2.8. Uno spazio vettoriale reale o complesso, visto come gruppo di Lie, coincide con la sua algebra di Lie e il sottogruppo a un parametro corrispondente ad un elemento v di V è $\theta^v(t) = tv$.

Analogamente, il toro $\mathbb{T}^n$ ha come algebra di Lie $\mathbb{R}^n$ e il sottogruppo a un parametro corrispondente a un elemento v di $\mathbb{R}^n$ è $\theta^v(t) = tv \pmod{\mathbb{Z}^n}$.

Il gruppo degli automorfismi lineari $\mathrm{Aut}(V)$ di uno spazio vettoriale V ha come algebra di Lie lo spazio $\mathrm{End}(V)$ di tutti gli endomorfismi lineari di V, in quanto $\mathrm{Aut}(V)$ è una sottovarietà aperta di $\mathrm{End}(V)$. Il sottogruppo a un parametro corrispondente ad un endomorfismo A di V è $\theta^A\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(V)$ dato da

$$t \mapsto \exp(tA) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(tA)^k}{k!}.$$

Definizione 1.2.9. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. L'applicazione *aggiunta* di $\mathfrak{g}$ è l'omomorfismo di algebre di Lie $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ definito da $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$.

Proposizione 1.2.10. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. Allora:*

(i) per ogni elemento X di $\mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(X)$ è una derivazione;

(ii) l'applicazione aggiunta è un omomorfismo di $\mathfrak{g}$ nell'algebra $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ delle derivazioni di $\mathfrak{g}$;

(iii) se D è una derivazione di $\mathfrak{g}$ e X è un elemento di $\mathfrak{g}$ allora si ha

$$[D, \mathrm{ad}(X)] = \mathrm{ad}(DX).$$

Dimostrazione. L'identità di Jacobi può essere scritta come

$$\mathrm{ad}(X)[Y, Z] = [\mathrm{ad}(X)Y, Z] + [Y, \mathrm{ad}(X)Z]$$

oppure

$$\mathrm{ad}([X, Y])Z = \mathrm{ad}(X)(\mathrm{ad}(Y)Z) - \mathrm{ad}(Y)(\mathrm{ad}(X)Z),$$

da cui seguono le prime due affermazioni. D'altra parte, se D appartiene a $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ e X, Y sono elementi di $\mathfrak{g}$, allora si ha

$$[D, \mathrm{ad}(X)]Y = D[X, Y] - [X, DY] = [DX, Y] = \mathrm{ad}(DX)Y,$$

da cui segue l'ultima affermazione. □

Definizione 1.2.11. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. Una derivazione D di $\mathfrak{g}$ è detta *interna* se esiste un elemento X di $\mathfrak{g}$ tale che D coincida con $\mathrm{ad}(X)$.

1.3 Rappresentazioni

Definizione 1.3.1. Una *rappresentazione* di un gruppo di Lie G su uno spazio vettoriale complesso (di dimensione finita) V è un omomorfismo

$$\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(V)$$

di G in $\mathrm{Aut}(V)$. Diremo che la coppia (V, ρ) è una *rappresentazione complessa* e che V è lo *spazio della rappresentazione*. La dimensione di V come spazio vettoriale complesso è la *dimensione* della rappresentazione.

Se scriviamo in termini delle θ_g le equazioni della Definizione 1.1.4 che definiscono un'azione θ, esse diventano

$$\theta_g \circ \theta_h = \theta_{gh} \quad \text{e} \quad \theta_e = \mathrm{Id}_V .$$

Ne segue che θ_g è un automorfismo lineare di V con inverso $\theta_{g^{-1}}$, e che l'applicazione che ad ogni g in G associa la relativa θ_g è un omomorfismo

$$\Theta\colon G \to \mathrm{Aut}(V).$$

Reciprocamente, dato un tale omomorfismo Θ, indicato con Θ_g l'automorfismo di V associato all'elemento g di G, possiamo definire un'azione

$$\theta\colon G \times V \to V, \quad (g, v) \mapsto \Theta_g v.$$

È immediato verificare che θ è continua se e solo se lo è Θ.

Definizione 1.3.2. Una rappresentazione di un gruppo di Lie G è detta *fedele*, o *effettiva*, se l'omomorfismo associato $G \to \mathrm{Aut}(V)$ è iniettivo.

Esiste una nozione di rappresentazione anche per le algebre di Lie.

Definizione 1.3.3. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie su un campo $\mathbb{K}$ e sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Una *rappresentazione lineare di* $\mathfrak{g}$ *su* V è un omormofismo ρ di algebre di Lie di $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{gl}(V)$. La dimensione (finita o infinita) di V su $\mathbb{K}$ è detta la *dimensione* della rappresentazione.

Definizione 1.3.4. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie su un campo $\mathbb{K}$. Una rappresentazione lineare di $\mathfrak{g}$ su uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ è detta *fedele*, o *effettiva*, se è iniettiva.

Una rappresentazione lineare di $\mathfrak{g}$ su V è dunque un'applicazione $\mathbb{K}$-lineare ρ di $\mathfrak{g}$ nell'insieme degli endomorfismi di V che verifica

$$\rho([x, y])v = \rho(x)\rho(y)v - \rho(y)\rho(x)v$$

per ogni x, y appartenenti a $\mathfrak{g}$ e per ogni elemento v di V.

Sia G un gruppo di Lie e sia $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie. Se $\theta\colon G \to \mathrm{Aut}(V)$ è una rappresentazione di G, allora $\rho = \mathrm{d}_e\theta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ è una rappresentazione lineare di $\mathfrak{g}$ sullo spazio vettoriale degli endomorfismi di V e il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{gl}(V) \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\theta"] & \mathrm{Aut}(V) \end{tikzcd}$$

dove exp è l'applicazione esponenziale (si veda [BtD] pag. 111). Ne segue che *ogni rappresentazione di un gruppo di Lie G di dimensione finita induce una rappresentazione lineare della sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$.*

Esempio 1.3.5. *Rappresentazione Aggiunta.* Sia G un gruppo di Lie. Abbiamo già osservato che G agisce su se stesso attraverso il coniugio; questo induce un omomorfismo di gruppi di Lie

$$\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{Aut}(G)$$

definito da $\mathrm{Ad}(g)h = ghg^{-1}$ per ogni g, h appartenenti a G. Il differenzale nell'elemento neutro di G di tale omomorfismo, che denotiamo ancora con Ad, induce una rappresentazione di G sulla sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$

$$\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$$

che soddisfa

$$\exp(\mathrm{Ad}(g)X) = \mathrm{Ad}(g)\exp X = g(\exp X)g^{-1} \tag{1.3.1}$$

per ogni g in G e per ogni X appartenente a $\mathfrak{g}$. Possiamo dunque considerare la rappresentazione di $\mathfrak{g}$ indotta da Ad, che denotiamo con $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Vale la seguente relazione

$$\exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X))Y = \mathrm{Ad}(\exp X)Y \tag{1.3.2}$$

per ogni coppia di elementi X, Y di $\mathfrak{g}$. La rappresentazione $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ è detta *rappresentazione aggiunta.*

Non è un caso che la rappresentazione aggiunta $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ e l'applicazione aggiunta ad abbiano lo stesso nome, come mostra il prossimo risultato.

Proposizione 1.3.6. *Sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie G. Allora la rappresentazione aggiunta* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ *di $\mathfrak{g}$ coincide con l'applicazione aggiunta* ad.

Dimostrazione. Sia X un elemento di $\mathfrak{g}$. Poiché $t \mapsto \exp(tX)$ è una curva liscia in G il cui vettore tangente in $t = 0$ è X, possiamo calcolare $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ come

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp(tX)).$$

Dato che $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ appartiene all'algebra di Lie di $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, che possiamo identificare in un modo canonico con $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, per ogni elemento Y di $\mathfrak{g}$ si ha

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)Y = \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp(tX))\right)Y = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\mathrm{Ad}(\exp(tX)Y).$$

Essendo un elemento di $\mathfrak{g}$, $\mathrm{Ad}(\exp(tX)Y)$ è un campo vettoriale su G invariante a sinistra, quindi è determinato dal suo valore nell'elemento neutro e di G. Usando l'uguaglianza $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g) = \mathrm{d}C_g = (\mathrm{d}R_{g^{-1}}) \circ (\mathrm{d}L_g)$, il valore di $\mathrm{Ad}(\exp(tX)Y)$ in e può esssere calcolato come segue

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Ad}(\exp(tX)Y))_e &= (\mathrm{d}R_{\exp(-tX)}) \circ (\mathrm{d}L_{\exp(tX)})T_e \\
&= (\mathrm{d}R_{\exp(-tX)})Y_{\exp(tX)} \\
&= (\mathrm{d}\theta_{-t})Y_{\theta_t(e)},
\end{aligned}$$

dove $\theta_t(g) = R_{\exp(tX)}(g)$ è il flusso di X. Prendendo la derivata rispetto a t e calcolandola in $t = 0$, otteniamo

$$(\mathrm{ad}_g(X)Y)_e = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\mathrm{d}\theta_{-t})Y_{\theta_t(e)} = [X, Y]_e = (\mathrm{ad}(X)Y)_e,$$

e questo completa la dimostrazione in quanto anche $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)Y$ è determinato dal suo valore in e. $\square$

1.4 Decomposizione di Jordan-Chevalley in dimensione finita

Definizione 1.4.1. Dato V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$, diremo che un elemento T di $\mathrm{End}(V)$ è *semi-semplice* se è diagonalizzabile, ossia esiste una base di V di autovettori per T. Diremo invece che T è *nilpotente* se esiste un intero positivo k tale che si abbia $T^k = 0$, dove T^k è inteso come la composizione di T con se stesso k volte.

Teorema 1.4.2. *Siano S e T due endomorfismi diagonalizzabili di uno spazio vettoriale V di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Allora S e T sono simultaneamente diagonalizzabili (ossia esiste una base di V di autovettori di S che sono autovettori anche per T) se e solo se S e T commutano, ossia $S \circ T = T \circ S$.*

Prima di poter procedere con la dimostrazione, abbiamo bisogno dei seguenti risultati preliminari.

Lemma 1.4.3. *Sia T un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale V di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$, e sia U un sottospazio vettoriale di V tale che $T(U) \subseteq U$. Allora la restrizione $T|_U : U \to U$, di T a U, è diagonalizzabile.*

Dimostrazione. L'ipotesi sulla diagonalizzabilità di T equivale al fatto che V si decompone nella somma diretta degli autospazi relativi agli autovalori distinti di T, ossia, denotati con $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tali autovalori e con V_{λ_j} l'autospazio relativo all'autovalore λ_j per ogni j, si ha $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$ (si veda [Ab] pag. 355). Basta dunque dimostrare che anche per U vale la decomposizione analoga, ossia $U = (U \cap V_{\lambda_1}) \oplus \cdots \oplus (U \cap V_{\lambda_k})$.

Sia u un elemento di U; siccome U è sottospazio di V, per ipotesi possiamo scriverlo come somma di elementi degli autospazi, $u = v_1 + \cdots + v_k$, dove v_j appartiene a V_{λ_j}. Fissato un indice j compreso tra 1 e k, si ha, indicata con I l'applicazione identica:

$$\left(\prod_{i \neq j} (T - \lambda_i I) \right) (u) = \left(\prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i) \right) v_j,$$

dove il primo prodotto indica la composizione degli endomorfismi, mentre il secondo indica il prodotto di numeri. Dato che l'immagine tramite T di U è inclusa in U, ogni v_j appartiene all'intersezione di U con V_{λ_j}, quindi abbiamo ottenuto l'inclusione $U \subseteq (U \cap V_{\lambda_1}) \oplus \cdots \oplus (U \cap V_{\lambda_k})$. Siccome l'inclusione opposta è ovvia, questo basta per concludere. □

Lemma 1.4.4. *Siano S e T due endomorfismi diagonalizzabili di uno spazio vettoriale V di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ tali che $S \circ T = T \circ S$. Sia inoltre λ un autovalore di S e V_λ il relativo autospazio. Allora l'immagine tramite T di V_λ è inclusa in V_λ, cioè $T(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.*

Dimostrazione. Se v un elemento di V_λ, allora:

$$S(T(v)) = (S \circ T)(v) = (T \circ S)(v) = T(S(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v).$$

Quindi $T(v)$ appartiene a V_λ e questo conclude la dimostrazione. □

Possiamo finalmente dimostrare il Teorema 1.4.2.

Dimostrazione. Se S e T sono simultaneamente diagonalizzabili, allora esiste una base di V rispetto alla quale S e T sono rappresentati da matrici diagonali. Siccome il prodotto tra matrici diagonali è commutativo, ne segue $S \circ T = T \circ S$.

Viceversa, supponiamo che S e T commutino. Siano $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_h}$ gli autospazi relativi agli autovalori distinti di S. Grazie al Lemma 1.4.4, per ogni j compreso tra 1 e h, vale l'inclusione $T(V_{\lambda_j}) \subseteq V_{\lambda_j}$; quindi, per il Lemma 1.4.3, la restrizione di T a V_{λ_j} è diagonalizzabile per ogni j. Sia ora, per j compreso tra 1 e h, $\mathcal{B}_j$ una base di autovettori di $T|_{V_{\lambda_j}}$ e sia $\mathcal{B}$ la base di V ottenuta riunendo $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_h$. Allora, $\mathcal{B}$ è composta da vettori che sono autovettori sia per S che per T, che equivale a dire che S e T sono simultaneamente diagonalizzabili. $\square$

Corollario 1.4.5. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$ e siano T_1, T_2 due endomorfismi di V che verificano $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$. Allora:*

(i) se T_1 e T_2 sono semi-semplici, allora lo è anche la loro somma;

(ii) se T_1 e T_2 sono nilpotenti, allora lo è anche la loro somma.

Dimostrazione. (i) Per il Teorema 1.4.2 esiste una base di V in cui T_1 e T_2 sono rappresentati da matrici diagonali. Allora in questa base la somma dei due endomorfismi è rappresentata da una matrice diagonale in quanto la somma di due endomorfismi è rappresentata dalla somma delle matrici che li rappresentano.

(ii) Per definizione esistono due interi positivi h e k per cui si ha $T_1^h = T_2^k = 0$. Allora vale $(T_1 + T_2)^{h+k} = 0$ in quanto i due endomorfismi commutano e quindi possiamo utilizzare lo sviluppo del binomio di Newton:

$$(T_1 + T_2)^{h+k} = \sum_{j=0}^{h+k} \binom{h+k}{j} T_1^{h+k-j} T_2^j.$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Teorema 1.4.6. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso e sia T appartenente a $\mathrm{End}(V)$. Allora:*

(i) esistono unici $T_\mathrm{s}, T_\mathrm{n}$ appartenenti a $\mathrm{End}(V)$ tali che: $T = T_\mathrm{s} + T_\mathrm{n}$, T_s è semi-semplice, T_n è nilpotente, T_s e T_n commutano;

(ii) esistono due polinomi $p(t), q(t)$ in una indeterminata, a coefficienti in $\mathbb{K}$ e privi di termine costante, tali che $T_\mathrm{s} = p(T)$, $T_\mathrm{n} = q(T)$, (quindi, in particolare, T_s e T_n commutano con ogni endomorfismo che commuta con T).

Dimostrazione. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori di T con molteplicità $m_1, \ldots, m_k$, rispettivamente. Il polinomio caratteristico di T sarà dunque $\prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j)^{m_j}$. Se V_j è il nucleo di $(T - \lambda_j \cdot \mathrm{Id})^{m_j}$, allora V è somma diretta dei sottospazi $V_1, \ldots, V_k$, ciascuno dei quali è stabile rispetto a T. È chiaro che, su ogni V_j, T ha polinomio caratteristico $(\lambda - \lambda_j)^{m_j}$. Applichiamo il Teorema Cinese del Resto (nell'anello $\mathbb{K}[\lambda]$) per trovare un polinomio $p(\lambda)$ che soddisfi il sistema di congruenze con moduli a due a due relativamente primi,

$$\begin{cases} p(\lambda) \equiv \lambda_1 & (\operatorname{mod} (\lambda - \lambda_1)^{m_1}) \\ \quad\vdots & \\ p(\lambda) \equiv \lambda_k & (\operatorname{mod} (\lambda - \lambda_k)^{m_k}) \\ p(\lambda) \equiv 0 & (\operatorname{mod} \lambda). \end{cases}$$

(Osserviamo che, se 0 è un autovalore di T, l'ultima congruenza è superflua, mentre altrimenti λ è relativamente primo con gli altri moduli); poniamo $q(\lambda)$ uguale a $\lambda - p(\lambda)$. È evidente che sia $p(\lambda)$ sia $q(\lambda)$ sono privi di termine noto, in quanto si ha $p(\lambda) \equiv 0 \ (\operatorname{mod} \lambda)$.

Poniamo $T_{\mathrm{s}} = p(T)$ e $T_{\mathrm{n}} = q(T)$. Siccome sono polinomi in T, gli endomorfismi T_{s} e T_{n} commutano l'uno con l'altro e con tutti gli endomorfismi che commutano con T. Inoltre stabilizzano tutti i sottospazi di V stabilizzati da T, quindi in particolare stabilizzano i V_j. La congruenza $p(\lambda) \equiv \lambda_j \ (\operatorname{mod} (\lambda - \lambda_j)^{m_j})$ mostra che la restrizione di $T_{\mathrm{s}} - \lambda_j \cdot \mathrm{Id}$ a V_j è nulla per ogni j, quindi T_{s} agisce in modo diagonale su V_j con un solo autovalore λ_j, ossia $p(T) = \lambda_j$ su ogni V_j. Ne segue che $p(T)$ è un elemento semi-semplice di $\mathrm{End}(V)$. Inoltre $q(T)$ è nilpotente su ciascun V_j, in quanto su V_j coincide con $T - \lambda_j$, quindi $q(T)$ è un endomorfismo nilpotente di V.

Resta da dimostrare l'unicità. Sia dunque $T = \tilde{T}_{\mathrm{s}} + \tilde{T}_{\mathrm{n}}$ un'altra decomposizione dello stesso tipo. Allora si ha $T_{\mathrm{s}} - \tilde{T}_{\mathrm{s}} = \tilde{T}_{\mathrm{n}} - T_{\mathrm{n}}$ e, per quanto dimostrato sopra, tutti questi endomorfismi commutano. Poiché la somma di endomorfismi semi-semplici [risp. nilpotenti] che commutano è ancora semi-semplice [risp. nilpotente], $T_{\mathrm{s}} - \tilde{T}_{\mathrm{s}}$ e $\tilde{T}_{\mathrm{n}} - T_{\mathrm{n}}$ sono sia semi-semplici che nilpotenti, quindi $T_{\mathrm{s}} - \tilde{T}_{\mathrm{s}} = \tilde{T}_{\mathrm{n}} - T_{\mathrm{n}} = 0$ in quanto solo l'endomorfismo nullo può essere simultaneamente semi-semplice e nilpotente. □

Definizione 1.4.7. La decomposizione $T = T_{\mathrm{s}} + T_{\mathrm{n}}$ è detta la *decomposizione di Jordan-Chevalley* (additiva) di T, o semplicemente la decomposizione di Jordan; T_{s} e T_{n} sono detti, rispettivamente, la *parte semi-semplice* e la *parte nilpotente* di T.

Dato uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, lo spazio $\mathrm{End}(V)$ degli endomorfismi di V è a sua volta uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$, e quindi ogni elemento di $\mathrm{End}(\mathrm{End}(V))$ ammette una decomposizione di Jordan-Chevalley. In particolare avremo una decomposizione di Jordan-Chevalley per $\mathrm{ad}(T)$ per ogni endomorfismo T di V. È naturale chiedersi quale sia la relazione fra la decomposizione di T e quella di $\mathrm{ad}(T)$; il prossimo risultato mostra che la decomposizione di $\mathrm{ad}(T)$ è univocamente determinata da quella di T.

Lemma 1.4.8. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, sia T appartenente a $\mathrm{End}(V)$ e sia $T = T_{\mathrm{s}} + T_{\mathrm{n}}$ la sua decomposizione di Jordan. Allora la decomposizione di Jordan di $\mathrm{ad}(T)$ in $\mathrm{End}(\mathrm{End}(V))$ è*

$$\mathrm{ad}(T) = \mathrm{ad}(T_{\mathrm{s}}) + \mathrm{ad}(T_{\mathrm{n}}).$$

Dimostrazione. Anzitutto mostriamo che se U è nilpotente o semi-semplice, allora lo è anche $\mathrm{ad}(U)$. Infatti se U è nilpotente allora lo sono anche la traslazione destra $R_U(Z) = ZU$ e la traslazione sinistra $L_U(Z) = UZ$; inoltre R_U e L_U commutano, quindi $\mathrm{ad}(U) = L_U - R_U$ è nilpotente. Se U è semi-semplice, allora scegliamo una base in cui sia diagonale e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ i suoi autovalori; considerata la base standard $\{e_{ij}\}$ di $\mathfrak{gl}(V)$ relativa alla base scelta, si ha $\mathrm{ad}(U)(e_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)e_{ij}$, quindi $\mathrm{ad}(U)$ è diagonale.

Quindi $\mathrm{ad}(T_\mathrm{s})$ e $\mathrm{ad}(T_\mathrm{n})$ sono, rispettivamente, semi-semplice e nilpotente, e commutano in quanto si ha

$$[\mathrm{ad}(T_\mathrm{s}), \mathrm{ad}(T_\mathrm{n})] = \mathrm{ad}([T_\mathrm{s}, T_\mathrm{n}]) = 0,$$

per cui la tesi segue dal punto (i) del Teorema 1.4.6. □

Il prossimo risultato ci sarà utile nel seguito.

Lemma 1.4.9. *Sia $\mathfrak{U}$ una $\mathbb{C}$-algebra di dimensione finita. Allora lo spazio* $\mathrm{Der}(\mathfrak{U})$ *delle derivazioni di $\mathfrak{U}$ contiene la parte semi-semplice e la parte nilpotente (in* $\mathrm{End}(\mathfrak{U})$*) di tutti i suoi elementi.*

Dimostrazione. Sia T un elemento di $\mathrm{Der}(\mathfrak{U})$ e siano S e N, rispettivamente, la sua parte semisemplice e la sua parte nilpotente in $\mathrm{End}(\mathfrak{U})$. Basta dimostrare che S appartiene a $\mathrm{Der}(\mathfrak{U})$. Per ogni elemento a di $\mathbb{C}$, consideriamo l'insieme $\mathfrak{U}_a$ dato da $\{u \in \mathfrak{U} : (T - aI)^k u = 0 \text{ per qualche } k \text{ dipendente da } u\}$, dove I è l'endomorfismo identico. Allora $\mathfrak{U}$ è la somma diretta degli $\mathfrak{U}_\lambda$ tali che λ è un autovalore di T (equivalentemente, di S) e S agisce su $\mathfrak{U}_\lambda$ come moltiplicazione per lo scalare λ.

Per ogni a, b in $\mathbb{C}$, si ha la seguente formula

$$(T - (a+b)I)^n(uv) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left((T - aI)^{n-j}u\right) \left((T - bI)^j v\right),$$

per ogni u, v in $\mathfrak{U}$. Infatti, la formula precedente è banalmente vera per $n = 0$ e si ha

$$\begin{aligned}(T - (a+b)I)(uv) &= T(uv) - auv - buv \\ &= (Tu - au)v + u(Tv - bv) \\ &= ((T - aI)u)v + u((T - bI)v);\end{aligned}$$

inoltre se è vera per n, allora lo è per $n + 1$ in quanto

$$\begin{aligned}(T - (a+b)I)^{n+1}(uv) &= (T - (a+b)I)(uv)\,(T - (a+b)I^n(uv) \\ &= (T - (a+b)I)(uv) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left((T - aI)^{n-j}u\right) \left((T - bI)^j v\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \left((T - aI)^{n+1-j}u\right) \left((T - bI)^j v\right).\end{aligned}$$

Ne segue che, per ogni a, b in $\mathbb{C}$, si ha $\mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_b \subseteq \mathfrak{U}_{a+b}$. Ora se u appartiene a $\mathfrak{U}_a$ e v a $\mathfrak{U}_b$, allora vale

$$S(uv) = (a+b)uv$$

in quanto uv appartiene a $\mathfrak{U}_{a+b}$; d'altra parte, si ha

$$(Su)v + u(Sv) = auv + ubv = (a+b)uv.$$

Dal fatto che $\mathfrak{U}$ è somma diretta degli $\mathfrak{U}_\lambda$ con λ autovalore di T, segue dunque che S è una derivazione. □

1.5 Decomposizione di Jordan-Chevalley astratta

Vogliamo generalizzare la decomposizione di Jordan-Chevalley in un'arbitraria algebra di Lie di dimensione finita. Per farlo abbiamo bisogno di introdurre la nozione di ideale di un'algebra di Lie e di algebra di Lie semi-semplice.

Un sottospazio I di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è detto un *ideale* di $\mathfrak{g}$ se per ogni elemento g di $\mathfrak{g}$ e ogni indice i di I si ha che $[g,i]$ appartiene a I. Ovviamente il sottospazio costituito dal solo elemento nullo e l'intera algebra $\mathfrak{g}$ sono ideali di $\mathfrak{g}$. Un esempio meno banale è il *centro* $Z(\mathfrak{g})$ dato da $\{z \in \mathfrak{g} : [g,z] = 0 \text{ per ogni } g \in \mathfrak{g}\}$. Osserviamo che $\mathfrak{g}$ è abeliana se e solo se vale $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Un altro esempio di ideale è l'*algebra derivata* di $\mathfrak{g}$, che denotiamo con $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, che è formata da tutte le combinazioni lineari dei commutatori $[g,h]$ con g e h elementi di $\mathfrak{g}$. È ovvio che $\mathfrak{g}$ è abeliana se e solo se l'algebra derivata è nulla.

Definizione 1.5.1. Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è detta *semplice* se è non abeliana e non ha ideali diversi da 0 e se stessa.

Definizione 1.5.2. Data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ la *serie derivata* di $\mathfrak{g}$ è la serie definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} \mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{(j+1)} = [\mathfrak{g}^{(j)}, \mathfrak{g}^{(j)}] \quad \forall j \geq 0. \end{cases}$$

Definizione 1.5.3. Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è detta *risolubile* se esiste un intero non negativo n per cui si abbia $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$.

Proposizione 1.5.4. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie.*

(i) Se $\mathfrak{g}$ è risolubile, allora ogni sottoalgebra $\mathfrak{a}$ di $\mathfrak{g}$ è risolubile ed ogni immagine di $\mathfrak{g}$ tramite un omomorfismo di algebre di Lie è un'algebra di Lie risolubile.

(ii) Se $\mathfrak{a}$ è un ideale risolubile di $\mathfrak{g}$ e l'algebra quoziente $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ è risolubile, allora $\mathfrak{g}$ è risolubile;

(iii) se $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ sono ideali risolubili di $\mathfrak{g}$ allora lo è anche $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

Dimostrazione. Per una dimostrazione si veda [Hu] pag. 11. □

Sia $\mathfrak{g}$ un'arbitraria algebra di Lie e sia S un ideale risolubile massimale rispetto all'inclusione. Se I è un altro ideale risolubile di $\mathfrak{g}$, allora per il punto (iii) della proposizione precedente, a causa della massimalità di S, deve essere $S + I = S$, cioè $I \subseteq S$. Quindi esiste un unico ideale risolubile massimale.

Definizione 1.5.5. L'unico ideale risolubile massimale di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è detto il *radicale* di $\mathfrak{g}$ ed è denotato con $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$.

Definizione 1.5.6. Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è detta *semi-semplice* se il suo radicale è l'ideale nullo, ossia $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = 0$.

Osserviamo che un'algebra semplice è semi-semplice, in quanto è non risolubile ed i suoi unici ideali sono l'ideale nullo e lei stessa. È ovvio che $\mathfrak{g} = \{0\}$ è semi-semplice. Inoltre, per ogni algebra di Lie $\mathfrak{g}$, grazie al punto (ii) della Proposizione precedente, $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ è semi-semplice.

Osservazione 1.5.7. Notiamo che *la condizione di semi-semplicità per un'algebra di Lie equivale a richiedere che l'algebra non contenga ideali abeliani diversi dall'ideale nullo.* Infatti ogni ideale abeliano non nullo è contenuto nel radicale; viceversa se il radicale non è nullo allora contiene un ideale abeliano non nullo (l'ultimo termine non zero della serie derivata del radicale).

Definizione 1.5.8. Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è detta *ridotta* se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è semi-semplice.

Proposizione 1.5.9. *Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita. Allora l'algebra di Lie $\mathfrak{gl}(V)$ è ridotta.*

Dimostrazione. Per una dimostrazione si veda [Bou2] pag. 60. □

Vediamo ora alcune proprietà delle algebre di Lie semi-semplici che ci serviranno nel seguito.

Definizione 1.5.10. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita. La *forma di Killing* è la forma bilineare simmetrica κ su $\mathfrak{g}$ che ad ogni coppia di elementi X, Y di $\mathfrak{g}$ associa

$$\kappa(X, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y))$$

dove con Tr indichiamo la traccia di endomorfismi di uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Osserviamo che la forma di Killing è associativa, nel senso che vale la relazione $\kappa([X, Y], Z) = \kappa(X, [Y, Z])$.

Lemma 1.5.11. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie e sia $\mathfrak{a}$ un suo ideale. Se κ è la forma di Killing di $\mathfrak{g}$ e $\kappa_{\mathfrak{a}}$ è la forma di Killing di $\mathfrak{a}$, visto come algebra di Lie, allora $\kappa_{\mathfrak{a}}$ coincide con $\kappa|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}$.*

Dimostrazione. Per una dimostrazione si veda [Hu] pag. 21. □

In generale, una forma bilineare simmetrica β è detta *non-degenere* se il suo *radicale*, ossia l'insieme S dato da $\{X \in \mathfrak{g} : \beta(X, Y) = 0 \text{ per ogni } Y \in \mathfrak{g}\}$, coincide con $\{0\}$. Poiché la forma di Killing è associativa, il suo radicale è un ideale di $\mathfrak{g}$.

Teorema 1.5.12. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. Allora $\mathfrak{g}$ è semi-semplice se e solo se la sua forma di Killing è non degenere.*

Dimostrazione. Per una dimostrazione si veda [Hu] pag. 22. □

Lemma 1.5.13. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semi-semplice. Allora $\mathfrak{g}$ coincide con la sua algebra derivata $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e tutti gli ideali di $\mathfrak{g}$ e le sue immagini mediante omomorfismi sono semi-semplici.*

Dimostrazione. Per una dimostrazione di veda [Hu] pag. 23. □

Come ulteriore corollario otteniamo il risultato seguente che ci sarà utile nel seguito.

Corollario 1.5.14. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semi-semplice e sia ρ una sua rappresentazione lineare su uno spazio vettoriale V di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Allora si ha $\rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{sl}(V)$, dove $\mathfrak{sl}(V)$ è lo spazio degli endomorfismi di V aventi traccia nulla.*

Dimostrazione. La tesi segue dal fatto che $\mathfrak{sl}(V)$ è l'algebra derivata di $\mathfrak{gl}(V)$ e, per il corollario precedente, si ha $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. □

Teorema 1.5.15. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semi-semplice. Allora ogni derivazione di $\mathfrak{g}$ è interna, ossia* $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$.

Dimostrazione. Dato che $\mathfrak{g}$ è semi-semplice, il suo centro $Z(\mathfrak{g})$ è nullo. Allora l'applicazione aggiunta $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ è un isomorfismo di algebre di Lie. In particolare per il Teorema 1.5.12, $\mathfrak{h} = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ ha una forma di Killing non degenere. Indichiamo con $\mathfrak{d}$ lo spazio $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Poiché per ogni g in $\mathfrak{g}$ e ogni δ in $\mathfrak{d}$ si ha

$$[\delta, \mathrm{ad}(g)] = \mathrm{ad}(\delta g), \tag{1.5.3}$$

si ha che $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ è un ideale di $\mathfrak{d}$, da cui segue $[\mathfrak{d}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. Questo implica, grazie al Lemma 1.5.11, che $\kappa_{\mathfrak{h}}$ è la restrizione a $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ della forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{d}}$ di $\mathfrak{d}$. In particolare, se $I = \mathfrak{h}^{\perp}$ è il sottospazio di $\mathfrak{d}$ ortogonale a $\mathfrak{h}$ tramite $\kappa_{\mathfrak{d}}$, allora la non degenericità di $\kappa_{\mathfrak{h}}$ implica che $I \cap \mathfrak{h}$ è zero. Sia I che $\mathfrak{h}$ sono ideali di $\mathfrak{d}$, quindi $[I, \mathfrak{h}]$ è contenuto sia in I, sia in $\mathfrak{h}$, ossia nell'intersezione dei due, che è zero. Ne segue che si ha $[I, \mathfrak{h}] = 0$. Se δ appartiene a I, allora, da (1.5.3) segue che $\mathrm{ad}(\delta g)$ è nullo per ogni g in $\mathfrak{g}$; quindi $\delta g = 0$ per ogni g in $\mathfrak{g}$ in quanto ad è biunivoca, da cui segue che δ è nullo. Ne segue che $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ coincide con $\mathfrak{h} = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$. □

In particolare, data un'algebra di Lie semi-semplice $\mathfrak{g}$, poiché tutte le derivazioni di $\mathfrak{g}$ sono interne, possiamo associare ad ogni suo elemento X gli elementi X^{s} e X^{n} tali che

$$\mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}(X^{\mathrm{s}}) + \mathrm{ad}(X^{\mathrm{n}})$$

sia la decomposizione di Jordan-Chevalley della derivazione $\mathrm{ad}(X)$ di $\mathfrak{g}$. Possiamo dunque usare la seguente definizione:

Definizione 1.5.16. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semi-semplice di dimensione finita. Un elemento X di $\mathfrak{g}$ è detto *semi-semplice* [risp. *nilpotente*] se $\mathrm{ad}(X)$ è semi-semplice [risp. nilpotente].

Se dunque $\mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}(X^{\mathrm{s}}) + \mathrm{ad}(X^{\mathrm{n}})$ è la decomposizione di Jordan-Chevalley di $\mathrm{ad}(X)$, chiameremo X^{s} e X^{n}, rispettivamente, la *parte semi-semplice* e la *parte nilpotente* di X in $\mathfrak{g}$.

Teorema 1.5.17. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso di caratteristica 0 e sia $\mathfrak{g}$ una sottoalgebra di Lie semi-semplice di $\mathfrak{gl}(V)$. Allora $\mathfrak{g}$ contiene le componenti semi-semplice e nilpotente di ogni suo elemento. In particolare, se X appartiene a $\mathfrak{g}$ allora la sua decomposizione di Jordan-Chevalley è $X = X^{\mathrm{s}} + X^{\mathrm{n}}$ se e solo se $\mathrm{ad}(X^{\mathrm{s}})$ e $\mathrm{ad}(X^{\mathrm{n}})$ sono le componenti semi-semplice e nilpotente nella decomposizione di Jordan-Chevalley di $\mathrm{ad}(X)$.*

Dimostrazione. Per una dimostrazione si veda [Hu] pag. 29. □

Teorema 1.5.18. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso di caratteristica 0. Sia $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ una rappresentazione lineare di dimensione finita di un'algebra di Lie semi-semplice $\mathfrak{g}$. Allora $\rho(X) = \rho(X^{\mathrm{s}}) + \rho(X^{\mathrm{n}})$ è, per ogni X di $\mathfrak{g}$, la decomposizione di Jordan-Chevalley dell'endomorfismo $\rho(X)$ di V.*

Dimostrazione. Fissiamo un elemento X di $\mathfrak{g}$ e sia $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} \mathfrak{g}^{\lambda}$ la decomposizione spettrale di $\mathfrak{g}$ rispetto all'endomorfismo $\mathrm{ad}(X)$. Se Y appartiene a $\mathfrak{g}^{\lambda}$, abbiamo

$$[\rho(X^{\mathrm{s}}), \rho(Y)] = \lambda \rho(Y)$$

e quindi otteniamo la decomposizione

$$\rho(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} \rho(\mathfrak{g})^{\lambda} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} \rho(\mathfrak{g}^{\lambda}).$$

Chiaramente $\mathrm{ad}(\rho(X^{\mathrm{s}}))$ e $\mathrm{ad}(\rho(X^{\mathrm{n}}))$ sono le componenti semi-semplice e nilpotente di $\mathrm{ad}(\rho(X))$. Ne segue che, per il Teorema 1.5.17, $\rho(X^{\mathrm{s}})$ e $\rho(X^{\mathrm{n}})$ sono la componente semi-semplice e nilpotente di $\rho(X)$. □

1.6 Decomposizione di Jordan-Chevalley in dimensione infinita

Sia I un insieme preordinato e sia $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una famiglia di insiemi indicizzati da I. Per ogni coppia (α, β) di elementi di I tali che $\alpha \leq \beta$, sia $f_{\alpha\beta}$ un'applicazione di E_β in E_α che soddisfa le seguenti condizioni:

(i) se si ha $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, allora vale $f_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma}$,

(ii) per ogni α appartenente a I, $f_{\alpha\alpha}$ coincide con l'identità di E_α.

Sia

$$E = \left\{ x \in \prod_{\alpha \in I} E_\alpha : p_\alpha(x) = f_{\alpha\beta}(p_\beta(x)) \text{ per ogni coppia } (\alpha, \beta) \text{ con } \alpha \leq \beta \right\},$$

dove p_α è la proiezione di $\prod_{\alpha \in I} E_\alpha$ sul fattore E_α. Allora E è detto il *limite proiettivo della famiglia $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ rispetto alla famiglia di applicazioni $\{f_{\alpha\beta}\}$*, e scriveremo $E = \varprojlim (E_\alpha, f_{\alpha\beta})$, o semplicemente $E = \varprojlim E_\alpha$, quando non c'è rischio di ambiguità. Con abuso di linguaggio, la coppia $(\{E_\alpha\}, \{f_{\alpha\beta}\})$ (che di solito viene indicata con $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$) è detta un *sistema proiettivo di insiemi relativo all'insieme degli indici* I. La restrizione π_α della proiezione p_α a E è detta *applicazione canonica* di E in E_α, e si ha la relazione seguente (che non è altro che una riscrittura della relazione che definisce E)

$$\pi_\alpha = f_{\alpha\beta} \circ \pi_\beta$$

per ogni coppia $\alpha \leq \beta$.

Proposizione 1.6.1. *Siano I un insieme ordinato, $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ un sistema proiettivo di insiemi relativo ad I, $E = \varprojlim E_\alpha$ il suo limite proiettivo e π_α le applicazioni canoniche. Per ogni $\alpha \in I$ sia u_α un'applicazione di un insieme F in E_α tale che*

$$f_{\alpha\beta} \circ u_\beta = u_\alpha$$

per ogni $\alpha \leq \beta$. Allora:

(a) esiste un'unica applicazione u di F in E che, per ogni $\alpha \in I$, verifica

$$u_\alpha = \pi_\alpha \circ u;$$

(b) l'applicazione u è iniettiva se e solo se, per ogni coppia di elementi distinti y, z di F, esiste $\alpha \in I$ tale che $u_\alpha(y) \neq u_\alpha(z)$.

Dimostrazione. Per una dimostrazione si veda [Bou1] pag. 193. □

Dalla Proposizione precedente segue dunque il risultato seguente.

Proprietà universale del limite proiettivo. *Siano I un insieme ordinato, $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ un sistema proiettivo di insiemi relativo a I. Allora il limite proiettivo $E = \varprojlim E_\alpha$ è unico a meno di isomorfismo.*

Osservazione 1.6.2. Nel seguito, con un abuso di notazione, diremo che un oggetto canonicamente isomorfo al limite proiettivo di un sistema proiettivo *è il limite proiettivo del sistema.*

Corollario 1.6.3. *Siano $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ e $(F_\alpha, g_{\alpha\beta})$ due sistemi proiettivi di insiemi relativi allo stesso insieme degli indici I; siano $E = \varprojlim E_\alpha$ e $F = \varprojlim F_\alpha$ i relativi limiti proiettivi, e siano f_α e g_α le relative applicazioni canoniche. Per ogni $\alpha \in I$, sia u_α un'applicazione di E in F_α tale che il diagramma*

$$\begin{tikzcd} E_\beta \arrow[r, "u_\beta"] \arrow[d, "f_{\alpha\beta}"'] & F_\beta \arrow[d, "g_{\alpha\beta}"] \\ E_\alpha \arrow[r, "u_\alpha"'] & F_\alpha \end{tikzcd}$$

sia commutativo (ossia $u_\alpha \circ f_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \circ u_\beta$) per ogni $\alpha \leq \beta$. Allora esiste un'unica applicazione $u\colon E \to F$ che, per ogni $\alpha \in I$ rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & F \arrow[d, "g_\alpha"] \\ E_\alpha \arrow[r, "u_\alpha"'] & F_\alpha \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Per una dimostrazione si veda [Bou1] pag. 193. □

Una famiglia di applicazioni che soddisfa le ipotesi del corollario precedente è detta un *sistema proiettivo di applicazioni di* $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ *in* $(F_\alpha, g_{\alpha\beta})$. L'applicazione u definita dal Corollario è detta *limite proiettivo della famiglia* $\{u_\alpha\}$ ed è indicata con $u = \varprojlim u_\alpha$.

Corollario 1.6.4. *Siano* $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$, $(F_\alpha, g_{\alpha\beta})$ *e* $(G_\alpha, h_{\alpha\beta})$ *tre sistemi proiettivi di insiemi relativi allo stesso insieme degli indici* I*; siano* $E = \varprojlim E_\alpha$, $F = \varprojlim F_\alpha$ *e* $G = \varprojlim G_\alpha$ *i relativi limiti proiettivi, e siano* f_α, g_α *e* h_α *le relative applicazioni canoniche. Se* $\{u_\alpha\}$ *e* $\{v_\alpha\}$ *sono due sistemi proiettivi di applicazioni,* $u_\alpha\colon E_\alpha \to F_\alpha$ *e* $v_\alpha\colon F_\alpha \to G_\alpha$*, allora le applicazioni composte* $v_\alpha \circ u_\alpha\colon E_\alpha \to G_\alpha$ *formano un sistema proiettivo di applicazioni e si ha*

$$\varprojlim (v_\alpha \circ u_\alpha) = \big(\varprojlim v_\alpha\big) \circ \big(\varprojlim u_\alpha\big).$$

Dimostrazione. Per una dimostrazione si veda [Bou1] pag. 194. □

Lemma 1.6.5. *Siano* $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ *e* $(F_\alpha, g_{\alpha\beta})$ *due sistemi proiettivi di insiemi relativi allo stesso insieme degli indici* I*; siano* $E = \varprojlim E_\alpha$ *e* $F = \varprojlim F_\alpha$ *i relativi limiti proiettivi, e siano* f_α*, e sia* $\{u_\alpha\}$ *un sistema proiettivi di applicazioni,* $u_\alpha\colon E_\alpha \to F_\alpha$*. Supponiamo inoltre che* u_α *sia iniettiva [risp. biunivoca] per ogni* α *in* I*. Allora* $u = \varprojlim u_\alpha$ *è iniettiva [risp. biunivoca].*

Dimostrazione. Per una dimostrazione si veda [Bou1] pag. 195. □

Proposizione 1.6.6. *Sia* $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ *un sistema proiettivo di insiemi relativo ad un insieme numerabile e supponiamo che le applicazioni* $f_{\alpha\beta}$ *siano suriettive. Allora, per ogni* $\alpha \in I$*, l'applicazione canonica* $f_\alpha\colon \big(\varprojlim E_\alpha\big) \to E_\alpha$ *è suriettiva (e, a fortiori, se nessuno degli* E_α *è vuoto, si ha che* $\varprojlim E_\alpha$ *è non vuoto).*

Dimostrazione. Per una dimostrazione si veda [Bou1] pag. 198. □

Un sistema proiettivo di insiemi $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ relativo ad un insieme di indici numerabile tale che ogni applicazione canonica sia suriettiva è detto *suriettivo*.

Definizione 1.6.7. Uno spazio vettoriale complesso V è detto *filtrato* se ha dimensione infinita ed è limite proiettivo di una catena crescente di suoi sottospazi vettoriali

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_k \subset V_{k+1} \subset \cdots,$$

detta *filtrazione su* V, dove ogni V_k è uno spazio vettoriale di dimensione finita e vale $\dim(V_k) < \dim(V_{k+1})$.

Esempio 1.6.8. *Lo spazio vettoriale complesso delle serie formali in* n *variabili a coefficienti complessi nulle nell'origine di* $\mathbb{C}^n$*, che indichiamo con* $\widehat{\mathcal{O}}_n$*, è uno spazio vettoriale filtrato.* Consideriamo infatti la filtrazione

$$J_n^1 \subset J_n^2 \subset \cdots \subset J_n^k \subset J_n^{k+1} \subset \cdots,$$

dove, per ogni $k \geq 1$, J_n^k indica lo spazio vettoriale dei polinomi in n variabili a coefficienti complessi privi di termine noto e di grado inferiore o uguale a k. Ogni J_n^k ha dimensione finita e si ha $\dim(J_n^k) \leq \dim(J_n^{k+1})$. Inoltre per ogni $k \leq l$, il troncamento π_{kl} di un polinomio di J_n^l ai suoi termini di grado k è un'applicazione suriettiva. Ne segue che (J_n^k, π_{kl}) è un sistema proiettivo suriettivo il cui limite proiettivo è $\widehat{\mathcal{O}}_n$.

Definizione 1.6.9. Sia V uno spazio vettoriale complesso filtrato. Un endomorfismo f di V è *compatibile con la filtrazione su* V se, indicata con ι_k l'iniezione canonica di V_k in V, si ha

$$\pi_k \circ f = f \circ \iota_k, \tag{1.6.4}$$

dove π_k è l'applicazione canonica di V in V_k definita dal limite proiettivo.

Notiamo che se f è un endomorfismo di V compatibile con la filtrazione, allora, per ogni coppia di indici k, l con $l \leq k$, si ha

$$\pi_l \circ \pi_k \circ f = \pi_l \circ f. \tag{1.6.5}$$

Definizione 1.6.10. Sia V uno spazio vettoriale complesso filtrato e sia $\{V_k\}_{k\geq 1}$ la sua filtrazione. Una successione di endomorfismi $\{f_k\}_{k\geq 1}$ con f_k appartenente a $\mathrm{End}(V_k)$ è detta *subordinata alla filtrazione* se per ogni coppia di indici k, l con $l \leq k$ vale la relazione

$$\pi_l \circ f_k = f_l.$$

Ad esempio, se f è un endomorfismo di V compatibile con la filtrazione, allora la successione $\{\pi_k \circ f|_{V_k}\}$ è subordinata alla filtrazione ed è un sistema proiettivo di applicazioni il cui limite proiettivo è f. Viceversa, se $\{f_k\}$ è una successione subordinata alla filtrazione allora è un sistema proiettico e il suo limite proiettivo è un endomorfismo di V in quanto V è limite proiettivo dei V_k. Questo ci porta alla prossima definizione.

Definizione 1.6.11. Un endomorfismo f di uno spazio vettoriale complesso filtrato compatibile con la filtrazione è detto *semi-semplice* [risp. *nilpotente*] se è limite proiettivo di una successione di endomorfismi semi-semplici [risp. nilpotenti] $\{f_k\}$ subordinata alla filtrazione.

Definizione 1.6.12. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale complesso V. Diremo che f *ammette una decomposizione di Jordan-Chevalley* se è decomponibile come somma di un endomorfismo f^{s} di V semi-semplice con un endomorfismo f^{n} di V nilpotente che commutano.

Teorema 1.6.13. *Sia V uno spazio vettoriale complesso filtrato. Allora ogni endomorfismo f compatibile con la filtrazione di V ammette un'unica decomposizione di Jordan-Chevalley.*

Dimostrazione. Per quanto visto sopra, f è limite proiettivo degli endomorfismi f_k definiti da $f_k = \pi_k \circ f|_{V_k}$, che sono subordinati alla filtrazione. Ogni f_k è un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita quindi, per il Teorema 1.4.6, f_k si decompone in modo unico come somma di un endomorfismo f_k^{s} di V_k semi-semplice con uno nilpotente f_k^{n}. Inoltre $\{f_k^{\mathrm{s}}\}$ e $\{f_k^{\mathrm{n}}\}$ sono subordinate alla filtrazione, in quanto lo è $\{f_k\}$ (per la compatibilità di f) e, per ogni k, gli endomorfismi f_k^{s} e f_k^{n} sono espressioni polinomiali, prive di termine noto, di f_k. Passando al limite proiettivo, f si scrive come somma del limite proiettivo f^{s} degli f_k^{s} con il limite proiettivo f^{n} degli f_k^{n}. Infine, poiché per ogni k si ha $[f_k^{\mathrm{s}}, f_k^{\mathrm{n}}] = 0$, grazie al punto (b) della Proposizione 1.6.1, passando al limite proiettivo, si ha ancora $[f^{\mathrm{s}}, f^{\mathrm{n}}] = 0$. □

Definizione 1.6.14. Sia V uno spazio vettoriale compleso filtrato. Diremo che l'aggiunta $\mathrm{ad}_{\mathrm{End}(V)}$ *è compatibile con la filtrazione* $\{V_k\}$ se per ogni endomorfismo f di V compatibile con la filtrazione si ha

$$\pi_k \circ \mathrm{ad}(f)|_{V_k} = \mathrm{ad}_{V_k}(\pi_k \circ f),$$

dove π_k è l'applicazione canonica di V in V_k.

Lemma 1.6.15. *Sia V uno spazio vettoriale complesso filtrato con filtrazione $\{V_k\}$ e proiezioni $\{\pi_k\}$. Supponiamo inoltre l'aggiunta* $\mathrm{ad}_{\mathrm{End}(V)}$ *sia compatibile con la filtrazione. Allora per ogni endomorfismo f di V compatibile con la filtrazione la decomposizione di Jordan-Chevalley di* $\mathrm{ad}(f)$ *è* $\mathrm{ad}(f) = \mathrm{ad}(f^{\mathrm{s}}) + \mathrm{ad}(f^{\mathrm{n}})$, *dove $f = f^{\mathrm{s}} + f^{\mathrm{n}}$ è la decomposizione di Jordan-Chevalley di f.*

Dimostrazione. La filtrazione su V induce una filtrazione su $\mathfrak{gl}(V)$ che a sua volta induce una filtrazione su $\mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$. Anzitutto mostriamo che se f è un endomorfismo compatibile con la filtrazione, allora vale $\mathrm{ad}(\varprojlim(\pi_k \circ f|_{V_k})) = \varprojlim(\mathrm{ad}_{V_k}(\pi_k \circ f))$. Infatti si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(f) &= \mathrm{ad}(\varprojlim(\pi_k \circ f|_{V_k})) \\ &= \varprojlim(\pi_k \circ (\mathrm{ad}(\varprojlim(\pi_k \circ f|_{V_k}))|_{V_k})) \\ &= \varprojlim(\mathrm{ad}_{V_k}(\pi_k \circ (\varprojlim(\pi_k \circ f|_{V_k})))) \\ &= \varprojlim(\mathrm{ad}_{V_k}(\pi_k \circ f)). \end{aligned} \tag{1.6.6}$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(f) &= \varprojlim(\mathrm{ad}_{V_k}(\pi_k \circ f)) \\ &= \varprojlim((\mathrm{ad}_{V_k}(\pi_k \circ f))^{\mathrm{s}} + (\mathrm{ad}_{V_k}(\pi_k \circ f))^{\mathrm{n}}) \\ &= \varprojlim(\mathrm{ad}_{V_k}((\pi_k \circ f)^{\mathrm{s}}) + \mathrm{ad}_{V_k}((\pi_k \circ f)^{\mathrm{n}})) \\ &= \mathrm{ad}(\varprojlim(\pi_k \circ f|_{V_k})^{\mathrm{s}}) + \mathrm{ad}(\varprojlim(\pi_k \circ f|_{V_k})^{\mathrm{n}}). \end{aligned} \tag{1.6.7}$$

Quindi si ha $\mathrm{ad}(f) = \mathrm{ad}(f^{\mathrm{s}}) + \mathrm{ad}(f^{\mathrm{n}})$, dato che $f^{\mathrm{s}} = \varprojlim(\pi_k \circ f|_{V_k})^{\mathrm{s}})$ e, analogamente, $f^{\mathrm{n}} = \varprojlim(\pi_k \circ f|_{V_k})^{\mathrm{n}})$. Inltre da (1.6.7), e grazie al Lemma 1.4.8, segue immediatamente che $\mathrm{ad}(f^{\mathrm{s}})$ [risp. $\mathrm{ad}(f^{\mathrm{n}})$] è semi-semplice [risp. nilpotente] e che $\mathrm{ad}(f^{\mathrm{s}})$ e $\mathrm{ad}(f^{\mathrm{n}})$ commutano. □

In maniera del tutto analoga e sfruttando il Lemma 1.4.9 si dimostra il seguente risultato.

Lemma 1.6.16. *Sia $\mathfrak{U}$ una $\mathbb{C}$-algebra di dimensione infinita filtrata con filtrazione $\{\mathfrak{U}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Allora lo spazio* $\mathrm{Der}(\mathfrak{U})$ *delle derivazioni di $\mathfrak{U}$ contiene la parte semi-semplice e la parte nilpotente in* $\mathrm{End}(\mathfrak{U})$ *di tutti i suoi elementi compatibili con la filtrazione.*

Dimostrazione. Sia X una derivazione di $\mathfrak{U}$ compatibile con la filtrazione e consideriamo la sua decomposizione di Jordan-Chevalley $X = X^{\mathrm{s}} + X^{\mathrm{n}}$. Abbiamo visto che $X = \varprojlim \pi_k \circ X|_{\mathfrak{U}_k}$, $X^{\mathrm{s}} = \varprojlim \pi_k \circ X^{\mathrm{s}}|_{\mathfrak{U}_k}$ e $X^{\mathrm{n}} = \varprojlim \pi_k \circ X^{\mathrm{n}}|_{\mathfrak{U}_k}$. Poiché X è una derivazione ed è compatibile, ciascun $\pi_k \circ X|_{\mathfrak{U}_k}$ è una derivazione e, per il Lemma 1.4.9, lo sono anche $\pi_k \circ X^{\mathrm{s}}|_{\mathfrak{U}_k}$ e $\pi_k \circ X^{\mathrm{n}}|_{\mathfrak{U}_k}$ e, grazie alla compatibilità, ne segue che X^{s} e X^{n} sono derivazioni. □

Definizione 1.6.17. Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è detta *filtrata semi-semplice* se ha dimensione infinita ed è limite proiettivo di una catena crescente di sue sottoalgebre di Lie semi-semplici

$$\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{g}_{k+1} \subset \cdots,$$

detta *filtrazione semi-semplice su* $\mathfrak{g}$, dove ogni $\mathfrak{g}_k$ è un'algebra di Lie semi-semplice di dimensione finita e, per ogni $k \geq 1$, vale $\dim(\mathfrak{g}_k) < \dim(\mathfrak{g}_{k+1})$.

Sia dunque $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie filtrata semi-semplice con filtrazione $\{\mathfrak{g}_k\}$. Si ha $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = \varprojlim \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_k)$, da cui segue, grazie alle proprietà del limite proiettivo, che la rappresentazione aggiunta $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ è biunivoca.

Definizione 1.6.18. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie filtrata semi-semplice. Diremo che la rappresentazione aggiunta *è compatibile con la filtrazione* $\{\mathfrak{g}_k\}$ se per ogni elemento X di $\mathfrak{g}$ si ha

$$\pi_k \circ \mathrm{ad}(X)|_{g_k} = \mathrm{ad}_{g_k}(\pi_k(X)),$$

dove π_k è l'applicazione canonica di $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{g}_k$.

Proposizione 1.6.19. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie filtrata semi-semplice tale che l'aggiunta sia compatibile con la filtrazione. Allora ogni derivazione di $\mathfrak{g}$ compatibile con la filtrazione è interna.*

Dimostrazione. Sia D una derivazione di $\mathfrak{g}$ compatibile con la filtrazione $\{\mathfrak{g}_k\}$. Allora D coincide con $\varprojlim(\pi_k \circ D|_{\mathfrak{g}_k})$. Per il Teorema 1.5.15, posto $D_k = \pi_k \circ D|_{\mathfrak{g}_k}$, per ogni k esiste un elemento X_k di $\mathfrak{g}_k$ che verifica $D_k = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_k}(X_k)$. Grazie alla compatibilità di D si ha che $\{X_k\}$ è una famiglia subordinata alla filtrazione, quindi

$$D = \varprojlim D_k = \varprojlim \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_k}(X_k),$$

e grazie a (1.6.6), si ha $D = \mathrm{ad}(\varprojlim X_k)$. □

In particolare, data un'algebra di Lie filtrata semi-semplice $\mathfrak{g}$, poiché tutte le derivazioni compatibili di $\mathfrak{g}$ sono interne, possiamo associare ad ogni suo elemento X gli elementi X^{s} e X^{n} tali che

$$\mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}(X^{\mathrm{s}}) + \mathrm{ad}(X^{\mathrm{n}})$$

sia la decomposizione di Jordan-Chevalley della derivazione $\mathrm{ad}(X)$ di $\mathfrak{g}$, dato che $\mathrm{ad}(X)$ è compatibile con la filtrazione indotta su $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Possiamo dunque usare la seguente definizione.

Definizione 1.6.20. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie filtrata semi-semplice tale che l'aggiunta sia compatibile con la filtrazione. Un elemento X di $\mathfrak{g}$ è detto *semi-semplice* [risp. *nilpotente*] se $\mathrm{ad}(X)$ è semi-semplice [risp. nilpotente].

Se dunque $\mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}(X^{\mathrm{s}}) + \mathrm{ad}(X^{\mathrm{n}})$ è la decomposizione di Jordan-Chevalley di $\mathrm{ad}(X)$, dove X appartiene a $\mathfrak{g}$, chiameremo X^{s} e X^{n}, rispettivamente, la *parte semi-semplice* e la *parte nilpotente* di X in $\mathfrak{g}$.

Proposizione 1.6.21. *Sia V uno spazio vettoriale complesso filtrato tale che l'aggiunta $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}$ sia compatibile con la filtrazione, e sia $\mathfrak{g}$ una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(V)$*

filtrata (rispetto alla filtrazione indotta) semi-semplice. Allora $\mathfrak{g}$ contiene le componenti semi-semplice e nilpotente di ogni suo elemento. In particolare, se X è un elemento di $\mathfrak{g}$ allora $X = X^{\mathrm{s}} + X^{\mathrm{n}}$ è la sua decomposizione di Jordan-Chevalley se e solo se $\mathrm{ad}(X^{\mathrm{s}})$ e $\mathrm{ad}(X^{\mathrm{n}})$ sono le componenti semi-semplice e nilpotente nella decomposizione di Jordan-Chevalley di $\mathrm{ad}(X)$.

Dimostrazione. Sia X appartenente a $\mathfrak{g}$. Allora, siccome $\mathfrak{g} = \varprojlim \mathfrak{g}_k$, si ha $X = \varprojlim X_k$, dove con X_k indichiamo $\pi_k \circ X|_{\mathfrak{g}_k}$. Inoltre abbiamo visto che si ha $X^{\mathrm{s}} = \varprojlim X_k^{\mathrm{s}}$ e $X^{\mathrm{n}} = \varprojlim X_k^{\mathrm{n}}$. Allora X^{s} e X^{n} appartengono a $\mathfrak{g}$ perché, grazie al Teorema 1.5.17, X_k^{s} e X_k^{n} appartengono a $\mathfrak{g}_k$ per ogni $k \geq 1$, e si ha, per ipotesi, $\mathfrak{g} = \varprojlim \mathfrak{g}_k$.

La seconda affermazione segue dalla prima e dall'unicità della decomposizione di Jordan. □

Definizione 1.6.22. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie filtrata semi-semplice. Una rappresentazione lineare di $\mathfrak{g}$ su uno spazio vettoriale complesso V di dimensione infinita è detta *compatibile con la filtrazione* se V è limite proiettivo di una filtrazione $\{V_k, \pi_{kl}\}$ tale che, per ogni $k \geq 1$, esista una rappresentazione lineare ρ_k di $\mathfrak{g}_k$ su V_k e si abbia

$$\rho = \varprojlim \rho_k,$$

e, per ogni X in $\mathfrak{g}$ e ogni $k \geq 1$, valga

$$\rho_k(X) = \rho_k\left(\pi_k(X)|_{\mathfrak{g}_k}\right).$$

Proposizione 1.6.23. *Sia g un'algebra di Lie semi-semplice filtrata e sia ρ una rappresentazione lineare, compatibile con la filtrazione, di $\mathfrak{g}$ su uno spazio vettoriale complesso V di dimensione infinita tale che l'aggiunta sia compatibile con la filtrazione. Allora $\rho(X) = \rho(X^{\mathrm{s}}) + \rho(X^{\mathrm{n}})$ è, per ogni elemento X di $\mathfrak{g}$, la decomposizione di Jordan-Chevalley dell'endomorfismo $\rho(X)$ di V.*

Dimostrazione. Sia $X = \varprojlim X_k$ un elemento di $\mathfrak{g}$, dove $X_k = \pi_k(X)|_{\mathfrak{g}_k}$. Allora, dalle ipotesi, segue immediatamente $\rho(X) = \varprojlim \rho_k(X_k)$. Infatti si ha

$$\begin{aligned}
\rho(X) &= \rho(\varprojlim X_k) \\
&= \varprojlim \rho_k\big(\pi_k(\varprojlim X_k)|_{\mathfrak{g}_k}\big) \\
&= \varprojlim \rho_k\big(\pi_k(X)|_{\mathfrak{g}_k}\big).
\end{aligned}$$

Inoltre, per il Teorema 1.5.18, se $X_k = X_k^{\mathrm{s}} + X_k^{\mathrm{n}}$ è la decomposizione di Jordan-Chevalley di X_k, allora $\rho_k(X_k) = \rho_k(X_k^{\mathrm{s}}) + \rho_k(X_k^{\mathrm{n}})$ è la decomposizione di $\rho_k(X_k)$ per ogni $k \geq 1$. Allora si ha

$$\begin{aligned}
\rho(X) &= \varprojlim \rho_k(X_k) \\
&= \varprojlim(\rho_k(X_k)^{\mathrm{s}} + \rho_k(X_k)^{\mathrm{n}}) \\
&= \varprojlim(\rho_k(X_k^{\mathrm{s}}) + \rho_k(X_k^{\mathrm{n}})) \\
&= \varprojlim(\rho_k(X_k^{\mathrm{s}})) + \varprojlim(\rho_k(X_k^{\mathrm{n}})) \\
&= \rho(\varprojlim X_k^{\mathrm{s}}) + \rho(\varprojlim X_k^{\mathrm{n}}) \\
&= \rho(X^{\mathrm{s}}) + \rho(X^{\mathrm{n}}).
\end{aligned}$$

Con un calcolo analogo, poiché $\mathrm{ad}_{V_k}(\rho_k(X_k^{\mathrm{s}}))$ e $\mathrm{ad}_{V_k}(\rho_k(X_k^{\mathrm{n}}))$ sono le componenti semi-semplice e nilpotente di $\mathrm{ad}_{V_k}(\rho_k(X_k))$ per ogni $k \geq 1$, otteniamo che $\mathrm{ad}(\rho(X^{\mathrm{s}}))$ e $\mathrm{ad}(\rho(X^{\mathrm{n}}))$ sono le componenti semi-semplice e nilpotente di $\mathrm{ad}(\rho(X))$ e la tesi segue dunque dalla Proposizione 1.6.21. □

1.7 Teorema di linearizzazione di Bochner

Definizione 1.7.1. Sia M una varietà complessa e sia p un suo punto. Un'*azione locale olomorfa di un gruppo di Lie G su (M, p)* è un'applicazione olomorfa $\Theta\colon G \times U \to U$, dove U è un intorno aperto di p, che verifica le seguenti proprietà:

(i) per ogni g appertenente a G si ha che $\Theta(g, \cdot)$ è una funzione olomorfa invertibile in un intorno U_g di p e $\Theta(g, p) = p$;

(ii) indicato con e l'elemento neutro di G, si ha che $\Theta(e, \cdot)$ coincide con l'identità;

(iii) per ogni coppia g, h di elementi di G le applicazioni $\Theta(gh, \cdot)$ e $\Theta(g, \Theta(h, \cdot))$ coincidono dove sono entrambe definite.

Il risultato seguente mostra che ogni azione locale olomorfa Θ di un gruppo di Lie compatto su (M, p) è olomorficamente coniugata al suo differenziale in p tramite un cambiamento di coordinate olomorfo tangente all'identità.

Teorema 1.7.2. (Bochner 1945) *Sia Θ un'azione locale olomorfa di un gruppo di Lie compatto G su (M, p), dove M è una varietà olomorfa e p è un punto di M. Allora l'azione è olomorficamente linearizzabile attraverso un cambio di coordinate tangente all'identità.*

Dimostrazione. A meno di passare ad una parametrizzazione locale centrata in p, possiamo supporre che M coincida con $\mathbb{C}^n$ e p coincida con l'origine. Vogliamo dimostrare che Θ è olomorficamente coniugata al suo differenziale $\mathrm{d}\Theta$. Consideriamo dunque la trasformazione

$$R = \int_G \mathrm{d}\Theta(\alpha^{-1})\Theta(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha,$$

dove con $\mathrm{d}\alpha$ indichiamo la misura di Haar su G. La trasformazione R è definita in un intorno U_0 dell'origine edè olomorfa per costruzione; inoltre, è tangente all'identità, quindi esiste un'inversa R^{-1} in un intorno dell'origine.

Sia ora γ un fissato elemento di G, si ha

$$\mathrm{d}\Theta(\gamma)R = \mathrm{d}\Theta(\gamma)\int \mathrm{d}\Theta(\alpha^{-1})\Theta(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \int \mathrm{d}\Theta(\gamma\alpha^{-1})\Theta(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

Quindi se poniamo $\gamma\alpha^{-1} = \beta^{-1}$, cioè $\alpha = \beta\gamma$, l'ultimo integrale diventa

$$\int \mathrm{d}\Theta(\beta^{-1})\Theta(\beta\gamma)\,\mathrm{d}\beta = \int \mathrm{d}\Theta(\beta^{-1})\Theta(\beta)\,\mathrm{d}\beta \cdot \Theta(\gamma) = R\Theta(\gamma),$$

in quanto la misura di Haar è invariante per traslazioni.

Abbiamo dunque mostrato l'uguaglianza $\mathrm{d}\Theta(\gamma)R = R\Theta(\gamma)$, o meglio

$$\mathrm{d}\Theta(\gamma) = R\Theta(\gamma)R^{-1},$$

e questo, per l'arbitrarietà di γ, conclude la dimostrazione. □

Osservazione 1.7.3. Il Teorema di Bochner 1.7.2 è valido, con la stessa dimostrazione, anche per azioni locali di classe C^k con $1 \leq k \leq \infty$ e per azioni locali analitiche reali (si veda [Boc], oppure, per una trattazione più esustiva delle trasformazioni di gruppi compatti, si veda [Bre] pp. 296–309).

Capitolo 2
Normalizzazione formale

2.1 Decomposizione di campi vettoriali formali

Sia $\mathcal{O}_n$ l'anello dei germi in 0 di funzioni olomorfe in n variabili complesse e sia $\widehat{\mathcal{O}}_n$ l'anello delle serie formali in n variabili; indichiamo con $\mathfrak{m}_n$ l'ideale massimale di $\mathcal{O}_n$, ossia l'insieme dei germi che si annullano nell'origine di $\mathbb{C}^n$, e sia $\widehat{\mathfrak{m}}_n$ l'ideale massimale di $\widehat{\mathcal{O}}_n$.

Siccome lo spazio tangente a $\mathbb{C}^n$ in ogni suo punto si può identificare con $\mathbb{C}^n$ stesso tramite la base canonica $\partial_1, \ldots, \partial_n$, dove $\partial_j = \frac{\partial}{\partial z^j}$, un campo vettoriale olomorfo X di $\mathbb{C}^n$ si può scrivere, localmente, nella forma

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j \partial_j, \tag{2.1.1}$$

dove X_j è una funzione olomorfa locale per ogni $j = 1, \ldots, n$. Indichiamo $\mathfrak{X}_n$ il modulo dei germi di campi vettoriali olomorfi locali con un punto singolare nell'origine.

Un'espressione della forma

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \partial_j,$$

dove X_j è una serie formale per $j = 1, \ldots, n$ è detta un campo vettoriale *formale*. Indichiamo $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ il modulo dei germi di campi vettoriali formali con un punto singolare nell'origine.

Dato un campo vettoriale formale e una serie di potenze formale $f = \sum_Q f_Q \, \mathbf{z}^Q$, si ha, (si veda [Le] pag. 85),

$$\begin{aligned} X(f)(\mathbf{z}) &= \left(\sum_{j=1}^{n} X_j \partial_j \right) \left(\sum_{Q} f_Q \mathbf{z}^Q \right) \\ &= \sum_{j,Q} X_j f_Q \partial_j \mathbf{z}^Q \\ &= \sum_{j,Q} X_j f_Q \, q_j \frac{\mathbf{z}^Q}{z^j}. \end{aligned}$$

Sviluppando anche le coordinate di X in serie di potenze $X_j = \sum_P X_{j,P}\,\mathbf{z}^P$, ne segue

$$\begin{aligned} X(f)(\mathbf{z}) &= \sum_{j,Q}\sum_{|P|\geq 0} X_{j,P}\mathbf{z}^P f_Q q_j \frac{\mathbf{z}^Q}{z^j} \\ &= \sum_{j,Q,P} X_{j,P} f_Q q_j \frac{\mathbf{z}^{Q+P}}{z^j}. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Quindi se X e f sono nulli nell'origine, ossia $|P| \geq 1$ e $|Q| \geq 1$, allora $Q + P - e_1$ ha modulo almeno 1, che implica che anche $X(f)$ si annulla nell'origine. Più in generale, se P ha modulo superiore o uguale a 1 e Q ha modulo superiore o uguale a k, allora il multi-indice $Q + P - e_1$ ha modulo superiore o uguale a k, che implica che per ogni campo vettoriale formale X, si ha

$$X\left((\widehat{\mathfrak{m}}_n)^k\right) \subseteq (\widehat{\mathfrak{m}}_n)^k.$$

Definizione 2.1.1. Lo spazio quoziente $\widehat{\mathcal{O}}_n/(\widehat{\mathfrak{m}}_n)^{k+1}$ è detto *spazio dei k-getti di elementi di $\widehat{\mathcal{O}}_n$* ed è indicato con J_n^k.

La proiezione sul quoziente

$$\pi_k\colon \widehat{\mathcal{O}}_n \to J_n^k$$

può essere vista come il troncamento di una serie ai suoi termini di grado inferiore o uguale a k. Inoltre, dato che se l è minore di k si ha $(\widehat{\mathfrak{m}}_n)^k \subset (\widehat{\mathfrak{m}}_n)^l$, possiamo proiettare i k-getti sugli l-getti; indichiamo quest'ultima proiezione con

$$\pi_{kl}\colon J_n^k \to J_n^l.$$

Possiamo associare ad ogni elemento di J_n^k l'unico polinomio di grado k che si proietta su di esso; in questo modo abbiamo un'applicazione iniettiva dallo spazio dei k-getti in $\widehat{\mathcal{O}}_n$, che possiamo indicare con

$$\iota_k\colon J_n^k \to \widehat{\mathcal{O}}_n.$$

Inoltre, dato che le operazioni di somma e prodotto si conservano al quoziente, i k-getti formano un'algebra.

Da quanto osservato finora segue infine in maniera immediata che la catena dei k-getti

$$J_n^1 \subset J_n^2 \subset \cdots \subset J_n^k \subset J_n^{k+1} \subset \cdots,$$

costituisce una filtrazione, nel senso della Definizione 1.6.7, di $\widehat{\mathcal{O}}_n$, quindi $\widehat{\mathcal{O}}_n = \varprojlim J_n^k$.

Osserviamo che poiché vale $X\left((\widehat{\mathfrak{m}}_n)^k\right) \subseteq (\widehat{\mathfrak{m}}_n)^k$, la derivazione X induce un'applicazione lineare $\pi_k \circ X|_{J_n^k}$ nello spazio quoziente J_n^k, che denotiamo con $X_{(k)}$. Possiamo inoltre vedere $X_{(k)}$ definita dal seguente diagramma

$$\begin{array}{cccc} X_{(k)}\colon & J_n^k & \longrightarrow & J_n^k \\ & \Big\downarrow \iota_k & & \Big\uparrow \pi_k \\ X\colon & \widehat{\mathcal{O}}_n & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{O}}_n \end{array}.$$

Ovviamente è commutativo, per ogni k e l interi positivi con $k \geq l$, anche il diagramma seguente

$$\begin{array}{cccc} X_{(l)}\colon & J_n^l & \longrightarrow & J_n^l \\ & \Big\downarrow \iota_{lk} & & \Big\uparrow \pi_{lk} \\ X_{(k)}\colon & J_n^k & \longrightarrow & J_n^k \\ & \Big\downarrow \iota_k & & \Big\uparrow \pi_k \\ X\colon & \widehat{\mathcal{O}}_n & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{O}}_n \end{array} . \tag{2.1.3}$$

Da quanto osservato segue quindi che X *coincide con il limite proiettivo degli* $X_{(k)}$.

L'insieme dei k-getti è uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita. Prendiamo come base di J_n^k i monomi della forma $\mathbf{z}^Q$ con $|Q| \leq k$. Allora, grazie a (2.1.2), si ha

$$\begin{aligned} X_{(k)}(\mathbf{z}^Q) &= \pi_k\left(X(\mathbf{z}^Q)\right) \\ &= \pi_k\left(\sum_{j,P} X_{j,P}\, q_j \mathbf{z}^{Q+P-e_j}\right) \\ &= \sum_{\substack{j,P \\ |Q+P-e_j|\leq k}} X_{j,P}\, q_j \mathbf{z}^{Q+P-e_j} \\ &= \sum_{Q'} f_{Q'} \mathbf{z}^{Q'}, \end{aligned}$$

dove $Q' = Q + P - e_j$ e $f_{Q'} = \sum_{j,P} X_{j,P}\, q_j$. Se ora $Y = \sum_l Y_l \partial_l = \sum_{l,R} Y_{l,R} \mathbf{z}^R \partial_l$ è un altro campo vettoriale formale singolare nell'origine, si ha

$$\begin{aligned} Y_{(k)}(X_{(k)}(\mathbf{z}^Q)) &= \sum_{\substack{l,R \\ |Q'+R-e_l|\leq k}} Y_{l,R} f_{Q'}\, q'_l\, \mathbf{z}^{Q'+R-e_l} \\ &= \sum_{\substack{l,j,P,R,|Q+P-e_j|\leq k, \\ |Q+P+R-e_j-e_l|\leq k}} Y_{l,R} X_{j,P}\, q_j (Q+P-e_j)_l\, \mathbf{z}^{Q+P+R-e_j-e_l}. \end{aligned}$$

Dato che, per X appartenente a $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ e f in $\widehat{\mathfrak{m}}_n$, $X(f)$ è nullo nell'origine, ha senso calcolare $Y(X(f))$ e, sui monomi della base di J_n^k si ha quindi

$$Y(X(\mathbf{z}^Q)) = \sum_{l,j,P,R} Y_{l,R} X_{j,P}\, q_j\, (Q+P-e_j)_l\, \mathbf{z}^{Q+P+R-e_j-e_l}.$$

Anche se $Y(X)$ non è un campo vettoriale, siccome è un'applicazione lineare, possiamo calcolare il troncamento $Y(X)_{(k)}$, e sugli elementi della base di J_n^k si ha

$$Y(X)_{(k)}(\mathbf{z}^Q) = \sum_{\substack{l,j,P,R \\ |Q+P+R-e_j-e_l|\leq k}} Y_{l,R} X_{j,P}\, q_j\, (Q+P-e_j)_l\, \mathbf{z}^{Q+P+R-e_j-e_l}.$$

Quest'ultima uguaglianza implica che $Y_{(k)} \circ X_{(k)}$ coincide con $Y(X)_{(k)}$, in quanto se vale $|Q+P+R-e_j-e_l| \le k$, allora si ha anche $|Q+P-e_j| \le k$ perché $|R|$ è superiore o uguale a 1. Indicando quindi con il simbolo $[\cdot,\cdot]$ sia la parentesi di Lie per campi vettoriali che il commutatore, rispetto all'operazione di composizione, per applicazioni lineari nello spazio dei k-getti, si ha

$$[Y_{(k)}, X_{(k)}] = [Y, X]_{(k)}. \tag{2.1.4}$$

Definizione 2.1.2. Sia $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ il modulo dei campi vettoriali formali locali singolari nell'origine di $\mathbb{C}^n$. Lo spazio vettoriale complesso $\pi_k(\widehat{\mathfrak{X}}_n)$ è detto *spazio dei k-getti di di campi vettoriali locali singolari in* 0, e sarà indicato con $\mathfrak{X}_n^k$.

Osservazione 2.1.3. Il modulo $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ dei campi vettoriali formali locali singolari nell'origine di $\mathbb{C}^n$ è un'algebra di Lie, di dimensione infinita, rispetto alla parentesi di Lie. Inoltre, per ogni $k \ge 1$, anche lo spazio vettoriale $\mathfrak{X}_n^k$ è una sottoalgebra di Lie con la parentesi di Lie $[\cdot,\cdot]_{(k)}$ che ad ogni coppia X, Y di elementi di $\mathfrak{X}_n^k$ associa $\pi_k([X,Y])$.

Osservazione 2.1.4. Il centro dell'algebra di Lie $\mathfrak{X}_n^k$ è nullo per ogni $n \ge 1$ e per ogni $k \ge 2$. Infatti, se X è un elemento di $\mathfrak{X}_n^k$, allora, localmente, si scrive nella forma

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j \partial_j$$

dove ogni X_j appartiene a J_n^k. Siccome X appartiene al centro di $\mathfrak{X}_n^k$, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= [X, z^h \partial_h] \\ &= -\sum_{j=1}^{n} z^h \partial_h(X_j)\partial_j + X_h \partial_h, \end{aligned}$$

per ogni $h = 1, \ldots, n$, da cui segue che, per ogni $j = 1, \ldots, n$, X_j dipende solo da z^j ed è lineare, in quanto dev'essere $X_j(z^j) = z^j \partial_j(X_j(z^j))$. Quindi X è lineare diagonale, ossia della forma $\sum_{j=1}^{n} \lambda^j z^j \partial_j$, ma, poiché deve commutare anche con qualsiasi campo vettoriale monomiale di $\mathfrak{X}_n^k$ della forma $\mathbf{z}^Q \partial_h$, dev'essere $\langle \lambda, Q \rangle - \lambda^h = 0$ per ogni multi-indice Q con $|Q| \le k$, da cui segue che ogni λ^j è nullo, ossia X è il campo vettoriale nullo.

Abbiamo inoltre dimostrato il risultato seguente.

Lemma 2.1.5. *La proiezione $\pi_k\colon \widehat{\mathfrak{X}}_n \to \mathfrak{X}_n^k$ che associa ad un campo vettoriale X l'applicazione lineare indotta $X_{(k)}$ su J_n^k è un omomorfismo di algebre di Lie.*

Ne segue, grazie al diagramma (2.1.3), che *anche la proiezione $\pi_{kl}\colon \mathfrak{X}_n^k \to \mathfrak{X}_n^l$ che associa all'applicazione lineare $X_{(k)}$ l'applicazione $X_{(l)}$ è un omomorfismo di algebre di Lie.*

Osservazione 2.1.6. È noto che, per ogni $k \ge 1$ e per ogni $n \ge 1$, l'algebra di Lie $\mathfrak{X}_n^k$ è ridotta. Ad esempio $\mathfrak{X}_n^1$ è naturalmente isomorfa all'algebra di Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, che è ridotta per la Proposizione 1.5.9.

Osservazione 2.1.7. Notiamo che la catena dei k-getti di campi vettoriali $\{\mathfrak{X}_n^k\}$ è una filtrazione su $\widehat{\mathfrak{X}}_n$, il cui limite proiettivo è $\widehat{\mathfrak{X}}_n$. Inoltre, da (2.1.4) segue che la rappresentazione aggiunta di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ rispetta la filtrazione $\{\mathfrak{X}_n^k\}$.

Grazie alla teoria svolta nel paragrafo 1.6, diremo che un campo vettoriale X di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ è *semi-semplice* [risp. *nilpotente*] se, per ogni $k \geq 1$, il campo $X_{(k)}$ è un semi-semplice [risp. nilpotente] come derivazione di J_n^k. Per il Teorema 1.6.13, ogni campo vettoriale X di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ ammette dunque un'unica decomposizione di Jordan-Chevalley, in quanto abbiamo visto nel paragrafo precedente che ogni elemento di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ è compatibile con la filtrazione di $\widehat{\mathcal{O}}_n$.

Inoltre, se indichiamo con $\mathcal{L}_X$ l'applicazione aggiunta di X, grazie alla Proposizione 1.6.21, la decomposizione di Jordan di $\mathcal{L}_X$ coincide con $\mathcal{L}_{X^{\mathrm{s}}} + \mathcal{L}_{X^{\mathrm{n}}}$.

2.2 Forma normale di Poincaré-Dulac

Sia X un campo vettoriale (formale o olomorfo) con un punto singolare nell'origine. Sia Λ la parte lineare del campo vettoriale X nell'origine e sia S il campo vettoriale lineare diagonale dato dagli autovalori complessi (non necessariamente distinti) $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ di Λ, ossia

$$S = \sum_{j=1}^n \lambda^j z^j \partial_j.$$

Studiamo l'azione aggiunta di S su $\widehat{\mathfrak{X}}_n$, ossia l'operatore di Lie $\mathcal{L}_S(X) = [S, X]$.

Scriviamo X nella forma seguente

$$X = \sum_{j=1}^n \tilde{X}_j z^j \partial_j,$$

dove $\tilde{X}_j = (z^j)^{-1} X_j$ potrebbero essere meromorfe ($X_j \in \widehat{\mathfrak{m}}_n$). Si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(X) &= [S, X] \\
&= SX - XS \\
&= \left(\sum_{j=1}^n \lambda^j z^j \partial_j\right)\left(\sum_{l=1}^n \tilde{X}_l z^l \partial_l\right) - \left(\sum_{l=1}^n \tilde{X}_l z^l \partial_l\right)\left(\sum_{j=1}^n \lambda^j z^j \partial_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda^j z^j \left(\sum_{l=1}^n \partial_j(\tilde{X}_l z^l \partial_l)\right) - \sum_{l=1}^n \tilde{X}_l z^l \left(\sum_{j=1}^n \lambda^j \partial_l(z^j \partial_j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda^j z^j \sum_{l=1}^n (\partial_j(\tilde{X}_l) z^l \partial_l + \tilde{X}_l \delta_j^l \partial_l + \tilde{X}_l z^l \partial_j \partial_l) - \sum_{l=1}^n \tilde{X}_l z^l \sum_{j=1}^n \lambda^j (\delta_j^l \partial_j + z^j \partial_l \partial_j) \\
&= \sum_{l=1}^n S(\tilde{X}_l) z^l \partial_l.
\end{aligned}$$

Ne segue che se vale $S(\tilde{X}_j) = \alpha\tilde{X}_j$ per $j = 1, \ldots, n$, allora X è un autovettore per l'operatore $\mathcal{L}_S$ con autovalore α.

Sia $\mathcal{R}$ l'insieme dei multi-indici Q a coordinate intere tutte superiori o uguali a -1, con al più una coordinata coincidente con -1, e tali che $|Q| = \sum_{j=1}^{n} q_j \geq 0$; quindi

$$\mathcal{R} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{R}_j,$$

dove $\mathcal{R}_j = \{Q \in \mathbb{Z}^n : q_j \geq -1,\, q_k \geq 0 \,\mathrm{per}\, k \neq j,\, |Q| \geq 0\}$.

Vogliamo trovare lo *spettro* dell'operatore $\mathcal{L}_S$, ossia l'insieme dei numeri complessi α tali che $\mathcal{L}_S - \alpha\,\mathrm{Id}$ non è invertibile. Anzitutto troveremo lo *spettro puntuale* di $\mathcal{L}_S$, ossia l'insieme dei suoi autovalori e poi mostreremo che lo spettro coincide con lo spettro puntuale.

Lemma 2.2.1. *Sia S un campo vettoriale lineare diagonale di $\mathfrak{X}_n$ di autovalori complessi (non necessariamente distinti) $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$. Allora lo spettro puntuale dell'operatore di Lie $\mathcal{L}_S$ in $\hat{\mathfrak{X}}_n$ contiene i numeri complessi $\alpha_Q = \langle\lambda, Q\rangle$, dove Q appartiene a $\mathcal{R}$ e λ è il vettore $(\lambda^1, \ldots, \lambda^n)$.*

Dimostrazione. Sia j appartenente a $\{1, \ldots, n\}$, sia Q appartenente a $\mathcal{R}_j$ e consideriamo il monomio $\mathbf{z}^Q = (z^1)^{q_1} \cdots (z^n)^{q_n}$. Si ha

$$S(\mathbf{z}^Q) = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda^j q_j\right) \mathbf{z}^Q = \langle\lambda, Q\rangle \mathbf{z}^Q,$$

da cui risulta

$$\mathcal{L}_S(\mathbf{z}^Q z^j \partial_j) = [S, \mathbf{z}^Q z^j \partial_j] = \langle\lambda, Q\rangle \mathbf{z}^Q z^j \partial_j,$$

ossia $\mathbf{z}^Q z^j \partial_j$ è un autovettore di $\mathcal{L}_S$ di autovalore $\langle\lambda, Q\rangle$. □

Indichiamo con $\mathcal{S}$ l'insieme degli $\alpha_Q = \langle\lambda, Q\rangle$ con Q in $\mathcal{R}$. Indichiamo con $\mathcal{S}_k$ l'insieme $\{\alpha_Q \in \mathcal{S} : |Q| = \sum_{j=1}^{n} q_j < k\}$. Ovviamente $\mathcal{S}$ coincide con l'unione $\bigcup_{k \geq 0} \mathcal{S}_k$. Ad ogni $\alpha = \langle\lambda, Q\rangle$ appartenente a $\mathcal{S}_k$ corrisponde un autospazio E_α^k contenuto in $\mathfrak{X}_n^k$, che ha come base l'insieme dei campi vettoriali monomiali $\mathbf{z}^Q z^j \partial_j$. A nalogamente, ad ogni elemento α di $\mathcal{S}$, corrisponde un autospazio E_α contenuto in $\widehat{\mathfrak{X}}_n$.

Lemma 2.2.2. *Sia S un campo vettoriale lineare diagonale di $\mathfrak{X}_n$ di autovalori complessi (non necessariamente distinti) $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$. Allora $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ coincide con*

$$\varprojlim \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{S}_k} E_\alpha^k,$$

dove $\mathcal{S}_k = \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha = \langle\lambda, Q\rangle,\, Q \in \mathcal{R},\, |Q| < k\}$ e E_α^k è l'autospazio relativo all'autovalore α appartenente a $\mathcal{S}_k$.

Dimostrazione. Dalla dimostrazione precedente segue che ogni autospazio E^k_α ha come base naturale l'insieme di campi vettoriali monomiali $\mathbf{z}^Q z^j \partial_j$, dove $\alpha = \langle \lambda, Q \rangle$ e Q, con $|Q| < k$, appartiene all'insieme $\mathcal{R}_j$. Dato che i campi monomiali $\mathbf{z}^Q z^j \partial_j$ al variare di $j = 1, \dots, n$ e di Q in $\mathcal{R}_j$ con $|Q| < k$ non sono altro che i campi $\mathbf{z}^P \partial_j$ con $j = 1, \dots, n$ e P appartenente a $\mathbb{N}^n$, con $|P| \leq k$, essi formano una base di $\mathfrak{X}^k_n$, da cui segue

$$\mathfrak{X}^k_n = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{S}_k} E^k_\alpha.$$

Dal fatto che $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ è il limite proiettivo dei k-getti di campi vettoriali singolari nell'origine, segue dunque la tesi. $\square$

Proposizione 2.2.3. *Sia S un elemento di $\mathfrak{X}_n$ lineare diagonale e avente autovalori complessi (non necessariamente distinti) $\lambda^1, \dots, \lambda^n$. Allora $\mathcal{S}$ è lo spettro puntuale dell'operatore di Lie $\mathcal{L}_S$.*

Dimostrazione. Grazie al Lemma 2.2.1 e al Lemma 2.2.2, ogni autofunzione con autovalore α, ossia appartenente a E_α, è limite proiettivo di combinazioni lineari finite di campi vettoriali monomiali $\mathbf{z}^Q z^j \partial_j$ con $\alpha = \langle \lambda, Q \rangle$, e questo conclude la dimostrazione. $\square$

Nel seguito, dato un campo vettoriale S lineare semi-semplice di $\mathfrak{X}_n$, lo spettro puntuale $\mathcal{S}$ dell'operatore di Lie $\mathcal{L}_S$ sarà quindi detto semplicemente lo *spettro* di $\mathcal{L}_S$.

Dati X_α in E_α e X_β in β, con α e β appartenenti a $\mathcal{S}$, grazie all'identità di Jacobi si ha

$$\begin{aligned}\big[S, [X_\alpha, X_\beta]\big] &= -\big[X_\alpha, [X_\beta, S]\big] - \big[X_\beta, [S, X_\alpha]\big] \\ &= \beta[X_\alpha, X_\beta] - \alpha[X_\beta, X_\alpha] \\ &= (\alpha + \beta)[X_\alpha, X_\beta].\end{aligned}$$

Quindi per ogni coppia α, β di elementi di $\mathcal{S}$ si ha

$$[E_\alpha, E_\beta] \subseteq E_{\alpha+\beta}.$$

Lo spazio E_0, ossia lo spazio dei campi vettoriali che commutano con S, ha un'importanza particolare in quanto le forme normali con parte semi-semplice S hanno, come vedremo in seguito, parte nilpotente in E_0.

I generatori di E_0 si dividono in due tipi:

(i) I campi della forma $\mathbf{z}^Q z^j \partial_j$, con $\langle \lambda, Q \rangle = 0$ dove i q_k sono tutti non negativi; un tale multi-indice Q è detto una *risonanza di Siegel* e dà luogo all'esistenza di *integrali primi* per S. Infatti, la funzione che ad ogni $\mathbf{z}$ associa $\mathbf{z}^Q$, che è definita anche nell'origine poiché $q_j \geq 0$, è costante lungo le orbite di S, in quanto

$$S(\mathbf{z}^Q) = \langle \lambda, Q \rangle \, \mathbf{z}^Q = 0.$$

Possiamo dunque affermare che ogni orbita di S giace in una foglia della foliazione, singolare nell'origine,

$$\{\mathbf{z}^Q = c\}_{c \in \mathbb{C}},$$

ossia le soluzioni dell'equazione differenziale $\dot{\mathbf{z}}(t) = S(\mathbf{z}(t))$ sono contenute nelle superfici di livello di $\mathbf{z}^Q$. Notiamo che l'origine appartiene solamente alla foglia $\{\mathbf{z}^Q = 0\}$, ossia all'unione degli assi coordinati $\{z^k = 0\}$ tali che q_k è non nullo.

(ii) I campi $\mathbf{z}^Q z^j \partial_j$ con $\langle \lambda, Q\rangle = 0$ dove $q_j = -1$ e le rimanenti componenti di Q sono non negative. Questi tipi di risonanza, dette *risonanze di Dulac*, danno luogo all'esistenza di *varietà integrali* di S regolari nell'origine. Infatti, supponendo, per semplicità di notazioni, di avere $j = 1$, come nel caso precedente S è tangente alle superfici di livello della funzione $\mathbf{z}^Q$, che ora non è più definita dell'origine. Possiamo tuttavia isolare la variabile z^1 in modo che $Q+e_j$ abbia coordinate non negative, quindi

$$\{\mathbf{z}^Q = c\} = \{(z^1)^{-1}\mathbf{z}^{Q+e_1} = c\};$$

ne segue che la foliazione

$$\left\{ z^1 = \frac{\mathbf{z}^{Q+e_1}}{c} \right\}_{c\in\mathbb{C}}$$

è un insieme di varietà integrali per S definite anche in 0, che appartiene a tutte le varietà.

Definizione 2.2.4. Sia X un campo vettoriale in $\hat{\mathfrak{X}}_n$ e sia λ la n-upla formata dagli autovalori complessi $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ (ripetuti secondo le rispettive molteplicità) della parte lineare di X nell'origine. L'insieme degli autovalori è detto *risonante* se esiste una n-upla di numeri interi $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ superiori o uguali a 0 tranne al più uno che può coincidere con -1, che verifichino $\sum_{j=1}^n q_j \geq 1$ e tali che

$$\langle Q, \lambda\rangle = \sum_{j=1}^n q_j \lambda^j = 0.$$

Tale relazione è detta *risonanza*. Un campo vettoriale monomiale della forma

$$\mathbf{z}^Q \partial_j = (z^1)^{q_1} \cdots (z^n)^{q_n} \partial_j$$

è detto *risonante* per X se $Q' = (q_1, \ldots, q_j - 1, \ldots, q_n)$ verifica una relazione di risonanza per X, ossia

$$\sum_{k=1}^n q_k \lambda^k = \lambda^j.$$

Definizione 2.2.5. Un elemento X di $\hat{\mathfrak{X}}_n$ è detto in *forma normale di Poincaré-Dulac* se è della forma

$$X = X^{\mathrm{s}} + X^{\mathrm{n}}$$

dove X^{s} è un campo vettoriale lineare semi-semplice e $[X^{\mathrm{s}}, X^{\mathrm{n}}] = 0$, ossia X^{n} è un campo vettoriale nilpotente formato tutto da termini risonanti per X.

Osserviamo che, poiché X^{s} è lineare semi-semplice, a meno di cambiare linearmente coordinate, potremo sempre supporre che esso sia un campo vettoriale diagonale.

Il termine X^{n} non è nilpotente nel senso che una sua potenza è nulla, ma nel senso che è privo di parte semi-semplice; tuttavia, per ogni intero positivo k la restrizione $\pi_k(X^{\mathrm{n}})$ di X^{n} ai k-getti è un'applicazione lineare (una derivazione) nilpotente nel senso usuale dell'algebra lineare. Inoltre, poiché la parte lineare di X si può sempre scrivere come somma di un campo vettoriale semi-semplice e un campo vettoriale lineare nilpotente che commutano, X^{n} si può sempre scrivere come somma di un campo vettoriale lineare nilpotente X^{nil} e di un campo vettoriale X^{res} formato solo da termini risonanti di ordine superiore o uguale a 2.

Definizione 2.2.6. Un campo vettoriale formale W è detto *k-piatto* se il suo sviluppo di Taylor non contiene termini di ordine inferiore a $k+1$, ossia W appartiene a $(\widehat{\mathfrak{m}}_n)^k\widehat{\mathfrak{X}}_n$.

Definizione 2.2.7. Un elemento X di $\hat{\mathfrak{X}}_n$ è detto in *forma normale di Poincaré-Dulac fino all'ordine k*, con $k \geq 1$ se è della forma

$$X = X^{\mathrm{s}} + X^{\mathrm{n}}_k + W$$

dove X^{s} è un campo vettoriale lineare semi-semplice, W è un campo vettoriale k-piatto e $[X^{\mathrm{s}}, X^{\mathrm{n}}_k] = 0$, ossia X^{n}_k è un campo vettoriale formato solo da termini risonanti per X di ordine minore di $k+1$.

Proposizione 2.2.8. *Sia $X = S+N$ un elemento di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ in forma normale di Poincaré-Dulac e, per ogni elemento α dello spettro dell'operatore $\mathcal{L}_S$, sia E_α l'autospazio corrispondente. Allora $\mathcal{L}_X$ è invertibile ristretto a $\bigoplus_{\alpha\neq 0} E_\alpha$ e la sua inversa è*

$$\mathcal{L}_X^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l(\mathcal{L}_S^{-1})^{(l+1)} \circ (\mathcal{L}_N)^l.$$

Inoltre se ci limitiamo ai k-getti, si può prendere la somma fino a $2m-1$ dove $m = m(k)$ è tale che N^m è nullo ristretto allo spazio dei k-getti. Infine, se W è k-piatto, allora lo è anche $\mathcal{L}_X^{-1}(W)$.

Dimostrazione. Anzitutto osserviamo che si ha

$$\mathcal{L}_S(\mathbf{z}^Q z^j \partial_j) = [S, \mathbf{z}^Q z^j \partial_j] = \langle \lambda, Q\rangle \mathbf{z}^Q z^j \partial_j,$$

dove λ è il vettore di $\mathbb{C}^n$ dato dagli autovalori della parte lineare S.

Ne segue che, per $\langle \lambda, Q\rangle \neq 0$, ossia per $\mathbf{z}^Q z^j \partial_j$ non appartenente a E_0, si ha

$$\mathcal{L}_S^{-1}(\mathbf{z}^Q z^j \partial_j) = \frac{1}{\langle \lambda, Q\rangle}\mathbf{z}^Q z^j \partial_j.$$

Inoltre notiamo che vale $\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_N$ e $\mathcal{L}_S$ commuta con $\mathcal{L}_N$, quindi $\mathcal{L}_S, \mathcal{L}_S^{-1}, \mathcal{L}_N$ commutano fra loro.

Consideriamo quindi l'operatore

$$\mathcal{L} = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l(\mathcal{L}_S^{-1})^{(l+1)} \circ (\mathcal{L}_N)^l.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\mathcal{L}_X &= \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \mathcal{L}_S^{-(l+1)}\mathcal{L}_N^l(\mathcal{L}_S+\mathcal{L}_N)\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \mathcal{L}_S^{-l}\mathcal{L}_N^l + \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \mathcal{L}_S^{-(l+1)}\mathcal{L}_N^{(l+1)}\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \mathcal{L}_S^{-l}\mathcal{L}_N^l + \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1} \mathcal{L}_S^{-l}\mathcal{L}_N^l\\
&= (-1)^0\mathcal{L}_S^0\mathcal{L}_N^0\\
&= \mathrm{Id};
\end{aligned}$$

analogamente, si verifica $\mathcal{L}_X\mathcal{L} = \mathrm{Id}$. Ne segue che $\mathcal{L}$ è l'operatore inverso $\mathcal{L}_X^{-1}$ di $\mathcal{L}_X$.

Notiamo infine che se proiettiamo sui k-getti e consideriamo l'operatore

$$\mathcal{L}_{(2m-1)} = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l(\mathcal{L}_S^{-1})^{(l+1)} \circ (\mathcal{L}_N)^l,$$

dove m è tale che $\pi_k(N^m) = 0$, si ha

$$\begin{aligned}
\pi_k\left(\mathcal{L}_{(2m-1)}\mathcal{L}_X\right) &= \pi_k\left(\sum_{l=0}^{2m-1}(-1)^l\mathcal{L}_S^{-(l+1)}\mathcal{L}_N^l\mathcal{L}_X\right)\\
&= \pi_k\left(\sum_{l=0}^{2m-1}(-1)^l\mathcal{L}_S^{-l}\mathcal{L}_N^l + \sum_{l=1}^{2m}(-1)^{l+1}\mathcal{L}_S^{-l}\mathcal{L}_N^l\right)\\
&= \pi_k\left(\mathrm{Id} + (-1)^{2m+1}\mathcal{L}_S^{-2m}\mathcal{L}_N^{2m}\right);
\end{aligned}$$

ma poiché $\mathcal{L}_N^{2m-1}(X)$ è composto da monomi di tipo AXB con N^m come fattore in A oppure in B e N^m è nullo ristretto ai k-getti, si ha che anche $\mathcal{L}_N^{2m-1}$ è nullo ristretto ai k-getti. □

Proposizione 2.2.9. *Sia $X = S+N$ un elemento di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ in forma normale di Poincaré-Dulac, sia $\mathcal{S}$ lo spettro complesso dell'operatore $\mathcal{L}_S$ su $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ e siano E_α, per $\alpha \in \mathcal{S}$, gli autospazi corrispondenti. Allora per ogni fissato Y campo vettoriale formale in $\widehat{\mathfrak{X}}_n$, l'equazione*

$$Y = Y_0 + [S+N, Z]$$

è risolubile in modo unico con Y_0 in E_0 e Z appartenente a $\bigoplus_{\alpha\neq 0} E_\alpha$. Inoltre, se Y è k-piatto, lo sono anche Y_0 e Z.

Dimostrazione. La dimostrazione segue in maniera immediata dalla proposizione precedente 2.2.8. Infatti, sia Y_0 la proiezione di Y su E_0, quindi si ha $Y = Y_0 + W$, con W appartenente a $\bigoplus_{\alpha\neq 0} E_\alpha$ e allora basta prendere Z coincidente con $\mathcal{L}_X^{-1}(W)$. Inoltre, se Y è k-piatto, lo sono anche Y_0 e W, quindi lo è anche Z. □

2.3 Normalizzazione formale con il metodo di Newton

Sia X un elemento di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ e supponiamo che sia in forma normale di Poincaré-Dulac fino all'ordine $k \geq 1$, ossia

$$X = S + N_1 + R_1,$$

dove $S + N_1$ è un campo vettoriale di ordine k appartenente a $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ in forma normale di Poincaré-Dulac; quindi N_1 è un campo vettoriale polinomiale di grado k e R_1 è un campo k-piatto.

Consideriamo l'equazione

$$R_1 = N_1' + [S + N_1, U] \tag{2.3.5}$$

con incognite N_1' e U; grazie alla Proposizione 2.2.9, questa equazione è risolubile con N_1' in E_0 e U in $\bigoplus_{\alpha \neq 0} E_\alpha$, che sono inoltre entrambi k-piatti.

Nel seguito, dato un qualsiasi campo U in $\widehat{\mathfrak{X}}_n$, denoteremo con $\exp U$ il flusso al tempo 1 associato al campo vettoriale U.

Proposizione 2.3.1. *Sia $X = S + N_1 + R_1$ un campo vettoriale formale in $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ in forma normale di Poincaré-Dulac fino all'ordine $k \geq 1$ e sia $\varphi = \exp U$, con U campo vettoriale di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ che soddisfa l'equazione (2.3.5). Allora si ha*

$$\varphi_* X = S + N_1 + N_1' + R_2,$$

dove R_2 è un campo $2k$-piatto.

Dimostrazione. Dalla formula classica (si veda [DNF] pag. 197),

$$(\exp tU)_* X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{L}_U^{\circ n}(X) = X + t[U, X] + \frac{1}{2} t^2 [U, [U, X]] + \cdots$$

si evince chiaramente che il coefficiente di t è k-piatto, che quello di t^2 è $2k$-piatto e, iterando, che il coefficiente di t^p è pk-piatto.

Ne segue che $\varphi_* X \equiv X + [U, X]$ modulo campi vettoriali $2k$-piatti. Usando quindi l'equazione (2.3.5), si ha

$$\begin{aligned}
\varphi_* X &\equiv S + N_1 + R_1 + [U, S + N_1 + R_1] \\
&\equiv S + N_1 + R_1 - [S + N_1, U] \\
&\equiv S + N_1 + N_1'
\end{aligned}$$

modulo campi vettoriali $2k$-piatti. $\square$

Possiamo adesso dimostrare il risultato principale di questo capitolo.

Teorema 2.3.2. *Sia X un elemento di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$. Allora X è un campo vettoriale semi-semplice (nel senso della decomposizione di Jordan-Chevalley) se e solo esiste un cambiamento formale di coordinate in cui X è un campo vettoriale lineare semi-semplice.*

Dimostrazione. Se esiste un cambiamento formale di coordinate in cui X è un campo vettoriale lineare semi-semplice, allora, grazie all'unicità della decomposizione di Jordan, si ha che la decomposizione di X è priva di componente nilpotente.

Viceversa, sia X un campo vettoriale di $\mathfrak{X}_n$ semi-semplice. Con le notazioni della Proposizione 2.3.1, lo sviluppo di Taylor di $\varphi_* X$ all'ordine $2k$ è $S + N_1 + N_1'$ e questo campo vettoriale polinomiale di grado $2k$ rappresenta, per costruzione, una forma normale di Poincaré-Dulac di X fino all'ordine $2k$. Inoltre abbiamo una costruzione esplicita di un diffeomorfismo normalizzante $(\exp U)$ che è k-piatto rispetto all'identità, ossia tale che la differenza fra di esso e l'identità è k-piatta.

Otteniamo lo stesso risultato se risolviamo l'equazione (2.3.5) modulo campi vettoriali $2k$-piatti, ossia usando solo gli sviluppi di Taylor fino all'ordine $2k$ di N_1' e di U, ottenendo in questo modo campi vettoriali polinomiali.

Iterando questo procedimento e componendo tutti i diffeormorfismi normalizzanti, otteniamo un cambiamento di coordinate formale tale che l'ordine di approssimazione della forma normale e del diffeomorfismo normalizzante duplica ad ogni iterazione; questo metodo è detto metodo di Newton.

In questo modo abbiamo trovato un cambiamento di coordinate formale che porta il campo vettoriale X nella forma seguente

$$X_1^{\mathrm{s}} + R,$$

dove X_1^{s} è il termine lineare semi-semplice di X e R è un campo vettoriale di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ formato solo da campi vettoriali monomiali risonanti, quindi R commuta con X_1^{s}. Sia π_k la proiezione canonica di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ su $\mathfrak{X}_n^k$. Osserviamo che, per ogni $k \geq 1$ si ha

$$\pi_k(X_1^{\mathrm{s}} + R) = X_1^{\mathrm{s}} + \pi_k(R).$$

Vogliamo dimostrare, per induzione su $k \geq 1$, che $\pi_k(R)$ è nullo per ogni $k \geq 1$. Per $k = 1$, la tesi è vera grazie all'unicità della decomposizione di Jordan-Chevalley e al fatto che X_1^{s} è un campo lineare semi-semplice. Supponiamo che la tesi sia vera per k e dimostriamola per $k+1$. La proiezione di R su $\mathfrak{X}_n^{k+1}$ è dunque un campo vettoriale formato solo da campi vettoriali monomiali risonanti di grado $k+1$. Osserviamo che, se $\mathbf{z}^P \partial_j$ appartiene a $\mathfrak{X}_n^{k+1}$, con $|P| = k+1$, si ha

$$\mathbf{z}^P \partial_j(\mathbf{z}^P \partial_j) = \pi_{k+1}(p_j \mathbf{z}^{2P-e_j} \partial_j + \mathbf{z}^{2P} \partial_j^2) = 0,$$

in quanto $|2P - e_j| = 2k+1 > k+1$ e $|2P| = 2k+2 > k+1$; quindi $\mathbf{z}^P \partial_j$ è nilpotente in $\mathfrak{X}_n^{k+1}$. Inoltre, se $\mathbf{z}^P \partial_j$ e $\mathbf{z}^Q \partial_h$ sono due elementi di $\mathfrak{X}_n^{k+1}$, con $|P| = |Q| = k+1$ e con j, h appartenenti a $\{1, \ldots, n\}$ (non necessariamente distinti), allora si ha

$$[\mathbf{z}^P \partial_j, \mathbf{z}^Q \partial_h]_{(k+1)} = \pi_{k+1}(q_j \mathbf{z}^{P+Q-e_j} \partial_h - p_h \mathbf{z}^{Q+P-e_h} \partial_j) = 0,$$

in quanto $|Q + P - e_l| = 2k + 11 > k+1$ per ogni $l = 1, \ldots, n$. Per il Corollario 1.4.5, $\pi_{k+1}(R)$ è un endomorfismo nilpotente di $\mathfrak{X}_n^{k+1}$, in quanto somma finita di endomorfismi nilpotenti che commutano a due a due. Allora, grazie all'unicità della decomposizione di Jordan-Chevalley e al fatto che X_1^{s} è semi-semplice e commuta con $\pi_{k+1}(R)$, si ha $\pi_{k+1}(R) = 0$. Poiché $\pi_k(R) = 0$ per ogni $k \geq 1$ e il limite proiettivo di 0 è 0, si ha che R deve coincidere con 0, ossia il cambiamento formale di coordinate ottenuto con il metodo di Newton porta X nella sua parte lineare semi-semplice X_1^{s}. $\square$

Corollario 2.3.3. *Sia X un campo vettoriale appartenente a $\widehat{\mathfrak{X}}_n$. Allora X è un campo vettoriale nilpotente se e solo se la matrice associata alla sua parte lineare nell'origine è una matrice nilpotente.*

Dimostrazione. Sia $X = X^{\mathrm{s}} + X^{\mathrm{n}}$ la decomposizione di Jordan di X. Per il Teorema precedente, esiste un cambiamento formale di coordinate in cui X^{s} è un campo vettoriale lineare semi-semplice. Se la matrice associata alla parte lineare di X nell'origine è una matrice nilpotente allora X^{s} è formalmente coniugato al campo vettoriale nullo, quindi è nullo.

Viceversa, se X è formalmente coniugato ad un campo vettoriale nilpotente, allora la decomposizione di Jordan di X è priva di componente semi-semplice, quindi anche la decomposizione di Jordan del termine lineare di X è priva di componente semi-semplice da cui segue la tesi. □

Definizione 2.3.4. Un campo vettoriale X appartenente a $\mathfrak{X}_n$ è detto *olomorficamente semi-semplice* se è olomorficamente coniugato alla parte semi-semplice del suo termine lineare, ossia se esiste un cambiamento di coordinate olomorfo tale che, nelle nuove coordinate, X sia un campo vettoriale lineare semi-semplice di $\mathfrak{X}_n$.

Osserviamo che poiché un campo nilpotente X non è nilpotente nel senso che una sua potenza è nulla, ma nel senso che, ristretto ad ogni J_n^k è nilpotente, applicando iterativamente X^{nil} ad un qualsiasi germe, si aumenta il suo ordine di annullamento nell'origine.

Osservazione 2.3.5. *La decomposizione di Jordan-Chevalley è naturale.* Infatti, se X appartiene a $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ e φ è un diffeomorfismo formale locale di $(\mathbb{C}^n, 0)$, allora: $\varphi_*(X^{\mathrm{nil}})$ è nilpotente perché ha parte lineare nilpotente; vale

$$[\varphi_*(X^{\mathrm{s}}), \varphi_*(X^{\mathrm{nil}})] = [\mathrm{d}\varphi(X^{\mathrm{s}}), \mathrm{d}\varphi(X^{\mathrm{nil}})] = \mathrm{d}\varphi([X^{\mathrm{s}}, X^{\mathrm{nil}}]) = 0;$$

e $\varphi_*(X^{\mathrm{s}})$ è semi-semplice. (Infatti, se (v_ν) è una base di J_n^k di autovettori per $X^{\mathrm{s}}_{(k)}$, allora $(v_\nu \circ \varphi)$ è una base di J_n^k di autovettori per $\varphi_*(X^{\mathrm{s}}_{(k)})$.)

Come Corollario del Teorema 2.3.2 otteniamo infine il seguente classico Teorema sulla normalizzazione formale (per una dimostrazione classica si veda [Ar] pp. 181–182).

Teorema 2.3.6.(Poincaré-Dulac, 1904) *Sia X un germe di campo vettoriale formale appartenente a $\widehat{\mathfrak{X}}_n$. Allora esiste un cambiamento di variabili formale che porta X in forma normale di Poincaré-Dulac.*

Dimostrazione. Sia $X = S + N$ la decomposizione di Jordan-Chevalley di X. Per il Teorema 2.3.2, esiste un cambiamento formale di coordinate, ossia un diffeomorfismo formale locale di $(\mathbb{C}^n, 0)$, che porta il campo vettoriale semi-semplice S nel suo termine lineare semi-semplice X^{s}. Grazie all'Osservazione 2.3.5, tale diffeomorfismo porta X nella forma

$$X^{\mathrm{s}} + X^{\mathrm{n}},$$

che è una forma normale di Poincaré-Dulac in quanto X^{s} è lineare semi-semplice e X^{n} è un campo vettoriale nilpotente che commuta con X^{s}, ossia è formato solo da termini risonanti. □

Definizione 2.3.7. Dato un campo vettoriale X in $\widehat{\mathfrak{X}}_n$, un cambiamento di coordinate φ che porta X in forma normale di Poincaré-Dulac è detto una *normalizzazione di Poincaré-Dulac di* X; se φ è un cambiamento di coordinate olomorfo, allora è detto una normalizzazione di Poincaré-Dulac di X *convergente*.

Osservazione 2.3.8. *Sebbene la decomposizione di Jordan-Chevalley di un campo vettoriale X di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ sia unica, la forma normale di Poicaré-Dulac non è unica.* Infatti ogni normalizzazione di Poincaré-Dulac dipende solo dalla parte semi-semplice della decomposizione di Jordan-Chevalley di X, quindi normalizzazioni diverse possono portare a diverse forme normali di Poincaré-Dulac.

Il Teorema di Poincaré-Dulac 2.3.6 ci assicura che per ogni campo vettoriale di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ esiste una normalizzazione di Poincaré-Dulac *formale*. È dunque naturale chiedersi se esistono delle condizioni necessarie e/o sufficienti affinché un campo vettoriale (olomorfo) ammetta una normalizzazione di Poincaré-Dulac convergente.

Bryuno, nell'articolo [Brj], ha introdotto delle condizioni sufficienti, di tipo aritmetico, per la normalizzazione olomorfa ed è riuscito a trovare anche dei parziali viceversa (si veda [LD] pag. 38); tuttavia non ha trovato condizioni necessarie e sufficienti affinché un campo vettoriale olomorfo ammetta una normalizzazione convergente.

Torneremo sull'argomento nel capitolo 4, dove ci concentreremo su risultati recenti, ottenuti da Zung in [Zu1] e [Zu2], che forniscono condizioni necessarie e/o sufficienti di tipo geometrico per l'esistenza di una normalizzazione olomorfa.

Capitolo 3
Diseguaglianze di Łojasiewicz

3.1 Diseguaglianza di Łojasiewicz per una funzione olomorfa

Consideriamo un polinomio monico a coefficienti complessi

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

e siano $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ le radici, non necessariamente distinte, di p. In particolare avremo

$$p(z) = (z - \zeta_1) \cdots (z - \zeta_n)$$

e

$$a_j = \sigma_j(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$$

per ogni j tra 1 e n, dove σ_j è il polinomio simmetrico elementare in n variabili di grado j,

$$\sigma_j(X_1, \ldots, X_n) = (-1)^j \sum_{\nu_1 < \cdots < \nu_j} X_{\nu_1} \cdots X_{\nu_j}.$$

Osserviamo che se vale $|a_j| \leq r$ per $j = 1, \ldots, n$, allora $|\zeta_k| \leq 2r$ per $k = 1, \ldots, n$, in quanto se fosse altrimenti, allora si avrebbe

$$|\zeta^n + a_1\zeta^{n-1} + \cdots + a_n| \geq |\zeta|^n \left(1 - \frac{r}{|\zeta|} - \cdots - \left(\frac{r}{|\zeta|}\right)^n\right) > 0.$$

Di conseguenza, l'applicazione polinomiale $\sigma \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definita da

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\sigma_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, \sigma_n(z_1, \ldots, z_n))$$

è una suriezione propria, poiché, per il Teorema fondamentale dell'algebra, l'immagine inversa di ogni insieme limitato è limitata.

Sappiamo inoltre che le radici di un polinomio dipendono con continuità dai coefficienti. Quindi, dato un polinomio di Weierstraß

$$P(z_1, \ldots, z_n) = z_n^p + a_1(z_1, \ldots, z_{n-1}) z_n^{p-1} + \cdots + a_p(z_1, \ldots, z_{n-1}),$$

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $P(z_1, \ldots, z_n) = 0$ e $\|(z_1, \ldots, z_{n-1})\| < \delta$, allora $\|z_n\| < \varepsilon$.

Proposizione 3.1.1. (Łojasiewicz) *Sia f una funzione olomorfa in un intorno aperto $\mathcal{U}$ dell'origine di $\mathbb{C}^n$ e nulla nell'origine. Allora esiste un numero positivo δ_n ed esistono $n-1$ numeri positivi $\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ che dipendono da δ_n tali che il polidisco $\Delta = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < \delta_1, \ldots, |z_n| < \delta_n\}$ sia incluso in $\mathcal{U}$ ed esistono due costanti positive C e p tali che per ogni punto z di $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < \delta_1/2, \ldots, |z_n| < \delta_n/2\}$ valga la relazione*

$$|f(z)| \geq C\, d(z, Z)^p,$$

dove Z è l'insieme degli zeri di f contenuti in Δ, ossia $Z = f^{-1}(0) \cap \Delta$.

Dimostrazione. Senza ledere la generalità, possiamo supporre che f sia regolare di ordine p nella variabile z_n; quindi per il Teorema di preparazione di Weierstraß, f coincide con il prodotto di una funzione olomorfa h mai nulla in un intorno dell'origine incluso in $\mathcal{U}$ con un polinomio P di Weierstraß nella variabile z_n di grado p, ossia

$$P(z_1, \ldots, z_n) = z_n^p + a_1(z_1, \ldots, z_{n-1}) z_n^{p-1} + \cdots + a_p(z_1, \ldots, z_{n-1}),$$

dove i coefficienti $a_1, \ldots, a_p$ sono funzioni olomorfe definite in un opportuno polidisco $\Delta' = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < \delta_1, \ldots, |z_{n-1}| < \delta_{n-1}\}$ e nulle nell'origine di $\mathbb{C}^{n-1}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ positivi tali che se $P(z_1, \ldots, z_n) = 0$ e $(z_1, \ldots, z_{n-1})$ appartiene a Δ', allora $|z_n| < \varepsilon$; sia dunque $\delta_n > 0$ tale che il polidisco Δ è contenuto in $\mathcal{U}$. Se il punto $(z_1, \ldots, z_n)$ appartiene a Δ, allora si ha

$$P(z_1, \ldots, z_{n-1}, t) = (t - \zeta_1) \cdots (t - \zeta_p)$$

per t appartenente a $\mathbb{C}$, dove $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ sono le radici (non necessariamente distinte) del polinomio $P(z_1, \ldots, z_{n-1}, t)$; quindi, per come abbiamo scelto δ_n, siccome l'insieme $Z = f^{-1}(0) \cap \Delta$ coincide con $P^{-1}(0) \cap \Delta$, si ha che $z^{(\nu)} = (z_1, \ldots, z_{n-1}, \zeta_\nu)$ appartiene a Z per $\nu = 1, \ldots, p$, da cui segue

$$|z_n - \zeta_\nu| = |z - z^{(\nu)}| \geq d(z, Z)$$

per ogni ν compreso tra 1 e p e per ogni z in Δ. Possiamo infine supporre che la funzione h sia non nulla su tutto il polidisco $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < \delta_1/2, \ldots, |z_n| < \delta_n/2\}$, da cui segue l'esistenza di una costante positiva C per cui $h(z) \geq C$ per ogni z in Δ_1. Quindi si ha

$$|f(z)| = |h(z)||P(z)| \geq C\, |z_n - \zeta_1| \cdots |z_n - \zeta_p| \geq C\, d(z, Z)^p$$

per ogni z appartenente a Δ_1 e questo conclude la dimostrazione. □

Corollario 3.1.2. *Sia f una funzione olomorfa in un aperto Ω di $\mathbb{C}^n$, tale che l'insieme $Z = f^{-1}(0) \cap \Omega$ sia non vuoto e sia K un compatto incluso in Ω. Allora esistono due costanti $C > 0$ e $p > 0$ tali che*

$$|f(z)| \geq C\, d(z, Z)^p$$

per ogni z appartenente a K.

Dimostrazione. Sia $M = \sup_{z\in K} d(z,Z)$. Per la proposizione precedente, possiamo associare ad ogni punto x di K un polidisco aperto $\Delta_{1,x}$ e due costanti positive C_x e p_x tali che si abbia

$$|f(z)| \geq C_x \left(\frac{d(z,Z)}{M}\right)^{p_x}$$

per ogni punto z di $\Delta_{1,x}$. Inoltre siccome $K \subset \bigcup_{x\in K} \Delta_{1,x}$ e K è compatto, esisteranno $x_1, \ldots, x_m$ in K tali che K sia incluso nell'unione $\Delta_{1,x_1} \cup \ldots \cup \Delta_{1,x_m}$. Ponendo

$$p = \max(p_{x_1}, \ldots, p_{x_m}) \qquad \text{e} \qquad C = \frac{1}{M^p} \min(C_{x_1}, \ldots, C_{x_m})$$

otteniamo la tesi. □

3.2 Cenni sulla geometria degli insiemi analitici complessi

Nel seguito presentiamo i risultati che riguardano la geometria degli insiemi analitici complessi che saranno necessari per dimostrare la diseguaglianza di Łojasiewicz nel caso generale; per una trattazione più esaustiva riguardo agli insiemi analitici rimandiamo a [Ło].

Nel resto del capitolo useremo la seguente notazione: dato un sottoinsieme Z del prodotto cartesiano di due insiemi $M \times N$, per ogni sottoinsieme E di M, indicheremo con Z_E l'insieme $Z \cap (E \times N)$ e per ogni elemento x di M indicheremo con Z_x la proiezione sul secondo fattore di $Z_{\{x\}}$, ossia l'insieme $\{y \in N : (x,y) \in Z\}$.

Definizione 3.2.1. Sia M una varietà complessa. Un sottoinsieme X di M è detto *magro* se è chiuso, mai denso, e per ogni aperto Ω di M ogni funzione olomorfa su $\Omega \setminus X$ che sia localmente limitata su Ω si può estendere ad una funzione olomorfa su tutto Ω.

Definizione 3.2.2. Dati M una varietà complessa connessa e uno spazio vettoriale complesso X, un *quasi-rivestimento* nel prodotto cartesiano $M \times X$ è una coppia (Z,Λ) dove Z è un sottoinsieme magro di M, e Λ è una sottovarietà di $(M\setminus Z)\times X$ (localmente chiusa) tale che la proiezione naturale $\pi\colon \Lambda \to M$ sia un biolomorfismo locale e sia proprio. L'insieme $\bar{\Lambda}$ è detto l'*aderenza* del quasi-rivestimento.

Notiamo che se (Z,Λ) è un quasi-rivestimento, allora la proiezione naturale π di Λ su $M\setminus Z$ è un rivestimento finito in quanto è un omeomorfismo locale e un'applicazione propria. Inoltre, poiché Z è magro e M è connessa, anche $M\setminus Z$ è connessa (altrimenti esisterebbe una funzione localmente costante su $M \setminus Z$ che prende solo due valori, sarebbe olomorfa, limitata e non si potrebbe estendere a una funzione olomorfa su M); quindi il rivestimento ha una molteplicità che indichiamo con k e che chiameremo *molteplicità* del quasi-rivestimento. Diremo che il quasi-rivestimento ha k fogli se ha molteplicità k.

Osserviamo inoltre che se (Z,Λ) è un quasi-rivestimento in $M \times X$, allora lo è anche (Z,Λ') per ogni sottoinsieme aperto e chiuso Λ' di Λ; in particolare, questo è vero se Λ' è una componente connessa di Λ. Inoltre $(Z \cap U, \Lambda'_U)$ è un quasi-rivestimento di $U \times X$ per ogni sottoinsieme aperto e connesso U di M.

Prima di poter enunciare alcune delle proprietà principali dei quasi-rivestimenti, abbiamo bisogno di alcuni risultati e definizioni.

Definizione 3.2.3. Dati X e Y due spazi vettoriali complessi, un sottoinsieme del prodotto $X^p \times Y$ [risp. un'applicazione definita su $X^p \times Y$] si dice *simmetrico rispetto a x* se è invariante rispetto al sottogruppo del gruppo degli automorfismi lineari dello spazio vettoriale $X^p \times Y$ formato dalle applicazioni $\Pi_\alpha \colon X^p \times Y \to X^p \times Y$ della forma

$$(x_1, \ldots, x_p, y) \mapsto (x_{\alpha(1)}, \ldots, x_{\alpha(p)}, y)$$

dove α è una permutazione dell'insieme $\{1, \ldots, p\}$.

Definizione 3.2.4. Dato X uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita, un *polinomio su X* è un'applicazione polinomiale dello spazio X in $\mathbb{C}$.

Definizione 3.2.5. Dato X uno spazio vettoriale complesso, un *insieme algebrico* di X è il luogo degli zeri di un numero finito di polinomi su X, ossia un insieme della forma $\{p \in X : f_1(p) = \cdots = f_k(p) = 0\}$ con $f_1, \ldots, f_k$ polinomi su X.

Lemma 3.2.6. *Siano X e Y due spazi vettoriali complessi e sia $Z \subset X^p \times Y$ un insieme algebrico e simmetrico rispetto a $x = (x_1, \ldots, x_p)$. Allora esiste un'applicazione polinomiale $P \colon X^p \times Y \to \mathbb{C}^s$ che sia simmetrica rispetto a x e tale che Z coincida con $P^{-1}(0)$.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che se V è uno spazio vettoriale complesso, G è un sottogruppo finito del gruppo degli automorfismi lineari di V e Z è un sottoinsieme algebrico di V invariante rispetto a G, ossia $\varphi(Z) = Z$ per ogni φ appartenente a G, allora Z può essere definito da polinomi invarianti ripetto a G.

Sia quindi $G = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_l\}$ e sia $Z \subset V$ sottoinsieme algebrico G-invariante definito dai polinomi $f_1, \ldots, f_k$. Allora, posto $g_{ij} = f_i \circ \varphi_j$ e $F_{i\nu} = \sigma_\nu \circ (g_{i1}, \ldots, g_{il})$ dove $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ sono i polinomi simmetrici elementari in l variabili, si ha

$$\begin{aligned} Z &= \{g_{ij} = 0\}_{i=1,\ldots,k,\, j=1,\ldots,l} \\ &= \{F_{i\nu} = 0\}_{i=1,\ldots,k,\, \nu=1,\ldots,l}, \end{aligned}$$

in quanto, per ogni m, $\sigma_1(z_1, \ldots, z_m) = \cdots = \sigma_m(z_1, \ldots, z_m) = 0$ se e solo se si ha $z_1 = \cdots = z_m = 0$. Basta quindi verificare che i polinomi $F_{i\nu}$ sono G-invarianti. Sia φ un elemento di G; poiché l'applicazione di G in sé data da $\varphi \mapsto \varphi \circ \varphi_s$ è biiettiva, si ha $\varphi_j \circ \varphi_s = \varphi_{\beta(j)}$, dove $j = 1, \ldots, k$ e β è una permutazione di $\{i, \ldots, l\}$. Quindi si ha $g_{ij} \circ \varphi_s = g_{i\beta(j)}$ da cui segue

$$F_{i\nu} \circ \varphi_s = \sigma_\nu \circ (g_{i\beta(1)}, \ldots, g_{i\beta(l)}) = F_{i\nu}.$$

□

Definizione 3.2.7. Dato uno spazio vettoriale complesso X, un'applicazione polinomiale $P(\eta_1, \dots, \eta_p, v)$ dello spazio X^{p+1} a valori in uno spazio vettoriale è detta un *raccoglitore* se è simmetrica rispetto a $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_p)$ e verifica

$$P^{-1}(0) = \{v = \eta_1\} \cup \dots \cup \{v = \eta_p\}.$$

Ad esempio la funzione da $\mathbb{C}^{p+1}$ a $\mathbb{C}$ data da $(\eta_1, \dots, \eta_p, v) \mapsto (v - \eta_1) \cdots (v - \eta_p)$ è un raccoglitore. Per il lemma precedente, per ogni spazio vettoriale X e ogni intero positivo p esiste un raccoglitore $P\colon X^{p+1} \to \mathbb{C}^s$.

Possiamo finalmente dimostrare le proprietà dei quasi-rivestimenti che ci saranno utili nel seguito.

Lemma 3.2.8. *Siano M una varietà complessa connessa, X uno spazio vettoriale complesso e (Z, Λ) un quasi-rivestimento a p fogli in $M \times X$, con $p > 0$. Allora*

(i) la proiezione naturale $\bar{\pi}\colon \bar{\Lambda} \to M$ è aperta;

(ii) se $P\colon X^{p+1} \to \mathbb{C}^q$ è un raccoglitore, allora esiste un'unica applicazione olomorfa $F = F_P\colon M \times X \to \mathbb{C}^q$ che verifica

$$F(u, v) = P(\eta_1, \dots, \eta_p, v) \quad \textit{dove} \quad \{\eta_1, \dots, \eta_p\} = \Lambda_u$$

per (u, v) in $(M \setminus Z) \times X$;

(iii) l'aderenza $\bar{\Lambda}$ coincide con $F^{-1}(0)$, e quindi è analitica in $M \times X$.

Dimostrazione. (ii) Fissato un sistema lineare di coordinate su X, possiamo scrivere

$$P(\eta, v) = \sum_j a_j(\eta) v^j$$

dove $a_j\colon X^p \to \mathbb{C}^q$ sono applicazioni polinomiali simmetriche. Ne segue che le applicazioni $c_j^0\colon M \setminus Z \to \mathbb{C}^q$ definite da $c_j^0(u) = a_j(\eta_1, \dots, \eta_p)$ per u appartenente a $M \setminus Z$, dove $\{\eta_1, \dots, \eta_p\} = \Lambda_u$, sono ben definite, olomorfe e localmente limitate vicino a Z, quindi possiamo estenderle olomorficamente a $c_j\colon M \to \mathbb{C}^q$. L'applicazione $F(u, v) = \sum_j c_j(u) v^j$ verifica quindi la nostra tesi. L'unicità segue dal fatto che $(M \setminus Z) \times X$ è denso in $M \times X$.

(i)–(iii) Sia $\tilde{\pi}\colon F^{-1}(0) \to M$ la proiezione naturale. Allora l'insieme Λ coincide con $\tilde{\pi}^{-1}(M \setminus Z)$, per cui basta dimostrare che $\tilde{\pi}$ è aperta in quanto, dato che $M \setminus Z$ è denso e la controimmagine di un denso tramite un'applicazione aperta è un denso, $\bar{\Lambda}$ coincide con $F^{-1}(0)$, quindi $\tilde{\pi}$ coincide con $\bar{\pi}$.

Supponiamo per assurdo che $\tilde{\pi}$ non sia aperta. Allora esiste un intorno compatto $U \times V$ di un punto (u_0, v_0) di $F^{-1}(0)$ ed esiste una successione (u_ν) convergente verso u_0 tale che u_ν non appartiene a $\tilde{\pi}\big(F^{-1}(0) \cap (U \times V)\big)$per ogni ν; inoltre, poiché Z è mai denso, possiamo supporre che u_ν non appartenga a $U \setminus Z$ per ogni ν. Allora per ogni ν e per ogni v in V, si ha $P(\eta_1^\nu, \dots, \eta_p^\nu, v) = F(u_\nu, v) \neq 0$, dove η_j^ν appartiene a Λ_{u_ν} per $j = 1, \dots, p$; quindi η_j^ν non appartiene a V per ogni j. Siccome le fibre Λ_{u_ν} sono uniformemente limitate, per ogni j possiamo scegliere una sottosuccessione $\eta_j^{\alpha_j}$ convergente a η_j diverso da v_0. Passando al limite, otteniamo

$$F(u_0, v_0) = P(\eta_1, \dots, \eta_p, v_0) \neq 0,$$

che contraddice la scelta di (u_0, v_0). $\square$

Avremo bisogno anche di alcune definizioni e relativi criteri di "regolarità" per germi di funzioni olomorfe e germi di spazi analitici.

Definizione 3.2.9. Un germe f di $\mathcal{O}_n$ è detto *regolare* (oppure *z_n-regolare*) se è il germe di una funzione regolare rispetto all'ultima variabile, ossia se si ha $f(0, z_n) \neq 0$.

Definizione 3.2.10. Un ideale I di $\mathcal{O}_n$, l'anello dei germi di funzioni olomorfe nell'origine di $\mathbb{C}^n$, è detto *k-normale*, con $-1 \leq k \leq n$, se contiene un germe regolare di $\mathcal{O}_l$ per $l = k+1, \ldots, n$.

Osservazione 3.2.11. Notiamo che l'unico ideale (-1)-normale è $\mathcal{O}_n$ stesso; inoltre se un ideale è k-normale allora è anche j-normale per ogni $j = k, \ldots, n$ e ogni ideale che lo contiene è k-normale.

Lemma 3.2.12. *Un ideale I di $\mathcal{O}_n$ è k-normale, con $-1 \leq k \leq n$, se e solo se $\mathcal{O}_n/I$ è un'estensione finita su $\hat{\mathcal{O}}_k = \chi(\mathcal{O}_k)$, dove $\chi\colon \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n/I$ è la proiezione naturale.*

Dimostrazione. Supponiano che $\mathcal{O}_n/I$ sia finita su $\hat{\mathcal{O}}_k$; allora, per $l = k+1, \ldots, n$, l'elemento $\hat{z}_l = \chi(z_l)$ è intero su $\hat{\mathcal{O}}_k$, perciò I contiene un germe monico, quindi z_l-regolare, di $\mathcal{O}_k[z_l]$. Allora, per il Teorema di preparazione di Weierstraß, l'ideale I contiene un germe regolare di $\mathcal{O}_l$ per $l = k+1, \ldots, n$.

Viceversa, supponiamo che I sia k-normale, con $-1 \leq k \leq n$, e sia l un intero tale che $k+1 \leq l \leq n$. Per il Teorema di preparazione di Weierstraß, l'ideale I contiene un germe monico di $\mathcal{O}_{l-1}[z_l]$, quindi l'elemento $\hat{z}_l$ è intero su $\hat{\mathcal{O}}_{l-1}$. Grazie al Teorema di divisione di Weierstraß, si ha $\mathcal{O}_l \subset I + \mathcal{O}_{l-1}[z_l]$, quindi $\hat{\mathcal{O}}_l = \hat{\mathcal{O}}_{l-1}[\hat{z}_l]$, perciò $\hat{z}_l$ è intero su $\hat{\mathcal{O}}_k$ per $l = k+1, \ldots, n$ e $\hat{\mathcal{O}}_n = \hat{\mathcal{O}}_k[\hat{z}_{k+1}, \ldots, \hat{z}_n]$, da cui segue che $\mathcal{O}_n/I$ è un'estensione finita su $\hat{\mathcal{O}}_k$. □

Definizione 3.2.13. Un ideale I di $\mathcal{O}_n$ è detto *k-regolare*, con $-1 \leq k \leq n$, se è k-normale e, se k è superiore o uguale a 0, si ha $\mathcal{O}_k \cap I = \{0\}$. Un germe analitico A nell'origine di $\mathbb{C}^n$ è detto *k-regolare* se è k-regolare l'ideale $I(A)$ dei germi di funzioni olomorfe nell'origine di $\mathbb{C}^n$ che si annullano su A.

Se un ideale I è k-regolare, con $k \geq 0$, allora l'applicazione $\chi|_{\mathcal{O}_k}\colon \mathcal{O}_k \to \hat{\mathcal{O}}_k$ è un isomorfismo.

Definizione 3.2.14. Dati una varietà complessa di dimensione n e un sistema di coordinate φ in un punto a di M, un ideale dell'anello $\mathcal{O}_a$ dei germi di funzioni olomorfe definite in a, o un germe analitico A in a, è detto *k-normale* [risp. *k-regolare*] *nel sistema di coordinate* φ se l'ideale in questo sistema di coordinate, ossia l'ideale $I \circ \varphi^{-1}$, oppure il germe, cioè $\varphi(A)$, è k-normale [risp. k-regolare].

Osservazione 3.2.15. *La k-normalità e la k-regolarità di un ideale di $\mathcal{O}_n$ o di un germe analitico nell'origine di $\mathbb{C}^n$ è preservata da un cambio lineare delle prime k coordinate, come pure da un cambio lineare delle ultime $n-k$ coordinate.* In altri termini, se φ è un automorfismo lineare di $\mathbb{C}^k$, Id_k è l'identità di $\mathbb{C}^k$ e ψ è un automorfismo lineare di $\mathbb{C}^{n-k}$, Id_{n-k} è l'identità di $\mathbb{C}^{n-k}$, allora ogni ideale di $\mathcal{O}_n$ e ogni germe analitico nell'origine di $\mathbb{C}^n$ che sia k-normale (o k-regolare), è k-normale (o k-regolare) anche nei sistemi di coordinate $\varphi \times \mathrm{Id}_{n-k}$ e $\mathrm{Id}_k \times \psi$.

Infatti basta verificarlo per gli ideali. Sia $\chi = \varphi \times \mathrm{Id}_{n-k}$ oppure $\chi = \mathrm{Id}_k \times \psi$. Allora si ha $\mathcal{O}_k \circ \chi^{-1} = \mathcal{O}_k$. La condizione di k-normalità per un ideale I è equivalente alla condizione $\mathcal{O}_n = \sum_j g_j\mathcal{O}_k + I$ con g_j opportuni elementi di $\mathcal{O}_n$, in quanto per il Lemma 3.2.12, un ideale I di $\mathcal{O}_n$ è k-normale se e solo se si ha $\mathcal{O}_n/I = \sum_{i=1}^{\nu} \hat{g}_i\hat{\mathcal{O}}_k$ con $\hat{g}_i$ elementi di $\mathcal{O}_n/I$ algebrici su $\hat{\mathcal{O}}_k$; per cui se I è k-normale, allora, passando alle immagini tramite l'automorfismo di $\mathcal{O}_n$ che ad ogni elemento f di $\mathcal{O}_n$ associa $f\circ\chi^{-1}$, concludiamo che $I\circ\chi^{-1}$ è k-normale. Inoltre se vale $\mathcal{O}_k \cap I = \{0\}$, allora si ha $\mathcal{O}_k \cap (I\circ\chi^{-1}) = \{0\}$.

Proposizione 3.2.16. *Sia I un ideale k-normale dell'anello $\mathcal{O}_n$, con $0 \le k \le n$. Allora esiste un sottoinsieme denso $\mathcal{A}$ nello spazio degli automorfismi lineari di $\mathbb{C}^k$ tale che per ogni φ in $\mathcal{A}$, l'ideale I è k-regolare nel sistema di coordinate $\varphi \times \mathrm{Id}_{n-k}$, dove Id_{n-k} è l'identità di $\mathbb{C}^{n-k}$.*

Dimostrazione. Consideriamo la seguente condizione per $0 \le r \le n$:

$c(r)$ L'ideale I è r-normale oppure s-regolare per qualche $s \le r$.

Sia r maggiore di 0. Se I soddisfa la condizione $c(r)$, allora soddisfa anche la condizione $c(r-1)$ nel sistema di coordinate $\varphi \times \mathrm{Id}_{n-r}$ per ogni φ appartenente a un sottoinsieme denso nello spazio degli automorfismi lineari di $\mathbb{C}^r$. Infatti se I è r-normale ma non r-regolare, allora contiene un germe non nullo di $\mathcal{O}_r$ che è regolare in ogni sistema di coordinate φ appartenente a un sottoinsieme denso nello spazio degli automorfismi lineari di $\mathbb{C}^r$, ossia è $(r-1)$-normale. Quindi per ogni φ_k in un denso nello spazio degli automorfismi lineari di $\mathbb{C}^k$, possiamo scegliere successivamente $\varphi_{k-1}, \dots, \varphi_1$ arbitrariamente vicini all'applicazione identica in modo che l'ideale I nel sistema di coordinate $(\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k) \times \mathrm{Id}_{n-k}$ soddisfi la condizione $c(0)$. Siccome la composizione è continua, gli automorfismi lineari φ di $\mathbb{C}^k$ per cui I soddisfa la condizione $c(0)$ nel sistema di coordinate $\varphi \times \mathrm{Id}_{n-k}$ formano un sottoinsieme denso. Per concludere basta osservare che ogni ideale 0-normale è 0-regolare o (-1)-regolare. □

Notiamo che quanto appena dimostrato implica che ogni ideale k-normale di $\mathcal{O}_n$, con $0 \le k \le n$, diventa 0-normale dopo un opportuno cambio delle prime k-coordinate. La Proposizione 3.2.16 ha inoltre come immediate conseguenze i risultati seguenti.

Corollario 3.2.17. *Siano $I_1, \dots, I_m$ ideali k-normali dell'anello $\mathcal{O}_n$, con $0 \le k \le n$. Allora esiste un sottoinsieme denso $\tilde{\mathcal{A}}$ nello spazio degli automorfismi lineari di $\mathbb{C}^k$ tale che per ogni φ in $\tilde{\mathcal{A}}$, gli ideali $I_1, \dots I_m$ sono k-regolari nel sistema di coordinate $\varphi \times \mathrm{Id}_{n-k}$, dove Id_{n-k} è l'identità di $\mathbb{C}^{n-k}$.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 3.2.16 possiamo trovare un insieme denso $\tilde{\mathcal{A}}$ di automorfismi lineari di $\mathbb{C}^k$ tali che, per ogni φ in $\tilde{\mathcal{A}}$, gli ideali $I_1, \dots, I_m$ soddisfano la condizione $c(0)$ nel sistema di coordinate $\varphi \times \mathrm{Id}_{n-k}$ e questo conclude la dimostrazione. □

Corollario 3.2.18. *Siano $A_1, \dots, A_m$ germi analitici k-normali nell'origine di $\mathbb{C}^n$, con $0 \le k \le n$. Allora esiste un sottoinsieme denso nello spazio degli isomosrfismi di $\mathbb{C}^k$ in sé tale che per ogni suo elemento φ si ha che i germi $A_1, \dots A_m$ sono k-regolari nel sistema di coordinate $\varphi \times \mathrm{Id}_{n-k}$, dove Id_{n-k} è l'identità di $\mathbb{C}^{n-k}$.*

Corollario 3.2.19. *Ogni ideale analitico k-normale di $\mathcal{O}_n$ e ogni germe k-normale analitico nell'origine di $\mathbb{C}^n$ diventa r-regolare, con $r \leq k$ dopo un opportuno cambio delle prime k coordinate.*

L'ultima nozione che ci sarà necessaria è la seguente.

Definizione 3.2.20. Una *tripla normale di dimensione k in $\mathbb{C}^n$*, con $0 \leq k \leq n$, è una tripla (Ω, Z, V), dove Ω è un intorno aperto connesso dell'origine di $\mathbb{C}^k$, Z è un sottoinsieme analitico di Ω mai denso, e V è un sottoinsieme analitico di $\Omega \times \mathbb{C}^{n-k}$ che soddisfa le seguenti condizioni:

(1) la proiezione naturale $\pi \colon V \to \Omega$ è propria,

(2) la controimmagine dell'origine tramite la proiezione π è l'origine,

(3) l'insieme $V_{\Omega \setminus Z}$ è una sottovarietà di $\Omega \times \mathbb{C}^{n-k}$ tale che la proiezione naturale π sia un biolomorfismo locale,

(4) l'insieme $V_{\Omega \setminus Z}$ è denso in V.

Dalla definizione segue immediatamente che se (Ω, Z, V) è una tripla normale di dimensione k in $\mathbb{C}^n$, allora la proiezione $V_{\Omega \setminus Z} \to \Omega \setminus Z$ è un rivestimento finito, la cui molteplicità (positiva) è detta la *molteplicità della tripla normale* (Ω, Z, V). L'insieme V è detto la *corona della tripla normale* (Ω, Z, V).

Definizione 3.2.21. Un germe analitico A è detto *irriducibile* se non si può scrivere come unione di due germi analitici strettamente inclusi in A.

Il risultato che segue ci fornisce una descrizione completa dei germi di insiemi analitici nell'origine di $\mathbb{C}^n$ che siano k-regolari.

Teorema 3.2.22. (Rückert, 1932) *Sia A un germe k-regolare analitico nell'origine di $\mathbb{C}^n$ irriducibile. Allora A ammette una tripla normale (Ω, Z, V) di dimensione k, la cui corona V è un rappresentante di A analitico in $\Omega \times \mathbb{C}^{n-k}$.*

Dimostrazione. L'ipotesi equivale a dire che A è il luogo degli zeri di un ideale primo k-regolare I di $\mathcal{O}_n$. Per il Lemma 3.2.12, esiste un sistema di generatori

$$f_1(z_{k+1}, \dots, z_n), \dots, f_\nu(z_{k+1}, \dots, z_n)$$

per l'ideale I, dove f_j appartiene a $\mathcal{O}_k[X_{k+1}, \dots, X_n]$. Siccome I è primo, l'anello $\mathcal{O}_n/I$ è un dominio d'integrità. Inoltre $\mathcal{O}_k$ è un anello fattoriale. Quindi, per ogni $\hat{z}_j$, con $j = k+1, \dots, n$, abbiamo un polinomio minimo $\hat{p}_j$ appartenente a $\hat{\mathcal{O}}_k[T]$, dove p_j appartiene a $\mathcal{O}_k[T]$. Poiché $\widehat{p_j(z_j)}$ coincide con $\hat{p}_j(\hat{z}_j) = 0$, i germi p_j appartengono a I. Possiamo dunque supporre che il sistema di generatori di I contenga i germi $p_j(z_j)$ per $j = k+1, \dots, n$. Siano $\tilde{p}_j$, rappresentanti dei $p_j(z_j)$ con coefficienti olomorfi in un intorno aperto connesso Ω dell'origine in $\mathbb{C}^k$ e sia $W = W(\tilde{p}_{k+1}, \dots, \tilde{p}_n)$ l'insieme dato da $\{z \in \mathbb{C}^n : z' = (z_1, \dots, z_k) \in \Omega,\ \tilde{p}_{k+1}(z', z_{k+1}) = \cdots = \tilde{p}_n(z', z_n) = 0\}$. L'insieme W è un sottoinsieme analitico mai denso di $\Omega \times \mathbb{C}^{n-k}$, la proiezione naturale $\pi \colon W \to \Omega$ è propria e $\pi^{-1}(0) \subset 0$; inoltre le fibre $\pi^{-1}(u)$ sono finite, in quanto la dimensione di W è finita. Se Γ è un intorno aperto e connesso dell'origine contenuto in Ω, allora W_Γ coincide con $W((\tilde{p}_{k+1})_{\Gamma \times \mathbb{C}}, \dots, (\tilde{p}_n)_{\Gamma \times \mathbb{C}})$ e se W è non vuoto, allora contiene 0 e gli insiemi W_Γ formano una base degli intorni di 0 in W. Esistono quindi intorni aperti connessi arbitrariamente piccoli dell'origine in $\Omega \subset \mathbb{C}^k$ e $\Delta \subset \mathbb{C}^{n-k}$ tali che l'insieme $W = W(\tilde{p}_{k+1}, \ldots, \tilde{p}_n)$ sia contenuto in $\Omega \times \Delta$ e i $\tilde{p}_j$ abbiano coefficienti olomorfi in Ω. Possiamo anche supporre che i germi $f_j(z_{k+1}, \ldots, z_n)$ abbiano rappresentanti $\tilde{f}_i$ che sono polinomi in $v = (z_{k+1}, \ldots, z_n)$ olomorfi in Ω. Allora ciascuno dei germi $\tilde{p}_j$ coincide con un $\tilde{f}_i$. Quindi l'insieme $V = \{\tilde{f}_1 = \cdots = \tilde{f}_r = 0\}$ è un sottoinsieme analitico di $\Omega \times \mathbb{C}^{n-k}$ che rappresenta A ed è contenuto in W. Ne segue che V è incluso in $\Omega \times \Delta$, la proiezione naturale $\pi \colon V \to \Omega$ è propria e vale $\pi^{-1}(0) = 0$ (si ha $\tilde{f}_i(0) = 0$ altrimenti $I = \mathcal{O}_n$). Inoltre i discriminanti dei polinomi $\tilde{p}_j$ non sono identicamente nulli; quindi denotiamo con $Z^* = Z(\tilde{p}_{k+1}, \ldots, \tilde{p}_n)$ l'unione dei luoghi di zero di tali discriminanti. Z^* è un sottoinsieme analitico mai denso di Ω e per il Teorema della funzione implicita, l'insieme $W_{\Omega \setminus Z^*}$ è una sottovarietà di $(\Omega \setminus Z) \times \mathbb{C}^{n-k}$, perciò la proiezione sul primo fattore è un biolomorfismo locale. Ne segue che basta dimostrare che scegliendo opportunamente Ω e Δ esiste un insieme analitico $Z \supset Z^*$, mai denso in Ω e tale che $V' = V_{\Omega \setminus Z} \neq \varnothing$ e per ogni z in V', il germe V'_z contiene un germe liscio di dimensione k. Se z appartiene a V', allora si deve avere $V'_z = W_z$, altrimenti, siccome $V' \subset W_{\Omega \setminus Z^*}$, si avrebbe $\dim V'_z < k$, quindi V' è una sottovarietà in z per cui la proiezione naturale sul primo fattore Ω è un biolomofismo in z.

Per il Teorema dell'elemento primitivo per domini d'integrità (si veda [Ło] pag. 33), esiste un elemento primitivo $\hat{w}$ dell'estensione $\hat{\mathcal{O}}_n$ di $\hat{\mathcal{O}}_k$, dove w appartiene a $\hat{\mathcal{O}}_n$. Allora si ha $\hat{\delta}\hat{z}_j = \hat{Q}_j(\hat{w})$, dove δ appartiene a $\mathcal{O}_k \setminus \{0\}$ e Q_j è un elemento di $\mathcal{O}_k[T]$ per ogni $j = k+1, \ldots, n$. Quindi $\delta z_j - Q_j(w)$ appartiene a I e si ha

$$\delta z_j - Q_j(w) = \sum_i a_{ij} f_i(z_{k+1}, \ldots, z_n), \quad j = k+1, \ldots, n, \tag{3.2.1}$$

dove a_{ij} appartiene a $\mathcal{O}_n$. Siccome l'elemento $\hat{w}$ è intero su $\hat{\mathcal{O}}_k$, ammette un polinomio minimo $\hat{G}$ in $\hat{\mathcal{O}}_k[T]$, con G appartenente a $\mathcal{O}_k[T]$. Allora G è un polinomio irriducibile, quindi il suo discriminante δ_0, che appartiene a $\mathcal{O}_k$, è non nullo. Quindi vale $\hat{G}(\hat{w}) = 0$, ossia $G(w)$ è un elemento di I, da cui segue che si può scrivere nella forma seguente

$$G(w) = \sum_i b_i f_i(z_{k+1}, \ldots, z_n), \tag{3.2.2}$$

con b_i in $\mathcal{O}_n$. Per un opportuno m si ha

$$\delta^m f_i(z_{k+1}, \ldots, z_n) = F_i(\delta z_{k+1}, \ldots, \delta z_n), \quad i = 1, \ldots, r, \tag{3.2.3}$$

dove F_i è un elemento di $\mathcal{O}_n[X_{k+1}, \ldots, X_n]$. Allora si ha

$$\hat{F}_i(\hat{Q}_{k+1}, \ldots, \hat{Q}_n)(\hat{w}) = \hat{F}_i(\hat{\delta}\hat{z}_{k+1}, \ldots, \hat{\delta}\hat{z}_n) = (\delta^m f_i(z_{k+1}, \ldots, z_n))\widehat{\ } = 0,$$

quindi $\hat{G}$ divide $\hat{F}_i(\hat{Q}_{k+1}, \ldots, \hat{Q}_n)$ in $\mathcal{O}_k[T]$, ossia $\hat{F}_i(\hat{Q}_{k+1}, \ldots, \hat{Q}_n) = \hat{G}\hat{H}_i$ per un opportuno H_i in $\mathcal{O}_k[T]$. Da cui segue $F_i(Q_{k+1}, \ldots, Q_n) = GH_i$ e, sostituendo il germe t di $\mathcal{O}_{ut} \subset \mathcal{O}_u = \mathcal{O}_k$ della funzione definita da $(u, t) \mapsto t$, otteniamo

$$F_i(Q_{k+1}(t), \ldots, Q_n(t)) = G(t)H_i(t), \quad i = 1, \ldots, r. \tag{3.2.4}$$

Ora possiamo scegliere l'intorno $\Omega \times \Delta$ abbastanza piccolo in modo che tutti i germi w, a_{ij}, b_i abbiano dei rappresentanti $\tilde{w}, \tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i$ olomorfi in $\Omega \times \Delta$, che i germi δ, δ_0 abbiano dei rappresentanti, non identicamente nulli, olomorfi in Ω, e che i coefficienti dei polinomi Q_j, G, H_i, F_i abbiano rappresentanti olomorfi in Ω. Consideriamo $\tilde{Q}_j(u,t), \tilde{G}(u,t), \tilde{H}_i(u,t), \tilde{F}_i(u,v)$ polinomi rispetto a t e v, rispettivamente, i cui coefficienti sono rappresentanti olomorfi in Ω rispettivamente dei coefficienti dei polinomi Q_j, G, H_i, F_i. Siano Q_j^*, G^*, H_i^* in $\mathcal{O}_\Omega[T]$ e F_i^* in $\mathcal{O}_\Omega[X_{k+1}, \dots, X_n]$ i cui coefficienti coincidono con quelli di $\tilde{Q}_j, \tilde{G}, \tilde{H}_i, \tilde{F}_i$. Allora, identificando $\mathcal{O}_\Omega \subset \mathcal{O}_{\Omega\times\Delta}$ con $\mathcal{O}_\Omega \subset \mathcal{O}_{\Omega\times\mathbb{C}}$, le uguaglianze (3.2.1)–(3.2.4), con (3.2.3) ristretta a $\Omega\times\Delta$, diventano

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\delta} z_j - Q_j^*(\tilde{w}) = \sum_{i=1}^{r} \tilde{a}_{ij}\tilde{f}_i, \quad j = k+1, \dots, n, \\
&G^*(\tilde{w}) = \sum_{i=1}^{r} \tilde{b}_i \tilde{f}_i, \\
&\tilde{\delta}^m f_i = F_i^*(\tilde{\delta} z_{k+1}, \dots, \tilde{\delta} z_n), \quad i = 1, \dots, r, \\
&F_i^*(Q_{k+1}^*(t), \dots, Q_n^*(t)) = G^*(t) H_i^*(t), \quad i = 1, \dots, r,
\end{aligned}
\tag{3.2.5}
$$

dove z_j sono le funzioni di $\Omega \times \Delta$ in $\mathbb{C}$ date da $z \mapsto z_j$ e t denota la funzione di $\Omega \times \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ data da $(z,t) \mapsto t$. Le immagini dei lati sinistro e destro delle diseguaglianze (3.2.5) tramite l'omomorfismo di $\mathcal{O}_{\Omega\times\Delta}$ in $\mathcal{O}_n$ definito da $f \mapsto f_0$ e l'omomorfismo di $\mathcal{O}_{\Omega\times\mathbb{C}}$ in $\mathcal{O}_{ut}$ definito da $h \mapsto h_0$ sono rispettivamente i lati sinistro e destro delle uguaglianze (3.2.1)–(3.2.4), in quanto le immagini dei polinomi Q_j^*, G^*, H_i^*, F_i^* tramite gli omomorfismi indotti sono i polinomi Q_j, G, H_i, F_i. Ne segue

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad \tilde{\delta}(u) z_j - \tilde{Q}_j(u, \tilde{w}(z)) = \sum_{i=1}^{r} \tilde{a}_{ij}(z) \tilde{f}_i(z), \quad \text{in} \quad \Omega\times\Delta \quad j = k+1, \dots, n, \\
&(b) \quad \tilde{G}(u, \tilde{w}(z)) = \sum_{i=1}^{r} \tilde{b}_i(z) \tilde{f}_i(z) \quad \text{in} \quad \Omega\times\Delta, \\
&(c) \quad \tilde{\delta}(u)^m \tilde{f}_i(z) = \tilde{F}_i^*(u, \tilde{\delta}(u) z_{k+1}, \dots, \tilde{\delta}(u) z_n), \quad \text{in} \quad \Omega\times\mathbb{C}^{n-k} \quad i = 1, \dots, r, \\
&(d) \quad \tilde{F}_i(u, \tilde{Q}_{k+1}(u,t), \dots, \tilde{Q}_n(u,t)) = \tilde{G}(u,t) \tilde{H}_i(u,t), \quad \text{in} \quad \Omega\times\mathbb{C} \quad i = 1, \dots, r.
\end{aligned}
$$

Notiamo che $\tilde{\delta}_0$ è il discriminante di $\tilde{G}$ in quanto è il discriminante di G^*.

Poniamo ora Z coincidente con $Z^* \cup \{\tilde{\delta}\tilde{\delta}_0 = 0\}$, quindi si ha

$$
V' = V_{\Omega\setminus Z} = \{(u,v) \in \mathbb{C}^n : u \in \Omega \setminus Z, \tilde{f}_i(u,v) = 0, \, i = 1, \dots, r\}.
$$

L'insieme

$$
\Lambda = \{(u,v,t) \in \mathbb{C}^{n+1} : u \in \Omega \setminus Z, \tilde{G}(u,t) = 0, \tilde{\delta}(u) z_j = \tilde{Q}_j(u,t), \, j = k+1, \dots, n\}
$$

è non vuoto, in quanto sia G che $\tilde{G}$ hanno grado positivo, e, grazie al Teorema della funzione implicita, è una sottovarietà di $\Omega \times \mathbb{C}^{n-k}$ tale che la proiezione sul primo fattore Ω è un biolomorfismo locale. Posto $\pi^*\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$ la proiezione $(z,t) \mapsto z$, le relazioni $(a)-(d)$ implicano che V' coincide con $\pi^*(\Lambda)$. Infatti, dato che V è contenuto in $\Omega \times \Delta$, ponendo $t = \tilde{w}(z)$ in (a) e (b) si ha $V' \subset \pi^*(\Lambda)$, mentre l'inclusione opposta deriva dalle uguaglianze (c) e (d). Di conseguenza l'insieme V' è non vuoto e ciascuno dei suoi punti appartiene ad una sottovarietà di dimensione k che a sua volta è inclusa in tale insieme.

Per concludere la dimostrazione basta mostrare che per ogni intorno aperto connesso Ω' dell'origine contenuto in Ω abbastanza piccolo la tripla $(\Omega', Z\cap\Omega', V_{\Omega'})$ è normale. Infatti il Lemma 3.2.8 implica che l'insieme $\tilde{V} = \overline{V_{\Omega\setminus Z}} \cap (\Omega \times \mathbb{C}^{n-k})$ è analitico in $\Omega\times\mathbb{C}^{n-k}$. Inoltre l'insieme V_Z è analitico in $\Omega\times\mathbb{C}^{n-k}$ e si ha $V = \tilde{V}\cup V_Z$; quindi A coincide con $\tilde{V}_0 \cup (V_Z)_0$, ma è diverso da $(V_Z)_0$ (in quanto, per $V_{\Omega'}$ abbastanza piccolo, la proiezione $\pi_{V_{\Omega'}}\colon V_{\Omega'} \to \Omega'$ è propria e quindi chiusa, per cui, siccome $\pi(V_{\Omega'\setminus Z}) = \Omega'\setminus Z$, si ha $\pi(V_{\Omega'}) \supset \Omega'$ da cui segue $\pi(V_{\Omega'}) = \Omega'$). Quindi A, in quanto irriducibile, coincide con $\tilde{V}_0$. Allora, preso Ω' abbastanza piccolo, si ha $V_{\Omega'} \subset \overline{V_{\Omega'\setminus Z}}$, ossia $V_{\Omega'\setminus Z}$ è denso in $V_{\Omega'}$. □

3.3 Diseguaglianza di Łojasiewicz generale

Il punto chiave nella dimostrazione della diseguaglianza di Łojasiewicz generale è costituito dal seguente risultato.

Lemma 3.3.1. *Sia Z un sottoinsieme analitico di un aperto $\mathcal{U}$ di $\mathbb{C}^n$. Allora per ogni elemento a di Z esiste un intorno aperto U incluso in $\mathcal{U}$ ed esiste un'applicazione olomorfa $g\colon U \to \mathbb{C}^s$ tali che $Z\cap U$ concida con $g^{-1}(0)$ ed esistano due costanti positive c e p tali che valga*

$$|g(z)| \geq c\, d(z,Z)^p$$

per ogni z appartenente a U.

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso in cui il germe Z_a di Z in a sia irriducibile. A meno di cambiare linearmente le coordinate, grazie alla Proposizione 3.2.16 possiamo supporre che a sia l'origine e che il germe Z_0 sia k-regolare, con $0 \leq k \leq n$. Grazie al Teorema 3.2.22, il germe Z_0 ha una tripla normale (Ω, Σ, V) di dimensione k. Inoltre si può richiedere che V coincida con l'intersezione $Z\cap U$, dove U è un intorno aperto dell'origine contenuto in $\Omega\times\mathbb{C}^{n-k}$. Poiché, grazie alle condizioni $(3)-(4)-(1)$ della Definizione 3.2.20, la coppia $(\Sigma, V_{\Omega\setminus\Sigma})$ è un quasi-rivestimento in $\Omega\times\mathbb{C}^{n-k}$ di molteplicità $p>0$ e aderenza V, il Lemma 3.2.8 implica che V coincide con $F^{-1}(0)$, dove $F = F_P\colon \Omega\times\mathbb{C}^{n-k} \to \mathbb{C}^s$ e $P\colon (\mathbb{C}^{n-k})^p \to \mathbb{C}^s$ è un qualsiasi raccoglitore. Prendendo g coincidente con F_U, otteniamo che $Z\cap U$ coincide con $g^{-1}(0)$ e basta scegliere il raccoglitore P in modo che valga il punto (iii) del Lemma 3.2.8. Ora per ogni elemento $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ di $J = \{1, \ldots, n-k\}^p$ prendiamo il polinomio

$$P_\alpha(\eta, v) = \varphi_{\alpha_1}(\eta_1 - v)\cdots\varphi_{\alpha_p}(\eta_p - v),$$

dove $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_p)$ appartiene a $(\mathbb{C}^{n-k})^p$, v è un elemento di $\mathbb{C}^{n-k}$, e $\varphi_j\colon \mathbb{C}^{n-k} \to \mathbb{C}$ è la proiezione $\varphi_j(z_1, \ldots z_{n-k}) = z_j$ per $j = 1, \ldots, n-k$. Prendiamo come raccoglitore $P = (P_{\gamma_1}, \ldots, P_{\gamma_s})$ dove $J = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$. Allora, per (u,v) in $(\Omega\setminus\Sigma)\times\mathbb{C}^{n-k}$, si ha $V_u = \{\eta_1, \dots, \eta_p\}$, $F(u,v) = P(\eta_, \dots, \eta_p, v)$, e

$$
\begin{aligned}
s\,|F(u,v)| &\geq \sum_J |P_\alpha(\eta_, \dots, \eta_p, v)| = \left(\sum_{\nu=1}^{n-k} |\varphi_\nu(\eta_1 - v)|\right) \cdots \left(\sum_{\nu=1}^{n-k} |\varphi_\nu(\eta_p - v)|\right) \\
&\geq |\eta_1 - v| \cdots |\eta_p - v| \\
&\geq d\left((u,v), V\right)^p,
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato il fatto che (u, η_i) appartiene a V per $i = 1, \dots, p$. Allora la diseguaglianza $s\,|F(z)| \geq d(z,V)^p$ vale anche in $\Omega \times \mathbb{C}^{n-k}$ e questo significa che per z in U, si ha

$$
|g(z)| \geq \frac{1}{s}\, d(z,V)^p \geq \frac{1}{s}\, d(z,Z)^p.
$$

Passando al caso generale, per un intorno aperto U' del punto a l'intersezione $Z \cap U'$ coincide con $Z_1 \cup \cdots \cup Z_m$, dove $Z_1, \dots, Z_m$ sono sottoinsiemi analitici di U' i cui germi $(Z_j)_a$ sono irriducibili. Per quanto dimostrato nel caso irriducibile, esiste un intorno aperto U contenuto in U' del punto a ed esistono delle applicazioni olomorfe $g_j\colon U \to \mathbb{C}^{s_j}$ tali che $Z_j \cap U$ coincida con $g_j^{-1}(0)$ e si abbia $|g_j(z)| \geq c\, d(z, Z_j)^p$ in U, dove c e p sono costanti positive. Di conseguenza, l'insieme Z_j è definito dalle funzioni $g_{j\nu}$, dove $g_j = (g_{j1}, \dots g_{js_j})$, e $Z \cap U$ è definito dalle funzioni $h_\nu = g_{1\nu_1} \cdots g_{m\nu_m}$ dove $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ è un elemento dell'insieme $\{\nu : \nu_j = 1, \dots, s_j, \text{ per } j = 1, \dots, m\}$, che denotiamo con Θ. In altri termini, $Z \cap U = h^{-1}(0)$, con $h = (h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_r})$ e $\Theta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$. Infine, per z in U, si ha

$$
\begin{aligned}
r\,|h(z)| &\geq \sum_\Theta |h_\nu(z)| = \left(\sum_{\nu=1}^{s_1} |g_{1\nu}(z)|\right) \cdots \left(\sum_{\nu=1}^{s_m} |g_{m\nu}(z)|\right) \\
&\geq |g_1(z)| \cdots |g_m(z)| \\
&\geq c^m\, d(z, Z_1)^p \cdots d(z, Z_m)^p \\
&\geq c^m\, d(z, Z)^{pm},
\end{aligned}
$$

e questo conclude la dimostrazione. □

Possiamo ora dimostrare la diseguaglianza di Łojasiewicz nella sua forma generale per applicazioni olomorfe.

Teorema 3.3.2. (Łojasiewicz) *Sia f un'applicazione olomorfa di un sottoinsieme aperto U di uno spazio vettoriale complesso M a valori in uno spazio vettoriale complesso N, con $Z = f^{-1}(0)$ diverso dall'insieme vuoto. Allora per ogni sottoinsieme compatto di U, dopo aver dotato M e N di norme, esistono due costanti positive C e p, dipendenti dal compatto e dalle norme scelte, tali che*

$$
|f(z)| \geq C\, d(z, Z)^p
$$

per ogni z appartenente al compatto.

Dimostrazione. Senza ledere la generalità possiamo supporre che M coincida con $\mathbb{C}^n$ e N coincida con $\mathbb{C}^r$. Sia a appartenente a Z e scegliamo U e g come nel Lemma 3.3.1. Abbiamo $f = (f_1, \dots, f_r)$ e $g = (g_1, \dots, g_s)$; per il Nullstellensatz di Hilbert (si veda [AM] pag. 69), esiste un esponente m tale che si ha $g_i^m = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} f_j$ in un intorno U_0 del punto a incluso in U con a_{ij} funzioni olomorfe in U_0 e, a meno di restringere U_0, possiamo supporre che le funzioni a_{ij} siano limitate. Ne segue che, per qualche $K > 0$, per ogni z in U_0 si ha

$$c^m \, d(z, Z)^{pm} \leq s^m \max |g_j(z)|^m \leq K|f(z)|,$$

ossia la tesi. □

Le diseguaglianze di Łojasiewicz sono state generalizzate ad altri tipi di funzioni, ad esempio funzioni semi-algebriche reali (si veda [BCR] pag. 44) oppure funzioni subanalitiche reali (si veda [BM1]). Nel seguito ci servirà il seguente risutato.

Definizione 3.3.3. Sia M una varietà analitica reale. Un sottoinsieme X di M è detto *subanalitico* se ogni punto x di M ammette un intorno U per cui esiste una varietà analitica reale N e un sottoinsieme semi-analitico relativamente compatto A di $M \times N$ tale che $X \cap U$ coincida con $\pi(A)$, dove $\pi\colon M \times N \to M$ è la proiezione sul primo fattore.

Definizione 3.3.4. Siano M e N due varietà analitiche reali e sia X un sottoinsieme di M. Un'applicazione $f\colon X \to N$ è detta *subanalitica* se il suo grafico è un sottoinsieme subanalitico di $M \times N$.

Teorema 3.3.5. *Sia M una varietà analitica reale, sia K un suo sottoinsieme e siano $f, g\colon K \to \mathbb{R}$ funzioni subanalitiche con grafici compatti. Se vale $f^{-1}(0) \subseteq g^{-1}(0)$, allora esistono due costanti positive C e p tali che, per ogni x appartenente a K si ha*

$$|f(x)| \geq C \, |g(x)|^p.$$

Dimostrazione. Per una dimostrazione si veda [BM1] pag. 34. □

Capitolo 4
Normalizzazione olomorfa

4.1 Normalizzazione e azioni di tori su $(\mathbb{C}^n, 0)$

In questo paragrafo vogliamo mostrare il legame tra forme normali di Poincaré-Dulac e azioni di tori.

Sia dunque X un campo vettoriale olomorfo in un intorno dell'origine in $\mathbb{C}^n$ con una singolarità nell'origine, ossia $X(0) = 0$. Come abbiamo visto nel Capitolo 2, per il Teorema di Poincaré-Dulac esiste sempre un cambiamento di coordinate formale che porta X in forma normale di Poincaré-Dulac

$$X = X^{\mathrm{s}} + X^{\mathrm{n}},$$

dove X^{s} è la parte semi-semplice del termine lineare di X, X^{n} commuta con X^{n} e si può scrivere come somma della parte nilpotente X^{nil} del termine lineare di X con un campo vettoriale X^{res} formato solo da termini risonanti.

Per definizione esiste un sistema di coordinate lineare complesso $(z^1, \ldots, z^n)$ in $\mathbb{C}^n$ in cui X^{s} è nella forma diagonale

$$X^{\mathrm{s}} = \sum_{j=1}^{n} \lambda^j z^j \partial_j,$$

dove $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ sono gli autovalori, non necessariamente distinti, della parte lineare di X in 0; quindi X^{s} si scrive come combinazione lineare a coefficienti complessi dei campi vettoriali lineari diagonali a coefficienti interi $z^j \partial_j$. Quest'ultimo fatto ci suggerisce la seguente definizione, il cui significato sarà tra breve chiarito.

Definizione 4.1.1. Il *grado torico* di un campo vettoriale X di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ è il minimo intero positivo r tale che la parte lineare semi-semplice X^{s} di X si possa scrivere come combinazione lineare a coefficienti complessi di r campi vettoriali diagonali a coefficienti interi, ossia

$$X^{\mathrm{s}} = \sum_{k=1}^{r} \alpha^k Z_k,$$

con $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ appartenenti a $\mathbb{C}^*$ e dove ciascun Z_k è della forma $Z_k = \sum_{j=1}^{n} \rho_k^j z^j \partial_j$ con $\rho_k = (\rho_k^1, \ldots, \rho_k^n)$ appartiene a $\mathbb{Z}^n$.

Definizione 4.1.2. Dato X appartenente a $\widehat{\mathfrak{X}}_n$, di grado torico r, una r-upla di campi vettoriali diagonali a coefficienti interi $Z_1, \dots, Z_r$ per cui la parte lineare semi-semplice X^{s} di X si possa scrivere come loro combinazione lineare a coefficienti complessi è detta una *r-upla di campi torici associati* a X.

Vediamo alcune prime proprietà delle r-uple di campi vettoriali torici.

Lemma 4.1.3. *Sia X^{s} un campo vettoriale lineare semi-semplice singolare nell'origine di $\mathbb{C}^n$ di grado torico r, e sia $Z_1, \dots, Z_r$ una r-upla di campi vettoriali torici associati a X^{s}. Allora:*

(i) i coefficienti complessi $\alpha^1, \dots, \alpha^r$ tali che si ha $X^{\mathrm{s}} = \sum_{k=1}^r \alpha^k Z_k$ sono razionalmente indipendenti;

(ii) se λ^j è un autovalore di molteplicità m_j per X^{s}, allora, posto $Z_k = \sum_{j=1}^n \rho_k^j z^j \partial_j$, si ha che ρ_k^j è un autovalore di molteplicità m_j per Z_k per ogni $k = 1, \dots, r$.

Dimostrazione. (i) Se $\alpha^1, \dots, \alpha^r$ fossero razionalmente dipendenti, allora esisterebbero $c_1, \dots, c_r$ numeri interi per cui $c_1\alpha^1 + \cdots + c_r\alpha^r = 0$ con, a meno dell'ordine, $c_1 \neq 0$; ma allora si avrebbe

$$X^{\mathrm{s}} = \frac{\alpha^2}{c_1}(c_1 Z_2 - c_2 Z_1) + \cdots + \frac{\alpha^r}{c_1}(c_1 Z_r - c_r Z_1),$$

ossia potremmo scrivere X^{s} come combinazione lineare complessa di $r-1$ campi vettoriali a coefficienti interi, contraddicendo la minimalità di r.

(ii) Siano $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ gli autovalori di X^{s}. Basta dimostrare che se λ^j coincide con λ^h, con h diverso da j, allora per ogni $k = 1, \dots, r$, si ha che ρ_k^j coincide con ρ_k^h. Infatti, dato che $X^{\mathrm{s}} = \sum_{k=1}^r \alpha^k Z_k$ e, per il punto precedente, $\alpha^1, \dots, \alpha^r$ sono razionalmente indipendenti, se $\lambda^j = \lambda^h$ si ha

$$\alpha^1\rho_1^j + \cdots + \alpha^r\rho_r^j = \alpha^1\rho_1^h + \cdots + \alpha^r\rho_r^h,$$

da cui segue

$$\alpha^1(\rho_1^j - \rho_1^h) + \cdots + \alpha^r(\rho_r^j - \rho_r^h) = 0$$

e, poiché ogni termine $\rho_k^j - \rho_k^h$ è un intero per definizione di campo vettoriale torico associato a X, questo implica $\rho_k^j = \rho_k^h$ per $k = 1, \dots, r$. $\square$

Lemma 4.1.4. *Sia X^{s} un campo vettoriale lineare semi-semplice di $\mathfrak{X}_n$, e sia λ un suo autovalore non nullo. Allora X^{s} ha grado torico 1 se e solo se tutti i suoi autovalori sono multipli razionali di λ, ossia il rapporto un autovalore di X^{s} e λ appartiene a $\mathbb{Q}$.*

Dimostrazione. Siano $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ gli autovalori (non necessariamente distinti) di X^{s}. A meno di cambiare linearmente le coordinate, possiamo supporre che X^{s} sia un campo vettoriale diagonale e, senza ledere la generalità, possiamo supporre che λ coincida con λ^1. Il campo X^{s} ha grado torico 1 se e solo se esistono un numero complesso non nullo α e un campo vettoriale diagonale Y a coefficienti interi $m_1, \dots, m_n$ tali che X^{s} coincida con αY; questo equivale ad avere

$$\lambda^j = \alpha m_j \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

ossia

$$\frac{\lambda^j}{\lambda^1} = \frac{m_j}{m_1} \quad \forall j = 1, \ldots, n,$$

e, poiché m_j/m_1 è un numero razionale per ogni $j = 1, \ldots, n$, questo conclude la dimostrazione. $\square$

Osservazione 4.1.5. *Se un elemento di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ ha grado torico è 1 allora il campo torico associato è unico a meno di moltiplicazione per un numero intero.* Infatti dal lemma precedente segue che se Y e Z sono due campi vettoriali torici distinti associati allo stesso campo vettoriale semi-semplice di grado torico 1, allora esiste un intero non nullo m che verifica $Y = mZ$.

Osservazione 4.1.6. *Se un elemento di $\widehat{\mathfrak{X}}_n$ ha grado grado torico r è maggiore di 1, allora le r-uple di campi vettoriali torici associati non sono uniche.* Ad esempio, consideriamo

$$X^{\mathrm{s}} = (3+4i)z^1\partial_1 + (2+6i)z^2\partial_2 + (-1+2i)z^3\partial_3;$$

il grado torico non è 1 in quanto è immediato verificare che non possiamo esprimere X^{s} come prodotto di un numero complesso per un campo vettoriale a coefficienti interi. Il grado torico è 2, in quanto, posto $\alpha^1 = i, \alpha^2 = 1+i, Z_1 = z^1\partial_1 + 4z^2\partial_2 + 3z^3\partial_3$ e $Z_2 = 3z^1\partial_1 + 2z^2\partial_2 - z^3\partial_3$, si ha

$$\begin{aligned} \alpha^1 Z_1 + \alpha^2 Z_2 &= i\left(z^1\partial_1 + 4z^2\partial_2 + 3z^3\partial_3\right) + (1+i)\left(3z^1\partial_1 + 2z^2\partial_2 - z^3\partial_3\right) \\ &= (i+3+3i)z^1\partial_1 + (4i+2+2i)z^2\partial_2 + (3i-1-i)z^3\partial_3 \\ &= X^{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

dove α^1 e α^2 sono razionalmente indipedenti. Tuttavia, posto $\beta^1 = (-3+16i)/6$, $\beta^2 = (-3-4i)/6$, $Y_1 = z^2\partial_2 + z^3\partial_3$ e $Y_2 = -6z^1\partial_1 - 5z^2\partial_2 + z^3\partial_3$, si ha anche

$$\begin{aligned} X^{\mathrm{s}} &= \beta^1 Y_1 + \beta^2 Y_2 \\ &= \frac{-3+16i}{6}\left(z^2\partial_2 + z^3\partial_3\right) + \frac{-3-4i}{6}\left(-6z^1\partial_1 - 5z^2\partial_2 + z^3\partial_3\right) \\ &= -6\frac{(-3-4i)}{6}z^1\partial_1 + \frac{-3+16i+15+20i}{6}z^2\partial_2 + \frac{-3+16i-3-4i}{6}z^3\partial_3 \end{aligned}$$

con β^1 e β^2 razionalmente indipedenti. Quindi Z_1, Z_2, e Y_1, Y_2 sono due coppie distinte di campi torici associati a X^{s}.

I campi vettoriali torici godono anche delle seguenti proprietà che avremo modo di apprezzare nel seguito.

Lemma 4.1.7. *Sia X un campo vettoriale olomorfo in un intorno dell'origine di $\mathbb{C}^n$, con $X(0) = 0$ e grado torico r, e sia $Z_1, \ldots, Z_r$ una r-upla di campi vettoriali torici associati a X. Allora*

(i) i campi vettoriali $Z_1, \ldots, Z_r$ commutano a due a due e sono linearmente indipendenti;

(ii) ciascun Z_k commuta con X^{s}, con X^{nil} e con ogni monomio vettoriale risonante di X.

Dimostrazione. (i) I campi vettoriali Z_k commutano a due a due perché i campi vettoriali diagonali commutano; inoltre sono linearmente indipendenti per la minimalità di r.

(ii) Il campo vettoriale X^{s} commuta con ciascun Z_k perché è combinazione lineare di $Z_1, \dots, Z_r$, i quali, per (i), commutano a due a due.

Inoltre X^{nil} commuta con Z_k per ogni k fra 1 e r. Infatti, se $\lambda^1, \dots, \lambda^p$ sono gli autovalori distinti di X^{s}, con molteplicità rispettivamente $m_1, \dots, m_p$, ($m_j \geq 1$ e $m_1 + \cdots + m_p = n$), si ha

$$X^{\mathrm{nil}} = \sum_{i=1}^{m_1-1} z^{i+1}\partial_i + \cdots + \sum_{i=1}^{m_p-1} z^{i+1}\partial_i$$

e, analogamente,

$$Z_k = \rho_k^1 \sum_{j=1}^{m_1} z^j \partial_j + \cdots + \rho_k^p \sum_{j=1}^{m_p} z^j \partial_j$$

per $k = 1, \dots, r$; quindi, dato che, per ogni i, j, vale $[z^{i+1}\partial_i, z^j\partial_j] = z^{i+1}\delta_i^j\partial_j - z^j\delta_{i+1}^j\partial_i$, si ha

$$\begin{aligned}
[X^{\mathrm{nil}}, Z_k] &= \sum_{h=1}^{p} \left(\rho_k^h \sum_{i=1}^{m_h-1} \sum_{j=1}^{m_h} (z^{i+1}\delta_i^j \partial_j - z^j \delta_{i+1}^j \partial_i) \right) \\
&= \sum_{h=1}^{p} \left(\rho_k^h \sum_{i=1}^{m_h-1} (z^{i+1}\partial_i - z^{i+1}\partial_i) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Infine, sia $W = (z^1)^{b_1} \cdots (z^n)^{b_n} \partial_l$ un termine monomiale risonante, ossia tale che valga la relazione $\sum_{j=1}^n b_j \lambda^j - \lambda^l = 0$. Allora

$$\begin{aligned}
0 = [X^{\mathrm{s}}, W] &= \sum_{k=1}^{r} \alpha^k [Z_k, W] \\
&= \sum_{k=1}^{r} \alpha^k \left(\sum_{j=1}^{n} \rho_k^j b_j - \rho_k^l \right) W,
\end{aligned}$$

da cui segue

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha^k \left(\sum_{j=1}^{n} \rho_k^j b_j - \rho_k^l \right) = 0,$$

che, siccome $\alpha^1, \dots, \alpha^r$ sono razionalmente indipendenti e $\sum_{j=1}^n \rho_k^j b_j - \rho_k^l$ appartiene a $\mathbb{Z}$ per ogni k, implica

$$\sum_{j=1}^n \rho_k^j b_j - \rho_k^l = 0,$$

ossia $[Z_k, W] = 0$ per ogni $k = 1, \dots, r$. □

Poiché $Z_1, \dots, Z_r$ sono campi vettoriali diagonali a coefficienti interi, il flusso di ciascuno di essi si può calcolare in modo esplicito mediante integrazione. Allo stesso modo il flusso di ogni iZ_k, sarà della forma

$$\theta_{iZ_k}(t)\mathbf{z} = (z^1 e^{i\rho_k^1 t}, \dots, z^n e^{i\rho_k^n t}).$$

In particolare, ogni iZ_k è un campo vettoriale con flusso periodico di periodo 2π, in quanto

$$\begin{aligned}\theta_{iZ_k}(t+2\pi)\mathbf{z} &= (z^1 e^{i\rho_k^1 (t+2\pi)}, \dots, z^n e^{i\rho_k^n (t+2\pi)}) \\ &= (z^1 e^{i\rho_k^1 t + 2\pi i \rho_k^1}, \dots, z^n e^{i\rho_k^n t + 2\pi i \rho_k^n}) \\ &= (z^1 e^{i\rho_k^1 t}, \dots, z^n e^{i\rho_k^n t}) \\ &= \theta_{iZ_k}(t)\mathbf{z},\end{aligned}$$

poiché $\rho_k = (\rho_k^1, \dots, \rho_k^n)$ appartiene a $\mathbb{Z}^n$ per ipotesi. Quest'ultima osservazione, insieme al Lemma 4.1.7, implica il risultato seguente

Corollario 4.1.8. *Sia X un campo vettoriale olomorfo in un intorno dell'origine di $\mathbb{C}^n$, con $X(0) = 0$ e grado torico r, e sia $Z_1, \dots, Z_r$ una r-upla di campi vettoriali torici associati a X. Allora $iZ_1, \dots, iZ_r$ generano un'azione lineare effettiva di un toro di dimensione r che preserva la parte semi-semplice e la parte nilpotente del termine lineare di X.*

A questo punto vogliamo studiare alcune proprietà delle azioni su $(\mathbb{C}^n, 0)$ di tori. Nel seguito indicheremo con r un intero compreso tra 1 e n.

Per quanto visto finora, esiste una corrispondenza biunivoca tra azioni effettive locali di $\mathbb{T}^r$ su $\mathbb{C}^n$ che fissano l'origine e r-uple di campi vettoriali olomorfi $X_1, \dots, X_r$ di $\mathfrak{X}_n$ linearmente indipendenti, che commutano a due a due e il cui flusso sia periodico di periodo 2π. Inoltre, poiché i tori sono gruppi compatti, otteniamo, come corollario del Teorema di Bochner 1.7.2, il seguente risultato.

Corollario 4.1.9. *Ogni azione locale olomorfa di toro su $(\mathbb{C}^n, 0)$ è olomorficamente linearizzabile tramite un cambiamento di coordinate tangente all'identità.*

Ne segue che, data un'azione locale olomorfa di un toro $\mathbb{T}^r$ su $(\mathbb{C}^n, 0)$, ciascuno degli r campi vettoriali associati a tale azione è olomorficamente coniugato alla sua parte lineare. In realtà possiamo dire di più: il risultato che segue ci dice infatti che un campo vettoriale lineare periodico di periodo 2π è semi-semplice, ossia diagonalizzabile.

Lemma 4.1.10. *Sia Y un campo vettoriale olomorfo lineare e singolare nell'origine di $\mathbb{C}^n$. Allora Y è periodico di periodo 2π se e solo se è diagonalizzabile ed ha autovalori interi di Gauß immaginari puri.*

Dimostrazione. Siccome Y è un campo vettoriale lineare singolare nell'origine, è della forma

$$Y = \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} a_{hk} z^k \right) \partial_h,$$

e dalla teoria usuale dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie segue che il flusso locale di Y in un punto $\mathbf{z}$ è

$$\theta_Y(t)\,\mathbf{z} = e^{tA}\,\mathbf{z}$$

dove $A = (a_{hk})$ è la matrice dei coefficienti di Y e con e^{tA} indichiamo l'espressione

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

A meno di cambiare linearmente le coordinate, possiamo supporre che A sia in forma normale di Jordan, ossia

$$A = A^{\mathrm{s}} + A^{\mathrm{n}},$$

con A^{s} matrice diagonale, A^{n} matrice nilpotente e $A^{\mathrm{s}}A^{\mathrm{n}} = A^{\mathrm{n}}A^{\mathrm{s}}$; quest'ultima proprietà implica

$$e^{tA} = e^{t(A^{\mathrm{s}}+A^{\mathrm{n}})} = e^{tA^{\mathrm{s}}}\, e^{tA^{\mathrm{n}}}.$$

Dimostriamo dunque che se e^{tA} è periodico di periodo 2π allora A^{n} è la matrice nulla e A^{s} ha autovalori interi di Gauß immaginari puri. Basta dimostrarlo per A matrice con un solo autovalore λ. In questo caso A^{s} coincide con λI, dove I è la matrice identità e A^{n} è la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A è periodica di periodo 2π se e solo se si ha $e^{(t+2\pi)(A^{\mathrm{s}}+A^{\mathrm{n}})} = e^{t(A^{\mathrm{s}}+A^{\mathrm{n}})}$; svolgendo i calcoli, si ha che la matrice $e^{(t+2\pi)(A^{\mathrm{s}}+A^{\mathrm{n}})}$ è della forma

$$e^{(t+2\pi)\lambda} \left(I + (t+2\pi)A^{\mathrm{n}} + \frac{(t+2\pi)^2 (A^{\mathrm{n}})^2}{2!} + \cdots + \frac{(t+2\pi)^{n-1}(A^{\mathrm{n}})^{n-1}}{(n-1)!} \right),$$

mentre la matrice $e^{t(A^{\mathrm{s}}+A^{\mathrm{n}})}$ è della forma

$$e^{t\lambda} \left(I + tA^{\mathrm{n}} + \frac{t^2 (A^{\mathrm{n}})^2}{2!} + \cdots + \frac{t^{n-1}(A^{\mathrm{n}})^{n-1}}{(n-1)!} \right),$$

quindi coincidono per ogni t se e solo se si ha $e^{(t+2\pi)\lambda} = e^{t\lambda}$ (ossia λ è un intero di Gauß immaginario puro) e A^{n} è la matrice nulla, come volevamo dimostrare. □

Definizione 4.1.11. Sia $1 \leq r \leq n$ e sia θ un'azione locale olomorfa di $\mathbb{T}^r$ su $(\mathbb{C}^n, 0)$. Un elemento X di $\mathfrak{X}_n$ è *preservato da* θ se è invariante rispetto all'azione.

Ne segue che un campo vettoriale è preservato da un'azione locale olomorfa effettiva di $\mathbb{T}^r$ su $(\mathbb{C}^n, 0)$ se e solo se commuta con i campi vettoriali associati all'azione.

Poiché r campi vettoriali di $\mathfrak{X}_n$, linearmente indipendenti e che commutano a due a due generano, in $\mathfrak{X}_n$ una sottoalgebra abeliana e allo stesso modo, r campi vettoriali lineari di $\mathfrak{X}_n$, linearmente indipendenti e che commutano a due a due generano, in $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ una sottoalgebra abeliana, possiamo associare ad ogni azione di $\mathbb{T}^r$ tali sottoalgebre.

Definizione 4.1.12. Sia θ un'azione locale olomorfa di $\mathbb{T}^r$ su $(\mathbb{C}^n, 0)$. Indicheremo con $\mathfrak{h}^\theta$ la sottoalgebra abeliana di $\mathfrak{X}_n$ associata a θ. La *sottoalgebra lineare* $\mathfrak{h}^\theta_{\mathrm{s}}$ *associata all'azione* θ è la sottoalgebra abeliana di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ associata alla parte lineare di θ.

Abbiamo indicato la sottoalgebra lineare associata a θ con il simbolo $\mathfrak{h}^\theta_{\mathrm{s}}$ per ricordarci che la parte lineare di un'azione locale olomorfa di un toro su $(\mathbb{C}^n, 0)$ è sempre semi-semplice.

Possiamo adesso dimostrare il risultato seguente che mostra la stretta relazione fra azioni di toro e convergenza della normalizzazione di Poincaré-Dulac.

Teorema 4.1.13. (Zung, 2002) *Sia X un campo vettoriale olomorfo in un intorno dell'origine di $\mathbb{C}^n$, con $X(0) = 0$. Allora X ammette una normalizzazione di Poincaré-Dulac convergente se e solo se è preservato, in un intorno dell'origine, da un'azione effettiva θ su $(\mathbb{C}^n, 0)$ di un toro (reale) di dimensione uguale al grado torico di X e tale che la parte semi-semplice di X appartenga alla sottoalgebra abeliana $\mathfrak{h}^\theta_{\mathrm{s}}$ di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ associata alla parte lineare dell'azione.*

Dimostrazione. Supponiamo che X ammetta una normalizzazione di Poincaré-Dulac convergente e che sia in forma normale, ossia che X commuti con X^{s}. Allora, detto r il grado torico di X, per ogni r-upla $Z_1, \ldots, Z_r$ di campi vettoriali torici associati a X, si ha che X commuta con ciascuno degli Z_j, in quanto X si può scrivere come somma della parte semi-semplice X^{s} con la parte nilpotente X^{nil} e la parte risonante X^{res} e, per il Lemma 4.1.7, ogni Z_j commuta con tutti questi termini. Quindi, per il Corollario 4.1.8, X è preservato dall'azione effettiva di un toro di dimensione r generata da $iZ_1, \ldots, iZ_r$.

Viceversa, supponiamo che esista un'azione locale analitica effettiva di un toro di dimensione r, dove r è il grado torico del campo vettoriale dato, su $(\mathbb{C}^n, 0)$ che preservi X e tale che X^{s} appartenga alla sottoalgebra abeliana $\mathfrak{h}$ di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ associata alla parte lineare dell'azione. Per il Teorema di Bochner 1.7.2 esiste una linearizzazione olomorfa dell'azione. Nelle nuove coordinate, l'azione sarà dunque generata dal flusso di r campi vettoriali lineari semi-semplici $Y_1, \ldots, Y_r$ che commutano a due a due e, per il Teorema 1.4.2, a meno di cambiare linearmente coordinate possiamo supporre che $Y_1, \ldots, Y_r$ siano campi vettoriali diagonali. Poiché $\mathfrak{h}$ è generata da $Y_1, \ldots, Y_r$, esisteranno $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$ numeri complessi non tutti nulli che verifichino

$$X^{\mathrm{s}} = \sum_{k=1}^{r} \alpha^k Y_k.$$

Dato che l'azione preserva X, si ha che X commuta con ciascun Y_k; quindi X commuta con la sua parte semi-semplice in quanto questa è combinazione lineare di $Y_1, \ldots, Y_r$. Ne segue che una linearizzazione olomorfa dell'azione di toro considerata (la cui esistenza è garantita dal Teorema di Bochner 1.7.2) è anche una normalizzazione di Poincaré-Dulac convergente per X e questo conclude la dimostrazione. $\square$

Osserviamo che il teorema appena dimostrato è valido, allo stesso modo, anche nella categoria formale, ma ovviamente ogni campo vettoriale ammette una normalizzazione di Poincaré-Dulac formale e un'azione di toro formale.

4.2 Necessità dell'ipotesi di Zung

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che il Teorema di Zung 4.1.13 mostra che l'esistenza di una normalizzazione di Poincaré-Dulac convergente per un campo vettoriale X di $\mathfrak{X}_n$ equivale all'esistenza di un'azione di toro di dimensione uguale al grado torico di X che preservi il campo vettoriale e la cui parte lineare sia generata da una r-upla di campi vettoriali torici associata alla parte semi-semplice X^{s} del termine lineare di X.

Per verificare che l'ipotesi di Zung sulla parte lineare dell'azione è necessaria, basta dunque trovare un campo vettoriale X di $\mathfrak{X}_n$ per cui non esista una normalizzazione di Poincaré-Dulac convergente e che sia preservato da un'azione di $\mathbb{T}^r$, dove r è il grado torico di X.

Sia X un campo vettoriale olomorfo di $\mathfrak{X}_m$, con $n \geq 1$, di grado torico r per cui non esista una normalizzazione di Poincaré-Dulac convergente. Quindi non esiste un'azione di $\mathbb{T}^r$ che preservi X e tale che X^{s} appartenga alla sottoalgebra abeliana associata alla parte lineare dell'azione. Possiamo scrivere X nella forma

$$X = \sum_{j=1}^{m} X_j \partial_j,$$

con X_j appartenente a $\mathcal{O}_m$ per ogni j. Osserviamo che, per ogni n superiore o uguale a $m + r + 1$, il campo vettoriale X appartiene a $\mathfrak{X}_n$ e si può scrivere nella forma

$$X = \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j \partial_j$$

dove $\tilde{X}_j$ coincide con $X_j = X_j(z^1, \ldots, z^n)$ per $j = 1, \ldots, m$ ed è identicamente nullo per $j = m + 1, \ldots, n$.

Consideriamo $Y_1, \ldots, Y_r$ una r-upla di campi vettoriali semi-semplici di $\mathfrak{X}_r$ che generino un'azione di $\mathbb{T}^r$ su $\mathbb{C}^r$ che fissi l'origine. I campi vettoriali $Y_1, \ldots, Y_r$ saranno dunque della forma

$$Y_k = \sum_{h=1}^{r} Y_{k,h} \partial_h,$$

con $Y_{k,h}$ appartenente a $\mathcal{O}_r$. Consideriamo i campi vettoriali $Z_1, \ldots, Z_r$ della forma

$$Z_k = \sum_{h=1}^{r} Z_{k,h} \partial_h,$$

con $Z_{k,h}$ identicamente nullo per $h = 1, \ldots, m$ e coincidente con $Y_{k,h}(z_{m+1}, \ldots, z_n)$ per $h = m+1, \ldots, n$. Allora $Z_1, \ldots, Z_r$ generano un'azione di $\mathbb{T}^r$ su $\mathbb{C}^n$ che fissa l'origine e preserva il campo vettoriale X in $\mathfrak{X}_n$. Infatti, per ogni $k = 1, \ldots, r$, si ha

$$\begin{aligned}
[X, Z_k] &= \left[\sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j \partial_j, \sum_{h=1}^{n} Z_{k,h} \partial_h\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \left[\tilde{X}_j \partial_j, Z_{k,h} \partial_h\right] \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{h=m+1}^{n} [X_j(z^1, \ldots, z^m)\partial_j, Z_{k,h}(z^{m+1}, \ldots, z^n)\partial_h] \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{h=m+1}^{n} (X_j \partial_j (Z_{k,h})\partial_h + X_j Z_{k,h} \partial_j \partial_h - Z_{k,h} \partial_h (X_j) \partial_j - Z_{k,h} X_j \partial_h \partial_j) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

in quanto $\partial_j(Z_{k,h})$ è nullo per $j = 1, \ldots, m$ e $\partial_h(X_j)$ è nullo per $h = m+1, \ldots, n$, e $X_j Z_{k,h} \partial_j \partial_h - Z_{k,h} X_j \partial_h \partial_j = 0$.

Quindi *se* esiste un campo X come sopra che non sia olomorficamente normalizzabile come elemento di $\mathfrak{X}_n$ per un intero positivo $n \geq m+r+1$, allora l'ipotesi di Zung sulla parte semi-semplice dell'azione di toro è necessaria, in quanto X è preservato da un'azione di $\mathbb{T}^r$ su $(\mathbb{C}^n, 0)$. Ne segue che *un modo di dimostrare la necessità dell'ipotesi di Zung è trovare un campo vettoriale X di $\mathfrak{X}_m$ che non sia olomorficamente normalizzabile e per cui esista $n \geq m+r+1$ tale che X non ammetta una normalizzazione olomorfa anche come elemento di $\mathfrak{X}_m$.*

4.3 Azioni di toro per campi vettoriali integrabili

Prima di dimostrare il risultato principale di questo paragrafo, abbiamo bisogno delle seguenti definizioni e di alcuni risultati tecnici preliminari.

Definizione 4.3.1. Sia X un campo vettoriale appartenente a $\mathfrak{X}_n$. Un elemento f di $\mathcal{O}_n$ è detto un *integrale primo di X* se verifica $X(f) = 0$.

Definizione 4.3.2. Un campo vettoriale X locale olomorfo in $(\mathbb{C}^n, 0)$ è detto *integrabile* se esiste un intero positivo m, con $1 \leq m \leq n$, tale che esistono m campi vettoriali locali olomorfi $X_1 = X, X_2, \ldots, X_m$ e $n-m$ funzioni locali olomorfe $f_1, \ldots, f_{n-m}$ in $(\mathbb{C}^n, 0)$ con le seguenti proprietà:

(i) i campi vettoriali $X_1, \ldots, X_m$ commutano a due a due e sono linearmente indipendenti, ossia $X_1 \wedge \cdots \wedge X_m \not\equiv 0$;

(ii) le funzioni $f_1, \ldots, f_{n-m}$ sono integrali primi comuni per $X_1, \ldots, X_m$, cioè per ogni j e k si ha $X_j(f_k) = 0$, e sono funzionalmente indipendenti quasi ovunque, ossia $\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_{n-m} \neq 0$.

Ricordiamo (Definizione 2.2.7) che elemento X di $\mathfrak{X}_n$ è in forma normale di Poincaré-Dulac fino all'ordine k se è della forma $X = X^{\mathrm{s}} + X^{\mathrm{n}}_k + W$, dove X^{s} è un campo vettoriale lineare semi-semplice, W è un campo vettoriale k-piatto e X^{n}_k è un campo vettoriale formato solo da termini risonanti, ossia $[X^{\mathrm{s}}, X^{\mathrm{n}}_k] = 0$, di ordine minore di k.

Lemma 4.3.3. *Sia X un campo vettoriale olomorfo di $\mathfrak{X}_n$ in forma normale di Poincaré-Dulac fino all'ordine k, con k intero positivo, di grado torico r, e sia $Z_1, \ldots, Z_r$ una r-upla di campi vettoriali torici associati a X. Allora*

(i) se Y è un campo vettoriale che commuta con X, allora si ha $[Z_j, Y] = O(|z|^k)$ per ogni $j = 1, \ldots, r$;

(ii) se f è un integrale primo per X allora vale $Z_j(f) = O(|z|^k)$ per $j = 1, \ldots, r$.

Inoltre se X è in forma normale di Poincaré-Dulac, Y è un campo vettoriale che commuta con X e f è un integrale primo per X, allora Y commuta con ciascuno degli Z_j e f è un integrale primo per ciascuno degli Z_j.

Dimostrazione. (i) Sia Y un campo vettoriale di $\mathfrak{X}_n$ che commuta con X. Allora si ha

$$\pi_k([X, Y]) = 0, \tag{4.3.1}$$

dove π_k è la proiezione da $\mathfrak{X}_n$ sui k-getti di campi vettoriali $\mathfrak{X}^k_n$; per quanto visto nel capitolo 2, si ha

$$\pi_k([X, Y]) = [\pi_k(X), \pi_k(Y)]. \tag{4.3.2}$$

Il campo vettoriale $\pi_k(X^{\mathrm{s}})$ è semi-semplice e, per l'unicità della decompozione di Jordan-Chevalley in spazi vettoriali di dimensione finita, coincide con la parte semi-semplice di $\pi_k(X)$, quindi, grazie alle equazioni (4.3.1) e (4.3.2), si ha

$$\begin{aligned} 0 &= [\pi_k(X)^{\mathrm{s}}, \pi_k(Y)] \\ &= [\pi_k(X^{\mathrm{s}}), \pi_k(Y)] \\ &= \pi_k([X^{\mathrm{s}}, Y]), \end{aligned}$$

ossia $[X^{\mathrm{s}}, Y] = O(|\mathbf{z}|^k)$. Ne segue che tutti i monomi di Y di grado inferiore o uguale a $k-1$ sono risonanti e quindi, grazie al Lemma 4.1.7, per ogni $j = 1, \ldots, r$, vale $[Z_j, Y] = O(|\mathbf{z}|^k)$.

Inoltre, se X è in forma normale di Poincaré-Dulac, da quanto scritto sopra segue che se X commuta con Y allora per ogni intero positivo k, si ha $[X^{\mathrm{s}}, Y] = O(|\mathbf{z}|^k)$, che implica che Y commuta con la parte semi-semplice di X, quindi, per il Lemma 4.1.7, commuta con ciascuno degli Z_j.

(ii) Ogni campo vettoriale appartenente a $\mathfrak{X}_n$ è una derivazione di $\mathcal{O}_n$, quindi agisce linearmente su $\mathcal{O}_n$. Sia f un integrale primo di X. Allora si ha

$$\rho_k(X(f)) = 0,$$

dove ρ_k è la proiezione da $\mathcal{O}_n$ sui k-getti di serie formali J_n^k; analogamente al punto precedente, si ha

$$\rho_k(X(f)) = \pi_k(X)(\rho_k(f)).$$

Infatti se $X = \sum_{j,P} X_{j,P}\partial_j$, per ogni monomio $f_Q\mathbf{z}^Q$ di f si ha

$$\begin{aligned} \rho_k(X(\mathbf{z}^Q)) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{|Q+P-e_j|\le k} X_{j,P} f_Q q_j \, \mathbf{z}^{Q+P-e_j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|P|\le k, |Q|\le k \\ |Q+P-e_j|\le k}} X_{j,P} f_Q q_j \, \mathbf{z}^{Q+P-e_j}, \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $|Q+P-e_j| \le k$ implica $|P| \le k$ e $|Q| \le k$; inoltre, se $a\mathbf{z}^Q$ è un monomio con $|Q| \le k$ e $a \in \mathbb{C}$, si ha

$$\pi_k(X)(a\mathbf{z}^Q)) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|P|\le k, |Q|\le k \\ |Q+P-e_j|\le k}} X_{j,P} \, a \, q_j \, \mathbf{z}^{Q+P-e_j}. \tag{4.3.4}$$

Siccome tutti i monomi di $\rho_k(f)$ sono della forma $f_Q\mathbf{z}^Q$ con $|Q| \le k$, da (4.3.3) e (4.3.4) segue $\rho_k(X(f)) = \pi_k(X)(\rho_k(f))$.

Ne segue

$$\begin{aligned} 0 &= \pi_k(X)^{\mathrm{s}}(\rho_k(f)) \\ &= \pi_k(X^{\mathrm{s}})(\rho_k(f)) \\ &= \rho_k(X^{\mathrm{s}}(f)), \end{aligned}$$

ossia $X^{\mathrm{s}}(f) = O(|\mathbf{z}|^k)$, da cui segue che per ogni $j = 1, \ldots, n$, si ha $Z_j(f) = O(|\mathbf{z}|^k)$.

Inoltre, se X è in forma normale di Poincaré-Dulac, da quanto sopra segue che se f è un integrale primo di X, allora per ogni intero positivo k, si ha $X^{\mathrm{s}}(f) = O(|\mathbf{z}|^k)$, che implica che f è un integrale primo di X^{s}. Dunque, se $f = \sum_{|Q|\ge 0} f_Q\mathbf{z}^Q$, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= X^{\mathrm{s}}(f) \\ &= \sum_{h=1}^{r} \alpha^h Z_h(f) \\ &= \sum_{h=1}^{r} \alpha^h \left(\sum_{j=1}^{n} \rho_h^j z^j \partial_j(f) \right). \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Poiché vale

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \rho_h^j z^j \partial_j(f) &= \sum_{j=1}^{n} \rho_h^j z^j \partial_j \left(\sum_{|Q|\geq 0} f_Q \mathbf{z}^Q \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \rho_h^j z^j \sum_{|Q|\geq 0} f_Q q_j \frac{\mathbf{z}^Q}{z^j} \\
&= \sum_{|Q|\geq 0} f_Q \mathbf{z}^Q \sum_{j=1}^{n} \rho_h^j q_j \\
&= M_h f,
\end{aligned}$$

dove M_h è un numero intero, (4.3.5) diventa

$$0 = \left(\sum_{h=1}^{r} \alpha^h M_h \right) f.$$

Quindi, grazie all'indipendenza razionale di $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, gli M_h sono tutti nulli, ossia f è integrale primo di ciascuno degli Z_h. $\square$

Ricordiamo la seguente definizione, ispirata a [Ku] pag. 116.

Definizione 4.3.4. Dati un sottospazio analitico S di $\mathbb{C}^n$ di codimensione complessa superiore o uguale a 1 ed un suo punto p, l'intorno

$$H_m(S, p) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : d(\mathbf{z}, S) \leq d(\mathbf{z}, p)^m\},$$

con m intero positivo, è detto *intorno di S di tipo horn in p di ordine m.*

Teorema 4.3.5. (Zung, 2005) *Siano (ε_d) un'arbitraria successione di numeri positivi convergente verso 0 e S un sottospazio analitico di $\mathbb{C}^n$ contenente l'origine, di codimensione complessa superiore o uguale a 1. Allora ogni funzione olomorfa limitata in $U = \bigcup_{d=1}^{\infty} U_d$, dove U_d coincide con l'insieme $\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : |\mathbf{z}| < \varepsilon_d,\ d(\mathbf{z}, S) > |\mathbf{z}|^d\}$, ammette un'estensione olomorfa in un intorno dell'origine di $\mathbb{C}^n$.*

Dimostrazione. Se n è uguale a 1, allora la tesi è ovvia; possiamo quindi supporre che n sia superiore o uguale a 2. Senza ledere la generalità, possiamo inoltre supporre che S sia un'ipersuperficie singolare. La dimostrazione consta di due parti.

(I) Supponiamo che S sia contenuta nell'unione degli iperpiani coordinati, ossia in $\bigcup_{j=1}^{n} \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : z^j = 0\}$, dove $\mathbf{z} = (z^1, \ldots, z^n)$ è un sistema di coordinate locale olomorfo. Ne segue che, per ogni $\mathbf{z}$ in $\mathbb{C}^n$, la distanza di $\mathbf{z}$ da S sarà superiore o uguale al minimo di $\{|z^1|, \ldots, |z^n|\}$.

Sia $\varepsilon_d < 1$, con $d \geq 2$, un elemento della successione data. Siccome la successione (ε_d) coverge verso 0, esiste un indice $d \geq 2$ per cui esista un intero positivo m strettamente compreso tra $\sqrt{n}/\varepsilon_d$ e ε_d^{1-d}. Consideriamo il seguente prodotto di corone circolari

$$C = \prod_{j=1}^{n} \left\{ \frac{\varepsilon_d}{m} < |z^j| < \frac{1}{m} \right\}.$$

Se $\mathbf{z}$ appartiene a C, allora verifica

$$|\mathbf{z}| = \left(|z^1|^2 + \cdots + |z^n|^2\right)^{1/2} < \left(\frac{1}{m^2} + \cdots + \frac{1}{m^2}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{n}}{m},$$

da cui segue $|\mathbf{z}| < \varepsilon_d$ in quanto abbiamo scelto m maggiore di $\sqrt{n}/\varepsilon_d$; inoltre, dato che S è contenuta nell'unione degli iperpiani coordinati, si ha

$$d(\mathbf{z}, S) \geq \min\{|z^1|, \ldots, |z^n|\} > \frac{\varepsilon_d}{m},$$

da cui segue $d(\mathbf{z}, S) > |\mathbf{z}|^d$, grazie alla diseguaglianza $|\mathbf{z}| < \varepsilon_d$ e al fatto che, poiché m è minore di ε_D^{1-d}, si ha $\varepsilon_d/m \geq \varepsilon_d^d$. Quindi ogni $\mathbf{z}$ appartenente a C appartiene all'insieme $U_d = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : |\mathbf{z}| < \varepsilon_d,\, d(\mathbf{z}, S) > |\mathbf{z}|^d\}$, ossia U contiene un prodotto di corone circolari non vuote del tipo $\eta^j < |z^j| < \eta'^j$, in cui f sarà dunque definita da una serie di Laurent in $z^1, \ldots, z^n$.

Vogliamo studiare il dominio di convergenza di tale serie di Laurent, usando il fatto che il dominio di convergenza di una serie di Laurent è logaritmicamente convesso (vedi [Sh] pag. 31).

Denotiamo con π l'applicazione di $(\mathbb{C}^*)^n$ in $\mathbb{R}^n$ che ad ogni punto $(z^1, \ldots, z^n)$ associa $(\log|z^1|, \ldots, \log|z^n|)$, e sia

$$E = \{\mathbf{r} = (r^1, \ldots, r^n) \in \mathbb{R}^n : \pi^{-1}(\mathbf{r}) \subset U\}.$$

Denotiamo con $\tilde{E}$ l'inviluppo convesso di E in $\mathbb{R}^n$. Siccome f è olomorfa e limitata su $\pi^{-1}(E)$, può essere estesa a una funzione olomorfa e limitata su $\pi^{-1}(\tilde{E})$. D'altra parte, dalla definizione di U, segue che esiste una successione di numeri positivi $(K_d)_{d\in\mathbb{N}}$ tendente all'infinito per cui, posto

$$E_d = \{(r^1, \ldots, r^n) \in \mathbb{R}^n : r^j < -K_d \ (\forall j),\ r^j > d\, r^i \ (\forall j \neq i)\},$$

si ha che E contiene $\bigcup_{d\geq 1} E_d$. Infatti se $\mathbf{z}$ appartiene a U_d allora poiché per $j = 1, \ldots, n$ si ha $|z^j| \leq |\mathbf{z}|$, si ha $|z^j| \leq |\mathbf{z}| \leq \varepsilon_d$ e, grazie al fatto che il logaritmo è una funzione crescente, si ha $\log|z^j| \leq \log|\mathbf{z}| \leq \log\varepsilon_d$, ossia

$$r^j \leq -K_d,$$

dove $K_d = -\log\varepsilon_d$ è un numero positivo e la successione K_d diverge all'infinito, in quanto ε_d converge verso zero. Inoltre poiché S è contenuta nell'unione degli iperpiani coordinati e contiene l'origine, per ogni coppia di indici j, i con i diverso da j, si ha

$$|z^j| \geq d(\mathbf{z}, S) > |\mathbf{z}|^d \geq |z^i|^d,$$

quindi $\log|z^j| > \log|z^i|^d$, ossia

$$r^j > d\, r^i.$$

L'inviluppo convesso dell'unione degli E_d deve contenere tutti i segmenti congiungenti un punto di E_2 con un punto di E_d per ogni d maggiore di 2, quindi contiene un insieme del tipo

$$\{(r^1, \ldots, r^n) \in \mathbb{R}^n : r^j < -K \ (\forall j)\}.$$

Questo implica che f può essere estesa ad una funzione olomorfa e limitata nell'intersezione di $(\mathbb{C}^*)^n$ con un intorno $\mathcal{U}$ dell'origine di $\mathbb{C}^n$; siccome la funzione estesa è limitata su detta intersezione, può essere ulteriormente estesa, grazie al Teorema di estensione di Riemann (vedi [GR] pag. 19), a tutto $\mathcal{U}$ e questo conclude il primo passo della dimostrazione.

(II) Consideriamo ora il caso generale con S arbitraria. A meno di applicare il Teorema di desingolarizzazione di Hironaka (vedi [Hi] oppure, per una dimostrazione nel caso di un'ipersuperficie complessa, [BM2]), possiamo supporre che S sia liscia. Inoltre, poiché dovremo sempre tener conto del divisore eccezionale, dopo il processo di desingolarizzazione avremo una varietà che può avere attraversamenti normali (normal crossings). Più precisamente, abbiamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} Q & \subset & S' & \subset & M \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\ 0 & \in & S & \subset & (\mathbb{C}^n, 0) \end{array}$$

dove $(\mathbb{C}^n, 0)$ denota il germe di $\mathbb{C}^n$ in 0; M è una varietà complessa di dimensione n; la proiezione p è suriettiva ed è iniettiva fuori dal divisore eccezionale; S' denota l'unione del divisore eccezionale con la trasformata stretta di S, una sottovarietà liscia propria di M che desingolarizza S, e le uniche singolarità in S' sono attraversamenti normali (normal crossings); Q è la controimmagine dell'origine ossia $p^{-1}(0)$ ed è un compatto. Inoltre M è ottenuta da $(\mathbb{C}^n, 0)$ tramite un numero finito di scoppiamenti lungo sottovarietà (per una definizione di scoppiamento lungo una sottovarietà vedi [GH] pp. 602–604).

Denotiamo con U' la controimmagine di U tramite la proiezione p; allora possiamo sollevare f e ottenere una funzione olomorfa limitata f' su U'. Il complementare di U è

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n \setminus U &= \mathbb{C}^n \setminus \left(\bigcup_{d \geq 1} U_d \right) \\ &= \bigcap_{d \geq 1} (\mathbb{C}^n \setminus U_d) \\ &= \bigcap_{d \geq 1} \left(\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : |\mathbf{z}| \geq \varepsilon_d\} \cup \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : d(\mathbf{z}, S) \leq |\mathbf{z}|^d\} \right), \end{aligned}$$

quindi contiene $\bigcap_{d \geq 1} H_d(S, 0)$, dove $H_d(S, 0)$ è l'intorno di S horn nell'origine di ordine d. Consideriamo un punto di Q e scriviamo la proiezione p come $\mathbf{z} = p(\mathbf{w})$, dove $\mathbf{z} = (z^1, \ldots, z^n)$ e $\mathbf{w} = (w^1, \ldots, w^n)$ sono coordinate locali tali che ogni componente del divisore eccezionale coincida con $\{w_j = 0\}$ per qualche j (in particolare anche la trasformata stretta di S sarà un sottospazio coordinato). Possiamo supporre che il primo scoppiamento σ abbia centro l'origine. Nelle coordinate scelte si ha $\sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^n)$ e, analogamente, $p = (p^1, \ldots, p^n)$. Allora, dopo il primo scoppiamento σ, l'ideale generato da $\sigma^1, \ldots, \sigma^n$ è (localmente) un ideale principale generato dal divisore eccezionale. Ne segue che, alla fine del processo di risoluzione delle singolarità, l'ideale generato da $p^1, \ldots, p^n$ sarà un ideale principale generato da un monomio $\mathbf{w}^\alpha = (w^1)^{\alpha_1} \cdots (w^n)^{\alpha_n}$ nei divisori eccezionali w^j. In particolare, esiste una costante positiva C_1 per cui vale la seguente diseguaglianza

$$|p(\mathbf{w})| \leq C_1 |\mathbf{w}^\alpha|.$$

D'altra parte si ha $S' = p^{-1}(S)$, quindi $d(\mathbf{w}, S')$ e $d(p(\mathbf{w}), S)^\rho$ sono funzioni subanalitiche come funzioni di $\mathbf{w}$ che hanno lo stesso luogo di zeri, ne segue, grazie al Teorema 3.3.5, che esistono una costante positiva C_2 e un elemento ρ di $\mathbb{Z}$ per cui si ha

$$d(\mathbf{w}, S') \leq C_2\, d(p(\mathbf{w}), S)^\rho.$$

Ne segue che se vale $\mathbf{z} = p(\mathbf{w})$ e $d(\mathbf{z}, S) \leq |\mathbf{z}|^m$, allora abbiamo

$$d(\mathbf{w}, S') \leq C_2\, |p(\mathbf{w})|^{m\rho} \leq C_1 C_2\, |\mathbf{w}|^{m\rho|\alpha|}.$$

Quindi, per ogni punto p di Q esiste un numero intero τ tale che la controimmagine di un intorno horn $H_m(S, 0)$ di ordine m è contenuta in un intorno horn $H_{m\tau}(S', p)$ di ordine $m\tau$. Poiché la controimmagine di un intorno dell'origine è un intorno di Q, ne segue che il complementare di U' è della stessa forma di quello di U. Dato che S' ha solo attraversamenti normali (normal crossings), la coppia (U', S') verifica le condizioni del passo precedente (I), perciò possiamo estendere olomorficamente f' in un intorno di x in M. Grazie alla compattezza di Q, possiamo estendere olomorficamente f' in un intorno di Q in M e possiamo infine proiettare quest'ultima estensione su $(\mathbb{C}^n, 0)$ ottenendo, a meno di applicare nuovamente il Teorema di Riemann (si veda [GR] pag. 19), un'estensione olomorfa di f in un intorno dell'origine. □

Abbiamo finalmente tutti gli strumenti per dimostrare il prossimo risultato che ci dice che un campo vettoriale di $\mathfrak{X}_n$ integrabile ammette sempre una normalizzazione di Poincaré-Dulac convergente.

Teorema 4.3.6. (Zung, 2002) *Sia X un campo vettoriale locale olomorfo in $(\mathbb{C}^n, 0)$, con $X(0) = 0$ integrabile. Allora esiste una normalizzazione di Poincaré-Dulac locale olomorfa per X in un intorno di 0 in $\mathbb{C}^n$.*

Dimostrazione. Sia r il grado torico di X. Per dimostrare il teorema, basta trovare, grazie al Teorema 4.1.13, un'azione θ di $\mathbb{T}^r$ su $(\mathbb{C}^n, 0)$ che preservi X e tale che la parte semi-semplice di X appartenga alla sottoalgebra abeliana $\mathfrak{h}_s^\theta$.

Fissiamo un sistema di coordinate olomorfo $\mathbf{z} = (z^1, \ldots, z^n)$ in $\mathbb{C}^n$, una metrica hermitiana standard su $\mathbb{C}^n$ e un numero positivo ε_0 abbastanza piccolo. Sia S il luogo singolare dell'n-upla di vettori e funzioni $X_1, \ldots, X_m, f_1, \ldots, f_{n-m}$, ossia

$$\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : |\mathbf{z}| < \varepsilon_0,\, X_1 \wedge \cdots \wedge X_m(\mathbf{z}) = 0\} \cup \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : |\mathbf{z}| < \varepsilon_0,\, \mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_{n-m}(\mathbf{z}) = 0\}.$$

Grazie alle ipotesi, S è un insieme analitico complesso di codimensione complessa almeno 1, quindi si potrà scrivere come luogo di zeri di un numero finito di funzioni olomorfe, $S = \{g_1 = 0, \ldots, g_h = 0\}$, e, grazie al Teorema di Łojasiewicz 3.3.2, esistono un intero positivo $N > 0$ ed una costante $C > 0$ tali che, per ogni $\mathbf{z}$ con $|\mathbf{z}| < \varepsilon_0$ valgano le seguenti diseguaglianze di Łojasiewicz

$$\begin{aligned} \|X_1 \wedge \cdots \wedge X_m(\mathbf{z})\| &\geq C\, d(\mathbf{z}, S)^N \\ \|\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_{n-m}(\mathbf{z})\| &\geq C\, d(\mathbf{z}, S)^N, \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

dove le norme sono delle norme standard negli spazi considerati e la distanza è la distanza rispetto alla metrica euclidea.

Per ogni intero positivo d e per ogni numero positivo piccolo $\varepsilon(d)$ (che si potrà scegliere successivamente in funzione di d in modo che $\lim_{d\to\infty} \varepsilon(d) = 0$), definiamo il seguente sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}^n$

$$U_{d,\varepsilon(d)} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : |\mathbf{z}| < \varepsilon(d),\, d(\mathbf{z}, S) > |\mathbf{z}|^d\}.$$

Per ogni $k = 1, \ldots, r$ definiremo un campo vettoriale olomorfo $\mathcal{Z}_k$ in $U_{d,\varepsilon(d)}$, tale che $i\mathcal{Z}_k$ sia un campo vettoriale periodico di periodo 2π, e in modo che, per ogni coppia di numeri naturali distinti d_1, d_2, il campo vettoriale $\mathcal{Z}_k$ definito per $U_{d_1,\varepsilon(d_1)}$ coincida, sull'intersezione $U_{d_1,\varepsilon(d_1)} \cap U_{d_2,\varepsilon(d_2)}$, con quello definito per $U_{d_2,\varepsilon(d_2)}$.

Sia $(z_d^j) = \Phi^{D(d)}(z^j)$ il cambiamento di coordinate che si ottiene componendo i cambi di coordinate del metodo di approssimazioni successive della dimostrazione del Teorema di Poincaré-Dulac che normalizzano X fino all'ordine $D(d)$, dove $D(d) = 4dN + 2$ (in particolare si ha che $\lim_{d\to\infty} D(d) = +\infty$).

Sia

$$Z_k^d = \sum_{j=1}^{n} \rho_k^j z_d^j \partial_j^d, \quad k = 1, \ldots, r$$

dove $\partial_j^d = \frac{\partial}{\partial z_d^j}$, una r-upla di campi vettoriali torici associati a X rispetto alle coordinate locali (z_d^j). In particolare, iZ_k^d è un campo vettoriale olomorfo periodico di periodo 2π per ogni $k = 1, \ldots, r$. Per il Lemma 4.3.3, si ha

$$[Z_k^d, X_j](\mathbf{z}) = O(|\mathbf{z}|^{D(d)})$$

per ogni $j = 1, \ldots, m$, e

$$Z_k^d(\mathbf{f})(\mathbf{z}) = O(|\mathbf{z}|^{D(d)})$$

dove con $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_{n-m})$ denotiamo la $(n-m)$-upla di integrali primi comuni dei campi vettoriali $X_1, \ldots, X_m$.

Sia y un punto arbitrario di $U_{d,\varepsilon(d)}$. Allora, grazie alle diseguaglianze (4.3.6) e alla definizione di $U_{d,\varepsilon(d)}$, si ha

$$\begin{aligned} \|X_1 \wedge \cdots \wedge X_m(y)\| &\geq C\, |y|^{dN} \\ \|\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_{n-m}(y)\| &\geq C\, |y|^{dN}. \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Denotiamo con $\Gamma_k^d(t,y) = \Gamma_k^d(t)$ la curva chiusa, $t \in [0,2\pi]$, che è l'orbita del campo vettoriale periodico $\mathrm{Re}(iZ_k^d)$ di punto iniziale y. Quindi $\Gamma_k^d(0) = y$ e, preso $\varepsilon(d)$ abbastanza piccolo, vale $\frac{1}{2}|y| \le |\Gamma_k^d(t)| \le 2|y|$ per ogni t in $[0,2\pi]$. Allora, per ogni x in Γ_k^d si ha

$$\begin{aligned} \|X_1 \wedge \cdots \wedge X_m(x)\| &> \frac{C}{2^{dN}}\,|y|^{dN} \\ \|\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_{n-m}(x)\| &> \frac{C}{2^{dN}}\,|y|^{dN}. \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Dal fatto che Z_k^d commuta con $X_1, \ldots, X_m$ fino all'ordine $D(d)$ e $\mathbf{f}$ è integrale primo di Z_k^d fino all'ordine $D(d)$, e $\varepsilon(d)$ piccolo, seguono le diseguaglianze seguenti

$$\begin{aligned} &|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(y)| < |y|^{D_1(d)} \\ &|[X_j, Z_k^d](x)| < |y|^{D_1(d)} \quad \forall j = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

per ogni punto x della curva Γ_k^d, dove $D_1(d) = dN + 3$, quindi è maggiore di $dN+2$ e verifica $D_1(d) < D(d) - 1 = 4dN + 1$ per ogni d. Infatti si ha

$$|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(y)| \le |Z_k^d(\mathbf{f})(y)| \le C_1 |y|^{D(d)} < |y|^{D_1(d)}$$

e, per ogni $j = 1, \ldots, n$, si ha

$$|[X_j, Z_k^d](x)| \le C_2 |x|^{D(d)} \le 2^{D(d)} C_2 |y|^{D(d)} < |y|^{D_1(d)}.$$

Le diseguaglianze (4.3.8) e (4.3.9) implicano i seguenti fatti.

a) Per ogni punto y la parte regolare dell'insieme di livello $L_y = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(y))$ ha dimensione complessa m, e il suo spazio tangente in ogni punto è generato da $X_1, \ldots, X_m$. Inoltre la parte regolare di L_y ha una struttura affine piatta data dai campi vettoriali $X_1, \ldots, X_m$, perché questi campi vettoriali commutano.

b) La curva Γ_k^d può essere proiettata ortogonalmente su una curva chiusa liscia $\hat{\Gamma}_k^d(t)$ che giace su L_y ed è vicina a Γ_k^d nella topologia C^1: la distanza da $\hat{\Gamma}_k^d$ a Γ_k^d nella topologia C^1 è maggiorata da $|y|^{D_2(d)}$, dove $D_2(d) = dN + 1$.

c) Se scriviamo $\mathrm{d}\hat{\Gamma}_k^d(t)/\mathrm{d}t$ nella forma $\sum_{j=1}^m \mathrm{Re}(a_k^j(t) X_j(\hat{\Gamma}_k^d(t)))$, allora le funzioni complesse $a_k^j(t)$ sono quasi costanti, nel senso che

$$|a_k^j(t) - a_k^j(0)| \le |y|^{D_3(d)},$$

per $t \in [0,2\pi]$, dove $D_3(d)$ è positivo, ad esempio $D_3(d) = D_2(d) - 1 = dN$. Questo segue dalla quasi commutatività di $X_1, \ldots, X_m$ con Z_k^d e dal fatto che, per il punto b), si ha $|\mathrm{d}\hat{\Gamma}_k^d(t)/\mathrm{d}t - \mathrm{Re}(iZ_k^d(\hat{\Gamma}_k^d(t)))| < |y|^{D_2(d)}$. Infatti, poiché i campi $X_1, \ldots, X_m$ commutano, in un opportuno sistema di coordinate $z^1, \ldots, z^n$ possiamo supporre che ciascun X_j coincida con ∂_j per $j = 1, \ldots, m$. Scriviamo Z_k^d nella forma $\sum_{j=1}^n f^j(\mathbf{z})\partial_j$ in questo sistema di coordinate. Siccome Z_k^d quasi-commuta con $X_1, \ldots, X_m$ ed è quasi tangente agli insiemi di livello, le funzioni $f^1, \ldots, f^m$ sono quasi costanti lungo l'orbita di Z_k^d in questione mentre $f^{m+1}, \ldots, f^n$ sono quasi nulle. Proiettando quindi sull'insieme di livello, tali funzioni restano quasi costanti.

d) Approssimando, grazie al teorema della funzione implicita, esistono dei numeri complessi $a_k^1, \ldots, a_k^m$ tali che si abbia $|a_k^j - a_k^j(0)| \leq |y|^{D_3(d)}$, e il flusso al tempo 2π del campo vettoriale $\sum_{j=1}^m a_k^j X_j$ su L_y fissi il punto y. Quindi il campo vettoriale reale $\mathrm{Re}(\sum_{j=1}^m a_k^j X_j)$ ha un'orbita periodica di periodo 2π che passa per y, e la sua orbita è C^1-vicina a $\hat{\Gamma}_k^d(t, y)$.

e) Grazie alla struttura affine piatta di L_y, i numeri $a_k^1, \ldots, a_k^m$ sono ben definiti, ossia unici, e non dipendono, almeno localmente, dalla scelta di y in L_y. Possiamo considerare $a_k^1, \ldots, a_k^m$ come funzioni di y: $a_k^1(y), \ldots, a_k^m(y)$. Queste funzioni sono olomorfe, per il teorema della funzione implicita olomorfo, sono costanti sulle componenti connesse degli insiemi di livello di $\mathbf{f}$ in $U_{d,\varepsilon(d)}$ e sono uniformemente limitate in $U_{d,\varepsilon(d)}$ da una costante, provvisto che $\varepsilon(d)$ sia piccolo abbastanza.

Definiamo adesso, per ogni $k = 1, \ldots, r$, il campo vettoriale $\mathcal{Z}_k$ nel modo seguente

$$\mathcal{Z}_k(y) = -i \sum_{j=1}^m a_k^j(y) X_j(y).$$

Allora ogni $\mathcal{Z}_k$ è un campo vettoriale olomorfo in $U_{d,\varepsilon(d)}$ con le seguenti proprietà:

(a) $\mathcal{Z}_k$ è uniformemente limitato da una costante, e $i\mathcal{Z}_k$ è un campo vettoriale periodico di periodo 2π, almeno in un sottoinsieme aperto di $U_{d,\varepsilon(d)}$.

(b) Se $\mathcal{Z}_k$ è un campo vettoriale definito come prima per $U_{d,\varepsilon(d)}$, e $\mathcal{Z}_k'$ è un campo vettoriale definito come prima ma per $U_{d',\varepsilon(d')}$, con d diverso da d', allora $\mathcal{Z}_k$ coincide con $\mathcal{Z}_k'$ sull'intersezione $U_{d,\varepsilon(d)} \cap U_{d',\varepsilon(d')}$. Infatti, il campo $\mathcal{Z}_k$ commuta con $\mathcal{Z}_k'$ su $U_{d,\varepsilon(d)} \cap U_{d',\varepsilon(d')}$ per costruzione, e la differenza $\mathcal{Z}_k - \mathcal{Z}_k'$ è tangente all'insieme di livello di $\mathbf{f}$ in $U_{d,\varepsilon(d)} \cap U_{d',\varepsilon(d')}$ ed è un campo vettoriale costante rispetto alla struttura affine piatta su ogni insieme di livello. Inoltre $i(\mathcal{Z}_k - \mathcal{Z}_k')$ è periodico di periodo 2π sull'intersezione considerata; ma i coefficienti di $\mathcal{Z}_k - \mathcal{Z}_k'$, scritti come combinazione lineare di $X_1, \ldots, X_m$, sono maggiorati da $|y|^{\min(D_3(d), D_3(d'))}$, perciò $i(\mathcal{Z}_k - \mathcal{Z}_k')$ è troppo piccolo per essere periodico di periodo 2π a meno che non sia nullo. Quindi $\mathcal{Z}_k = \mathcal{Z}_k'$ in $U_{d,\varepsilon(d)} \cap U_{d',\varepsilon(d')}$.

Quindi abbiamo definito r campi vettoriali olomorfi e limitati $\mathcal{Z}_1, \ldots, \mathcal{Z}_r$ sull'aperto $U = \bigcup_{d=1}^{\infty} U_{d,\varepsilon(d)}$, che commutano a due a due, in quanto sono costanti su ogni L_y rispetto alla struttura affine piatta. Inoltre $i\mathcal{Z}_1, \ldots, i\mathcal{Z}_r$ sono periodici di periodo 2π almeno in qualche sottoinsieme aperto. Per il Teorema 4.3.5, esistono r campi vettoriali olomorfi in un intorno dell'origine in $\mathbb{C}^n$ che coincidono con $i\mathcal{Z}_1, \ldots, i\mathcal{Z}_r$ su U.

Quindi abbiamo trovato i generatori di un'azione effettiva di un toro di dimensione r che preserva $X_1 = X$ e $X_2, \ldots, X_m$. Grazie al procedimento di approssimazione, la parte lineare di ogni $\mathcal{Z}_k$ coincide con quella di Z_k^d per ogni d, quindi la parte semisemplice di X appartiene a $\mathfrak{h}_{\mathrm{s}}^{\theta}$, da cui segue la tesi. $\square$

Teorema 4.3.7. (Zung, 2002) *Ogni m-upla di campi vettoriali olomorfi in un intorno dell'origine di $\mathbb{C}^n$, ($n \geq m \geq 1$), singolari nell'origine di $\mathbb{C}^n$, che commutino a due a due, siano linearmente indipendenti e abbiano $n-m$ integrali primi olomorfi funzionalmente indipendenti, ammette una normalizzazione simultanea di Poincaré-Dulac convergente.*

Dimostrazione. Dalle ipotesi segue ciascuno dei campi vettoriali considerati è integrabile; quindi, per la dimostrazione del teorema precedente, ciascuno di detti campi vettoriali è olomorficamente normalizzato dalla linearizzazione di un'azione di toro su $(\mathbb{C}^n, 0)$. Inoltre, per costruzione, tutte queste azioni commutano l'una con l'altra e preservano tutti i campi vettoriali. Combinando dunque tali azioni ne otteniamo una la cui linearizzazione olomorfa sarà una normalizzazione olomorfa simultanea dei campi vettoriali dati e questo conclude la dimostrazione. $\square$

Bibliografia

[Ab] M. Abate: "Geometria", McGraw-Hill Libri Italia, Milano, 1996.

[Ar] V.I. Arnold: "Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations", Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[AM] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald: "Introduction to Commutative Algebra", Addison-Wesley, London, 1969.

[BM1] E. Bierstone, P.D. Milman: *Semianalytic and subanalytic sets*, IHES Publicationes Mathemathiques **67**, (1988), pp. 5–42.

[BM2] E. Bierstone, P.D. Milman: *Resolution of singularities*, in *Several Complex Variables* (Berkeley, CA, 1995–1996), Math. Sci. Res. Inst. Publ. **37**, Cambridge University Press, Cambridge, (1999), pp. 43–70.

[BCR] J. Bochnak, M. Coste, M.F. Roy: "Real Algebraic Geometry", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.

[Boc] S. Bochner: *Compact Groups of Differentiable Tranformation*, Annals of Mathematics (2), **46**, **3** (1945), pp. 372–381.

[Bou1] N. Bourbaki: "Elements of Mathematics, Theory of Sets", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1968.

[Bou2] N. Bourbaki: "Elements of Mathematics, Lie Groups and Lie Algebras - Chapters 1–3", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1975.

[Bre] G.E. Bredon: "Introduction to compact transformation groups", Academic Press, New York, 1972.

[Brj] A.D. Brjuno: *Analytical form of differential equations, I,* Trans. Moscow Math. Soc. **25**, (1972), pp. 131–288.

[BtD] T. Bröcker, T. tom Dieck: "Representations of Compacts Lie Groups", Springer-Verlag, New York, 1985.

[Ch] C. Chevalley: "Theorie des groupes de Lie", Hermann, Paris, 1968.

[DNF] B.A. DUBROVIN, S.P. NOVIKOV, A.T. FOMENKO: "Geometria Contemporanea 1 - Geometria delle superfici, dei gruppi di tresformazioni e dei campi", Editori Riuniti, Roma, Edizioni MIR, Mosca, 1987.

[Du] H. DULAC: *Recherches sur les points singuliers des équationes différentielles*, J. École polytechnique II série cahier IX, (1904), pp. 1–125.

[GH] P. GRIFFITHS, J. HARRIS: "Principles of algebraic geometry", Wiley-Interscience, New York, 1978.

[GR] R.C. GUNNING, H. ROSSI: "Analytic Function of Several Complex Variables", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1965.

[Hi] H. HIRONAKA: *Desingularization of complex-analytic varieties*, Actes du Congrés International des Mathématiciens, Tome 2, Guthier-Villars, Paris, (1971), pp. 627–631.

[Hu] J.E. HUMPHREYS: "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory", Springer-Verlag, New York, 1972.

[Ja] N. JACOBSON: "Lie Algebras", ripubblicazione dell'originale del 1962, Dover Publications, Inc., New York, 1979.

[Ku] T.C. KUO: *Characterizations of v-sufficiency of jets*, Topology **11**, (1972), pp. 115–131.

[LD] E. LE DONNE: "Viaggio atraverso i piccoli divisori: Normalizzazione di oggetti locali", Tesi di Laurea, 2004.

[Le] J.M. LEE: "Introduction to Smooth Manifolds", Springer-Verlag, New York, 2002.

[Ło] S. ŁOJASIEWICZ: "Introduction to Complex Analytic Geometry", Birkhäuser-Verlag, Basel, 1991.

[Ma] S. MARMI: "An introduction to small divisors problems", I.E.P.I., Pisa, 1999.

[Po] H. POINCARÉ: "Œuvres, Tome I", Gauthier-Villars, Paris, 1928, pp. XXXVI–CXXIX.

[Sh] B.V. SHABAT: "Introduction to complex analysis (part II: Functions of several variables)", American Mathem. Soc., Providence, 1992.

[Zu1] N.T. ZUNG: *Convergence versus integrability in Poincaré-Dulac normal form*, Math. Res. Lett. **9**, 2-3, (2002), pp. 217–228.

[Zu2] N.T. ZUNG: *Convergence versus integrability in Birkhoff normal form*, Annals of Mathematics (2), **161**, **1**, (2005), pp. 141–156.

[Zu3] N.T. ZUNG: *Torus actions and integrable systems*, Preprint 2004, in corso di pubblicazione in un libro edito da A. Bolsinov, A. Fomenko e A. Oshemkov, (2005).