Sujets de projets tutorés L3 parcours mathématiques fondamentales

2025-2026

Table des matières

Sujet 1

Les construction de Singer, Bose et Rusza d'ensembles de Sidon

Sujet proposé par Éric Balandraud

eric.balandraud@math.u-bordeaux.fr

Dans un groupe abélien, un ensemble de Sidon est un ensemble A tel que quels que soient x, y, z, t dans A, on ait :

$$x + y = z + t \Longrightarrow \{x, y\} = \{z, t\}.$$

Autrement dit : toutes les sommes de deux éléments de A sont distinctes. Si le groupe est fini, on veut construire des ensembles de Sidon les plus gros possibles.

L'objet de ce projet est de comprendre certaines constructions d'ensembles de Sidon, qui sont de tailles maximales. Ces constructions se basent sur les propriétés algébriques et géométriques des corps finis.

Références

- "A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory" J. Singer, Trans. Amer. Math. Soc. 43(1938), 337-385.
- "An affine analogue of Singer's Theorem" R.C. Bose, J. Indian Math. Soc. 6 (1942), 1-15.
- "Solving a linear equation in a set of integers I" Rusza Acta Arithmetica, LXV 3(1993), 259-282.

Sujet 2

Le paradoxe de Banach-Tarski

Sujet proposé par Laurent Bessières

laurent.bessieres@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

Le théorème de Banach-Tarski (1924) affirme qu'il est possible de découper une boule unité de $\mathbb{R}^3$ en un nombre fini de parties et de les déplacer par des isométries (affines) de $\mathbb{R}^3$ afin de former *deux* boules unités disjointes.

Ce résultat paraît paradoxal car il semble qu'on double le volume de l'ensemble initial en faisant agir des isométries. La solution au « paradoxe » est que les parties ne sont pas mesurables.

Cet énoncé se généralise à $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, mais pas au plan $\mathbb{R}^2$. La construction utilise l'*axiome du choix*[1] et l'existence d'un *groupe libre*[2] d'isométries de $\mathbb{R}^3$.

Pré-requis : Notions élémentaires de théorie des groupes, géométrie vectorielle.

Références

[1] Stan Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Cambridge University Press.

[2] Karl Stromberg, *The Banach-Tarski paradox*, dans The American Mathematical Monthly, Vol. 86, No. 3 (Mar., 1979), pp. 151-161.

1. Pour tout ensemble X, il existe une fonction $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ tel que $f(A) \in A$ pour toute partie $A \subset X$ non vide.

2. Un groupe G est libre sur un sous-ensemble $S \subset G$ si tout élément de G s'écrit de façon unique comme produit réduit (*ie* et sans terme xx^{-1}) d'éléments de $S \cup S^{-1}$

Sujet 3

Théorèmes de métrisabilité

Sujet proposé par Laurent Bessières

laurent.bessieres@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

Il s'agit d'étudier plusieurs résultats sur la métrisabilité des espaces topologiques. Ils utilisent diverses notions de *séparation*. Soit X un espace topologique *séparé*. Alors X est *régulier* si un point et un fermé disjoints quelconques peuvent être séparés par des ouverts disjoints. L'espace X est *normal* si deux fermés disjoints quelconques peuvent être séparés par des ouverts disjoints.

— *Théorème de métrisabilité d'Urysohn* : Tout espace X *régulier* à base dénombrable est métrisable.
  Éléments de la preuve : Un espace régulier à base dénombrable est normal. Lemme d'Urysohn : soit $A, B \subset X$ fermés disjoints où X est normal, alors il existe $f : X \to [0, 1]$ continue telle que $f = 0$ sur A et $f = 1$ sur B. On plonge X dans un espace métrique.

— *Théorème de métrisabilité de Nagata-Smirnov* : X est métrisable si et seulement si il est régulier et à base dénombrablement localement finie [3].

— *Théorème de métrisabilité de Smirnov* : X est métrisable si et seulement si il est séparé, paracompact [4] et localement métrisable [5].

Pré-requis : Cours de topologie.

Références

[1] James R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ.

3. X une base de topologie qui s'écrit comme une union dénombrable $\mathcal{B} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n$ où chaque $\mathcal{B}_n$ est *localement fini* : chaque $x \in X$ a un voisinage qui n'intersecte qu'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{B}_n$.
4. Tout recouvrement ouvert a un sous-recouvrement *localement* fini.
5. Tout point a un voisinage métrisable.

Sujet 4

Corps cyclotomiques et le théorème de Chevalley-Bass

Sujet proposé par Yuri BILU

yuri@math.u-bordeaux.fr

Soit ζ_m une m-ième racine primitive de l'unité. Le m-ième *corps cyclotomique* $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ est le corps obtenu en ajoutant ζ_m au corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Supposons que $m = p^k$, où p est un nombre premier impair. Chevalley (1951) à observé le phénomène suivant : un nombre rationnel est une m-ième puissance dans $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ si et seulement s'il est une m-ième puissance dans $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}(\zeta_m)^m = \mathbb{Q}^m.$$

Pour m général ce n'est plus vrai : par exemple, $-4 = (1 + \zeta_4)^4$ est une 4ième puissance dans $\mathbb{Q}(\zeta_4)$, mais pas dans $\mathbb{Q}$. Quand même, Bass (1965) a obtenu une généralisation partielle du Théorème de Chevalley à m quelconque.

L'objectif de ce projet est d'étudier la notion de corps cyclotomiques et les théorèmes de Chevalley et de Bass mentionnés ci-dessus.

Pré-requis : Notions de base sur les groupes et les corps

Références

[1] Yu. Bilu, The Chevellay-Bass Theorem, https://arxiv.org/abs/2305.05041

[2] K. Conrad, Cyclotomic extensions, https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/galoistheory/cyclotomic.pdf

[3] K. Ireland, M. Rosen, *A classical introduction to modern number theory*, Grad. Texts in Math. 84, Springer-Verlag, New York, 1990.

Sujet 5

La marche aléatoire

Sujet proposé par Michel Bonnefont

Michel.Bonnefont@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

Le but de ce travail de TER est d'étudier la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ ou sur $\mathbb{Z}^d$. Pour ce travail, on étudiera la récurrence et la transience de la marche (savoir si elle repasse une infinité de fois en 0). On étudiera également pour la marche unidimensionnelle le problème de la ruine du joueur, la loi du temps d'atteinte d'un point, le principe de réflexion ainsi que le théorème du scrutin.

Comme première référence, on pourra utiliser le chapitre 2 de [1]

Références

[1] Chafaï, Djalil and Malrieu, Florent : *Recueil de modèles aléatoires* Mathématiques & Applications (Berlin) Vol 78. Springer-Verlag, Berlin (2016).

Sujet 6

Sous-groupes de Hall

Sujet proposé par Olivier Brinon

olivier.brinon@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

Soit G un groupe fini d'ordre n. Un *sous-groupe de Hall* de G est un sous-groupe H tel que $\mathsf{pgcd}(\#H, [G : H]) = 1$. Les sous-groupes de Sylow de G sont des cas particuliers de sous-groupes de Hall. Les théorèmes de Sylow assurent l'existence de p-Sylow pour tout nombre premier p : il est naturel de se demander si, étant donné un diviseur d de n tel que $\mathsf{pgcd}(d, n/d) = 1$, le groupe G contient toujours des sous-groupes de Hall d'ordre d. C'est faux en général, mais Hall a démontré que c'est le cas si on suppose le groupe G *résoluble*. Le but du projet est d'étudier la notion de résolubilité et démontrer les théorèmes de Hall.

Pré-requis : Structures algébriques 2.

Références

[1] I. M. Isaacs, *Finite group theory*, Graduate studies in mathematics **92**, AMS.

[2] J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, Graduate texts in mathematics **148**, Springer.

Sujet 7

Analyse de Fourier et Equations aux Dérivées Partielles

Sujet proposé par Vincent Bruneau

Vincent.Bruneau@math.u-bordeaux.fr

La transformée de Fourier est un outil important de l'étude des Equations aux Dérivées Partielles (EDP) aussi bien pour montrer l'existence de solutions que pour donner des propriétés de ces solutions. Pour étudier l'existence et le comportement, par rapport au temps, de solutions d'EDP d'évolution, nous introduirons des outils d'analyse de Fourier et les espaces de Sobolev adaptés. Nous nous intéresserons ensuite à quelques exemples d'q́uations d'évolution (la chaleur, les ondes, Schrödinger...).

Ce sujet fait appel à des notions d'intégration et d'analyse fonctionnelle/hilbertienne.

Sujet 8

Le protocole de vote en ligne Belenios

Sujet proposé par Guilhem Castagnos en L3 MI ou L3 MF

guilhem.castagnos@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

Belenios est un protocole de vote en ligne *open source* reposant sur de nombreux mécanismes cryptographiques afin de garantir des propriétés de confidentialité des votes et de vérification du résultat. Le cœur du protocole est le chiffrement à clef publique d'ElGamal qui permet de chiffrer les votes pour assurer la confidentialité tout en permettant des opérations sur les données chiffrées (propriété dite homomorphe). Suivant la filière (MI ou MF), on pourra s'intéresser aux objets mathématiques nécessaires à la mise en œuvre (courbes elliptiques et interpolation de Lagrange dans des corps finis pour la version dite à seuil d'ElGamal), à s'initier à certains outils cryptographiques utilisés dans Belenios (cryptographie à seuil, preuve à divulgation nulle de connaissances (*zero-knowledge*)) ou à une implantation réduite du protocole.

Références

[1] La page de Belenios, https ://www.belenios.org

[2] Une présentation haut niveau par Cortier, Gaudry, Glondu,
https ://www.belenios.org/slides-belenios.pdf

[3] Blake, Seroussi, Smart, *Elliptic Curves in Cryptography*

[4] Pedersen, *A Threshold Cryptosystem without a Trusted Party*,
https ://link.springer.com/content/pdf/10.1007/3-540-46416-6_47.pdf

Sujet 9

Compléments et contre-exemples en topologie

Sujet proposé par Andrea Fanelli

andrea.fanelli.1@u-bordeaux.fr

Ce projet consiste à approfondir les notions vues au cours de topologie, en étudiant des constructions et des résultats classiques. Le but est aussi d'étudier des exemples bizarres et pathologiques en topologie générale. Voici quelques sujets possibles.

(i) Compactifications de Alexandroff et de Stone-Čech ;

(ii) Complétion d'un espace métrique ;

(iii) Prébases et Théorème d'Alexander ;

(iv) Produits infinis et Théorème de Tyconoff.

Prérequis Notions élémentaires de topologie.

Référence

Lynn Arthur Steen, J. Arthur Seebach Jr., *Counterexamples in Topology*, Springer.

Sujet 10

Comprendre et implémenter l'algorithme PageRank

Sujet proposé par Bernhard Haak

bernhard.haak@math.u-bordeaux.fr

Modélisation du Web. On considère un ensemble de pages web numérotées $1, \ldots, n$. La matrice d'adjacence $A = (a_{ij})$ est définie par : $a_{ij} = 1$ si la page j pointe avec un hyperlien vers la page i, et 0 sinon. On construit ensuite une matrice colonne-stochastique

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\deg(j)} & \text{si la page } j \text{ pointe vers } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On modélise la navigation d'un internaute par un surfeur aléatoire. Il se trouve à un instant donné sur une page i, il suit un lien sortant vers une page j avec une probabilité uniforme, Cependant, certaines complications apparaissent :

- certaines colonnes peuvent être nulles (pages sans liens sortants),
- le graphe peut être réductible – en gros, le Web peut se comporter comme plusieurs “petits internets” qui s'ignorent mutuellement.

Pour y remédier, on autorise, avec une petite probabilité $1 - \alpha$, un saut vers une page quelconque (téléportation) selon une loi uniforme. Cette dynamique est alors décrite par une chaîne de Markov : un système où l'état suivant dépend uniquement de l'état courant. Mathématiquement, on fixe $\alpha \in (0, 1)$ (“facteur d'amortissement”), et l'on pose la matrice de Google :

$$G = \alpha P + \frac{1}{n}(1 - \alpha)\mathbf{1},$$

où $(\mathbf{1})_{j,k} = 1$ désigne la matrice de toutes les entrées égales à 1.
Ainsi, si le surfeur est distribué selon un vecteur de probabilités x à un instant donné, alors la distribution au pas suivant est Gx. Le “point fixe” $x^\star = Gx^\star$ est d'intérêt, car

- $x^\star$ est invariant par la dynamique du surfeur,
- c'est une distribution de probabilité d'équilibre,
- elle modélise la fréquence limite des visites : le pourcentage de clics qui dirigent vers la page i quand le nombre total de clics tend vers l'infini.

C'est exactement ce que PageRank cherche à mesurer : l'importance d'une page dans l'écosystème du Web. L'équation $Gx^\star = x^\star$ admet toujours une unique solution (contrairement à $Px = x$ pour une quelconque matrice colonne-stochastique P).

Dans ce projet, vous allez décrire l'idée et la modélisation, démontrer l'existence et l'unicité du point fixe, puis :

- générer un graphe aléatoire,
- implémenter l'algorithme en Python,
- tester plusieurs valeurs de α,
- visualiser les scores PageRank.

Références

[1] Langville & Meyer, *Google's PageRank and Beyond*, Princeton University Press, 2006.

[2] S. Vigna, *Spectral Ranking*, arXiv :0912.0238 (2010).

[3] S. Brin & L. Page, *The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine*, Computer Networks, 1998.

[4] Wikipedia : PageRank.

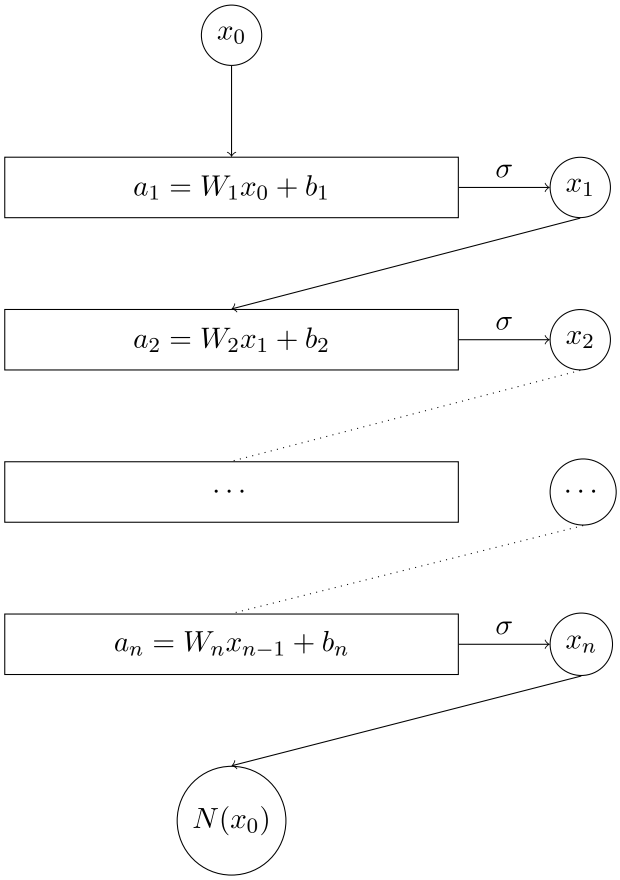
Sujet 11

Rétropropagation : introduction mathématique courte

Sujet proposé par Bernhard Haak

bernhard.haak@math.u-bordeaux.fr

On va s'intéresser à un réseau de neurones simple, découvrir le vocabulaire (couches, paramètres, fonctions d'activation), puis rappeler la règle de chaîne pour des fonctions vectorielles composées. Ceci permet d'établir la formule de rétropropagation à partir de la dérivation en chaîne. Concrètement :
L'idée d'un réseau de neurones entièrement connecté, est une application de la forme $x_0 \mapsto N(x_0)$



où les W_i sont des matrices, Chaque couche calcule d'abord une transformation affine $x_n = W_n x_{n-1} + b_n$, puis applique la fonction d'activation σ. La complexité (c'est-à-dire : le fait que n couches ont de meilleures capacités d'entraînement qu'une seule) provient uniquement de la fonction d'activation σ qui est non-linéaire et effectue une “troncature lisse” : ainsi une information trop petite d'une couche n'est pas transmise à la couche suivante. L'entraînement du système consiste à avoir une (grande) collection de données

$$D = \{(E_i, R_i) : i \in I\},$$

où E_i sont des entrées, R_i les réponses attendues, et à chercher à optimiser les coefficients des systèmes affines internes pour minimiser l'erreur quadratique moyenne sur la collection D :

$$\ell_i = \|N(E_i) - R_i\|^2, \qquad L(D) = \sum_{i \in I} \ell_i.$$

Pour ‘èntraîner”, donc améliorer les coefficients, c’est-à-dire : les adapter aux données présentes, on va d’abord comprendre comment fonctionne une “descente de gradient” pour approcher un minimum d’une fonction de plusieurs variables (c’est une partie élémentaire d’analyse numérique). Concrètement, on calcule

$$\frac{\partial L}{\partial W_k} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial L}{\partial b_k}$$

pour des paramètres (W_i, b_i) donnés, ce qui se fait grâce à la règle de la chaîne. Puis on met à jour les systèmes affines internes (avec un paramètre $\eta > 0$) :

$$W_i^{\text{nouv}} := W_i - \eta \frac{\partial L}{\partial W_i}, \qquad b_i^{\text{nouv}} := b_i - \eta \frac{\partial L}{\partial b_i}.$$

En practique, Rétropropagation utilise de sous-paquets D_i de D, et des astuces numeriques ; ceci est une version simplifié, pour illustration du principe. Néanmoins, on voit pourquoi le calcul différentiel – et en particulier la règle de dérivation en chaîne – est littéralement au cœur de l’apprentissage en intelligence artificielle moderne ....

Si le temps le permet, nous allons programmer un petit réseau expérimental et l’entraîner. (Ne vous attendez pas à un micro-chatgpt !)

Références

[1] D.E. Rumelhart, G.E. Hinton, R.J. Williams, *Learning representations by back-propagating errors*, Nature, 323 :533–536, 1986.

[2] Y. LeCun, L. Bottou, Y. Bengio, P. Haffner, *Gradient-based learning applied to document recognition*, Proc. IEEE, 86(11) :2278–2324, 1998.

[3] I. Goodfellow, Y. Bengio, A. Courville, *Deep Learning*, MIT Press, 2016.

[4] C. M. Bishop, *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer, 2006.

[5] M. Nielsen, *Neural Networks and Deep Learning*, online book, 2015, `http://neuralnetworksanddeeplearning.com/`

[6] CS231n : Convolutional Neural Networks for Visual Recognition, Stanford University, `http://cs231n.stanford.edu/`

Sujet 12

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Sujet proposé par Philippe Jaming

Philippe.Jaming@math.u-bordeaux.fr

L'objectif de ce mémoire est détudier les suites récurrentes sous plusieurs aspects. On peut mentionner :

— comportement local au tour d'un point fixe (répulsif, attractif ou parabolique)

— le théorème de Charkovski (période 3 implique chaos)

— l'approximation des solutions d'équations différentielles ordinaires (convergence de l'algorithme d'Euler, théorème d'existence de Cauchy-Peano-Arzela)

Sujet 13

Le théorème du point fixe de Brouwer et applications

Sujet proposé par Philippe Jaming

Philippe.Jaming@math.u-bordeaux.fr

Le théorème du point fixe de Brouwer et applications nous dit que si C est un convexe compact alors toute fonction continue $C \to C$ admet un point fixe. L'objectif de ce mémoire est de démontrer ce théorème par exemple avec un argument combinatoire (lemme de Sperner). On en donnera ensuite une ou plusieurs applications (Équations Différentielles Ordinaires, théorie des jeux,...)

Sujet 14

Nombres premiers dans les progressions arithmétiques

Sujet proposé par Florent Jouve

florent.jouve@math.u-bordeaux.fr

Étant donné des entiers a et b premiers entre eux, le théorème de Dirichlet affirme qu'il existe une infinité de nombres premiers $p \equiv a(\bmod b)$. Le but de ce projet est l'étude d'une preuve d'une version forte de cette assertion, à savoir :

$$\sum_{\substack{p \leq x,\, p \text{ premier} \\ p \equiv a(\bmod b)}} \frac{1}{p} = \frac{1}{\varphi(b)} \log\log x + O_b(1)\,, \qquad (x \geq 3)$$

où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler. La méthode de preuve mélange des considérations élémentaires sur les groupes $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^\times$ et des outils d'analyse permettant en particulier l'étude cruciale de la fonction

$$L(s,\chi) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}\,, \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

où le *caractère de Dirichlet* χ est obtenu par prolongement b-périodique d'un morphisme de groupe $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$.

Références

- A. J. Hildebrand : *Introduction to analytic number theory*, disponible en ligne : https://faculty.math.illinois.edu/~hildebr/ant/.
- B. Veklych : *A one-formula proof of the nonvanishing of L-functions of real characters at 1.* Amer. Math. Monthly 122 (2015), no. 5, 484–485. Disponible en ligne : https://arxiv.org/abs/1412.5162.

Sujet 15

Quaternions et octonions

Sujet proposé par Jean Lécureux

jean.lecureux@math.u-bordeaux.fr

On sait que les nombres complexes s'obtiennent à partir des réels en ajoutant un nombre i dont le carré vaut -1. Les nombres complexes permettent d'étudier de manière efficace la géométrie du plan.
L'objectif de ce stage est de comprendre deux constructions, en dimension plus grande : les quaternions et les octonions. Ceux-ci s'obtiennent de manière analogue aux complexes, en dimension 4 pour les quaternions (on ajoute donc deux "nombres" supplémentaires j et k, après i) et en dimension 8 pour les octonions. Même si les propriétés qu'ils vérifient sont moins fortes que celles des complexes, ils permettent d'obtenir quelques applications géométriques, et des constructions d'espaces et de groupes associés intéressants. Un des objectifs du stage serait de comprendre comment les quaternions et octonions permettent de travailler avec la géométrie sphérique en dimension 3 et 7.

Références

[Bae02] John C. Baez. The octonions. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 39(2) :145–205, 2002.

[CS03] John H. Conway and Derek A. Smith. *On quaternions and octonions : their geometry, arithmetic, and symmetry.* Natick, MA : A K Peters, 2003.

Sujet 16

Groupes libres et arbres

Sujet proposé par Pierre Mounoud

pierre.mounoud@math.u-bordeaux.fr

On peut caractériser les groupes libres par une "propriété universelle" : Un groupe libre de base X est un groupe F engendré par X et tel que toute application $\varphi\colon X \to G$, où G est un groupe quelconque, s'étend de manière unique en un morphisme de groupes $\phi\colon F \to G$. Les groupes libres sont des objets qui apparaissent très naturellement en théorie des groupes. En un certain sens, F est le plus gros groupe qu'un ensemble de cardinal $\#X$ peut engendrer.
On montrera que pour tout $n \geq 1$, il existe un unique (à isomorphisme près) groupe libre de rang n, c'est-à-dire ayant une base de cardinal n. On verra comment ce groupe, noté F_n, permet de "présenter" tout groupe à n générateurs.
On verra ensuite comment associer à un groupe G un graphe sur lequel G agit fidèlement. Pour illustrer comment ce genre d'action permet de mieux connaitre G, on montrera le théorème suivant.
Théorème de Nielsen-Schreier. *Tout sous-groupe d'un groupe libre est un groupe libre.*

Références

[1] John Meier, Groups, graphs and trees. An introduction to the geometry of infinite groups. London Mathematical Society Student Texts, 73. Cambridge University Press, 2008

[2] D. Guin, T. Hausberger, Algèbre 1, groupes, corps et théorie de Galois, EDP Sciences, collection enseignement Sup (2008)

Sujet 17

Introduction à la théorie de Lyapounov des systèmes dynamiques

Sujet proposé par Laurent Michel

laurent.michel@math.u-bordeaux.fr

Le but de ce projet est d'étudier le comportement en temps long de systèmes différentiels $\dot{x} = f(x)$. On commencera par revoir les résultats classiques d'existence et unicité ainsi que le cas de systèmes linéaires en dimension 2 (portrait de phase). On passera ensuite à l'étude de la stabilité des points stationnaire par la théorie de Lyapunov. On appliquera cette théorie pour démontrer un résultat de linéarisation. Une référence pour ce projet est le livre de H. K. Khali, Nonlinear systems.

Sujet 18

La géométrie des nombres et la finitude du nombre de classes d'anneaux d'entiers des corps de nombres

Sujet proposé par Pierre Parent

pierre.parent@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

Sujet 19

Introduction aux nombres p-adiques

Sujet proposé par Léo Poyeton

leo.poyeton@math.u-bordeaux.fr

On peut construire le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ en complétant $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue. Étant donné un nombre premier p, on peut construire sur $\mathbb{Q}$ une autre valeur absolue, appelée norme p-adique. Lorsqu'on complète $\mathbb{Q}$ pour cette nouvelle valeur absolue, on obtient le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$, et l'adhérence de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}_p$ pour la topologie p-adique est un anneau $\mathbb{Z}_p$, appelé anneau des entiers p-adiques.
L'objectif de ce projet est de se familiariser avec les nombres p-adiques et leurs propriétés, en suivant en partie [Kob12] et [Ser, Chapitre II]. Dans un premier temps, on étudiera les propriétés topologiques de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{Z}_p$, on définira l'écriture en base p des nombres p-adiques. On verra plusieurs conséquences surprenantes des propriétés topologiques de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{Z}_p$.
Dans un deuxième temps, on s'intéressera aux fonctions continues sur $\mathbb{Z}_p$, à leur struture et à leurs propriétés.
On verra également comment construire un analogue p-adique $\mathbb{C}_p$ du corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.
Si le temps le permet, on s'intéressera également aux séries entières p-adiques, et à la notion de polygone de Newton pour étudier ces dernières.

Références

[Kob12] Neal Koblitz, p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions, vol. 58, Springer Science & Business Media, 2012.

[Ser] Jean-Pierre Serre, Cours d'arithmétique. 1970, Presses Universitaires de France.

Sujet 20

Les opérateurs de classe trace dans les espaces de Hilbert

Sujet proposé par Edoardo Provenzi

edoardo.provenzi@math.u-bordeaux.fr

Le concept de trace d'un opérateur linéaire entre espaces euclidiens de dimension finie est bien connu. Il est possible d'étendre ce concept à une classe d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert de dimension infinie ; ces opérateurs portent le nom d'opérateurs de classe trace pour des raisons évidentes.
En dehors de leur utilité en analyse fonctionnelle, ces opérateurs se révèlent très importants dans les applications à la mécanique quantique. Dans ce projet, vous serez amenés à démontrer les propriétés les plus importantes de ces opérateurs.
En particulier, on démontrera que le théorème bien connu qui affirme que la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres peut être étendu aux opérateurs auto-adjoints de classe trace. Il s'agit d'un cas particulier d'un théorème important démontré par Lidskii en 1959, dans lequel l'hypothèse d'auto-adjonction n'est pas requise.

Pré-requis : cours d'espaces d'Hilbert et transformée de Fourier de L3 math-fonda.

Référence principale : H. Lal Vasudeva : 'Elements of Hilbert spaces and operator theory', Springer.

Sujet 21

Contrôlabilité et observabilité des systèmes d'équations différentielles linéaires

Sujet proposé par Marius Tucsnak

marius.tucsnak@u-bordeaux.fr

L'objectif du projet proposé est une initiation à un sujet permettant des ouberures vers des questions de recherche actuelles ou vers des applications. Le poind de départ sont de notions de base sur l'algebre linéaire et les systèmes d'équations différentielles linéaires.
Pour décrire brièvement ce sujet, on introduit tout d'abord les espaces euclidiens de dimension finie U (espace de contrôles) et X (espaces des états, de dimension n) ainsi que les opérateurs linéaires $A : X \to X$ et $B : U \to X$. Nous nous intéresserons aux systèmes dynamiques décrits par

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \qquad\qquad (t \geqslant 0), \tag{1}$$

où $u(t) \in U$, u est la *fonction de contrôle* (ou signal d'entrée) et $z(t) \in X$ est *l'état* au moment t. L'équation différentielle (1) a, pour tout u continue et $z(0) \in X$, l'unique solution, donnée par la formule de Duhamel,

$$z(t) = e^{tA}z(0) + \int_0^t e^{(t-\sigma)A}Bu(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{2}$$

Le système (1) est dit *contrôlable en temps* $\tau > 0$ si pour tous $z_0,\ z_1 \in X$ il existe une fonction u telle que $z(0) = z_0$ et $z(\tau) = z_1$. Le travail proposé consiste dans la compréhension détaillée, en suivant les premiers chapitres de [1] et [2], des conditions classiques de Kalman et Hautus garantissant la contrôlabilité.
Plus précisément il s'agira de rédiger, suivant les références ci-dessus, une preuve détaillée des résultats suivants :

Théorème 1.(Kalman) *La paire (A, B) est contrôlable si et seulement si*

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n. \tag{3}$$

Théorème 2.(Hautus) *La paire (A, B) est contrôlable si et seulement si*

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix} = n \qquad\qquad (\lambda \in \mathbb{C}). \tag{4}$$

Le sujet incluera l'étude de la notion duale d'observabilité, pour laquelle on donnera les versions duales des deux théorèmes ci-dessus.

Références

[1] J.-M. Coron, *Control and Nonlinearity*, vol. 136 of Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[2] M. Tucsnak and G. Weiss, *Observation and control for operator semigroups*, Springer Science & Business Media, 2009.