

Intégration et espaces L^p à valeurs dans un Banach

Jean Starynkévitch

Version du 29 septembre 2004¹

Introduction

Dans plusieurs situations en analyse, lorsqu'on étudie une fonction de deux variables (chaque par exemple dans un ouvert d'un certain $\mathbb{R}^n$), il est très fréquent que les deux variables jouent des rôles très différents. Par exemple, si ρ est une fonction d'état d'un système physique (dépendant du temps $t \in \mathbb{R}$ et de la position $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$), il est intuitivement légitime de la regarder comme une fonction $\tilde{\rho}$ du temps t (donc définie sur $\mathbb{R}$) à valeurs dans un espace vectoriel de fonctions définies sur Ω .

Formellement, et dans un cadre plus général, cela revient à dire, étant donné trois ensembles X , Y et Z , nous avons un isomorphisme canonique Φ entre les ensembles $\mathcal{F}(X \times Y; Z)$ (fonctions définies sur $X \times Y$ à valeurs dans Z) et $\mathcal{F}(X; \mathcal{F}(Y; Z))$. Cet isomorphisme est donné par les formules qui suivent, réciproque l'une de l'autre ($\Phi(f) = \tilde{f}$) :

pour $f \in \mathcal{F}(X \times Y; Z)$, on définit $\tilde{f} \in \mathcal{F}(X; \mathcal{F}(Y; Z))$ par $\tilde{f}(x) = f(x, \cdot)$

pour $\tilde{f} \in \mathcal{F}(X; \mathcal{F}(Y; Z))$, on définit $f \in \mathcal{F}(X \times Y; Z)$ par $f(x, y) = [\tilde{f}(x)](y)$

Supposons que $Z = \mathbb{R}$ (ou $Z = \mathbb{C}$, ce qui sera désormais le cas dans toute la suite), et que X et Y sont des espaces mesurés (leurs mesures associées étant respectivement notées μ et ν).

Soit $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mu \otimes \nu$)-mesurable. Supposons également, par exemple, que pour μ -presque tout x , on aie $\int_Y |f(x, y)|^q d\nu(y) < +\infty$. Nous avons alors une application $\tilde{f} : X \rightarrow L^q(Y)$ définie μ -presque partout. Voici quelques questions que nous aborderons dans cette note :

- Peut-on définir une bonne notion de mesurabilité des fonctions de X à valeurs dans $L^q(Y)$, et plus généralement à valeurs dans un Banach E ? Y a-t-il une définition de mesurabilité qui induise une notion d'intégrabilité, et d'intégrale d'une fonction $\tilde{f} : X \rightarrow E = L^q(Y)$?
- Avec cette notion, peut-on relier les notions de mesurabilité, d'une part de f dans $X \times Y$, d'autre part de $\tilde{f}$ dans X ? Si oui, les notions d'intégrabilité (et les valeurs des intégrales) coïncident-elles?

Pour répondre à ces questions, nous exposons une théorie de l'intégration pour des fonctions à valeurs vectorielles (dans un espace de Banach). Les acquis supposés sont la théorie abstraite de l'intégration (programme de licence) et les notions de base d'analyse fonctionnelle linéaire (programme de maîtrise).

L'essentiel du contenu de ces notes est tiré d'un polycopié de Jérôme Droniou [2]. L'intégration à valeurs vectorielles est une notion qui date de Bochner ; elle est évoquée dans un certain nombre d'ouvrage ([5], [3], [4]). En revanche, à notre connaissance, la seule référence qui lie la notion de fonctions mesurables sur X à valeurs dans un espace de fonctions $L^p(Y)$, à celles de fonctions mesurable sur $X \times Y$ reste [2].

Les quelques résultats nouveaux de ce petit texte sont :

- L'application de dualité naturelle de $L^{p'}(X, E')$ dans $(L^p(X, E))'$ est une isométrie sur son image, ceci sans aucune hypothèse supplémentaire sur le Banach E .

¹Je suis preneur de tout commentaire (Jean.Starynkevitch@math.u-bordeaux1.fr) pour améliorer ce texte, qui n'en est pas, en principe, à sa version définitive.

– Une fonction $F : X \rightarrow L^q(\Omega)$ admet un « représentant mesurable » sur $X \times \Omega$.

Par ailleurs, le polycopié de Droniou [2] va plus loin, en parlant d'espaces de Sobolev à valeurs vectorielles, de convolution...

I Mesurabilité et μ -mesurabilité

On se donne $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace *mesuré* (muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une mesure, μ). Dans les applications, X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (muni de la tribu des Boréliens et de la mesure de Lebesgue), et très souvent, $X = [0, T[$, $0 < T \leq +\infty$.

Y désigne un espace mesurable. Si Y est un espace métrique, on lui associe la structure d'espace mesurable en le munissant de la tribu des Boréliens (tribu engendrée par les ouverts). Si Y est un espace de Banach E , on le munit de sa structure d'espace métrique donnée par la norme.

Définition I.1. (*Rappel*) Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est mesurable si pour tout ensemble mesurable $B \subset Y$, $f^{-1}(B)$ est un ensemble mesurable de X .

Proposition I.2. Lorsque Y est métrique, une limite simple de fonctions mesurables est mesurable.

Remarque I.3. Une importante propriété (au moins dans le cas réel) est que l'espace des fonctions mesurables est un ensemble stable par passage à la limite simple. Lorsque $Y = \mathbb{R}$, on montre d'abord qu'un supréum et un infimum d'un ensemble (dénombrable) de fonctions mesurables est mesurable. On en déduit qu'une limite supérieure de fonctions mesurables est aussi mesurable. Et pour des fonctions réelles, la limite, lorsqu'elle existe, est la limite supérieure (qui, elle, existe toujours).

Lorsque Y n'est pas $\mathbb{R}$, la notion de limite supérieure n'a pas de sens. Mais le cas Y métrique va nous permettre de faire des manipulations ensemblistes pour aboutir au résultat de stabilité par limite simple de l'espace des fonctions mesurable. Plus précisément, on aura besoin de la caractérisation séquentielle des fermés dans Y , ainsi que de la propriété suivante : tout ouvert U est réunion dénombrable d'une suite croissante de fermés $(F_n)_n$ tels que $F_n \subset \overset{\circ}{F}_{n+1}$ (dans un métrique, prendre $F_n = \{x \in U \mid d(x, U^c) \geq 1/n\}$).

Démonstration. On se donne $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables de X dans Y , qui converge simplement vers une fonction f , et on souhaite établir la mesurabilité de f . Pour ce faire, comme Y est métrique, il suffit de montrer que l'image réciproque de tout ouvert de Y est mesurable.

Pour tout ouvert U , et tout entier m , on a $f^{-1}(U) \subset \bigcup_{k \geq m} f_k^{-1}(U)$ (en effet, si $f(x) \in U$, comme U est ouvert et que $f_k(x) \rightarrow f(x)$, $f_k(x)$ appartient à U pour un k suffisamment grand), et donc

$$f^{-1}(U) \subset \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq m} f_k^{-1}(U) .$$

D'autre part, si F est un fermé,

$$f^{-1}(F) \supset \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq m} f_k^{-1}(F) .$$

En effet, dire que x appartient à $\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq m} f_k^{-1}(F)$ signifie que $f_k(x) \in F$ pour une infinité d'indices k . En passant à la limite en $+\infty$ selon ces indices k , il vient que $f(x) \in F$ (car F est fermé).

Soit donc U un ouvert quelconque de Y , et $(F_n)_n$ une suite de fermés telle que $F_n \subset \overset{\circ}{F}_{n+1}$, de réunion U . On a d'une part, comme $U = \bigcup_{n \geq 0} \overset{\circ}{F}_n$ (du fait que $F_{n-1} \subset \overset{\circ}{F}_n \subset F_n$),

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}(\overset{\circ}{F}_n) \subset \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq m} f_k^{-1}(\overset{\circ}{F}_n)$$

d'autre part, comme $U = \bigcup_{n \geq 0} F_n$,

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}(F_n) \supset \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq m} f_k^{-1}(F_n) \supset \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq m} f_k^{-1}(\overset{\circ}{F}_n)$$

Ainsi, $f^{-1}(U) = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq m} f_k^{-1}(\overset{\circ}{F}_n)$ est mesurable.

Définition I.4. Une fonction $s : X \rightarrow E$ est dite simple si elle est mesurable, nulle hors d'un ensemble de mesure finie, et qu'elle prend un nombre fini de valeurs.

On note, $s(X, E)$ l'ensemble des fonctions simples; c'est un sous-espace vectoriel de l'espace de fonctions de X dans E .

Remarque I.5. Lorsque $E = \mathbb{R}$, la notion de fonction simple coïncide avec celle de fonction étagée.

Remarque I.6. Une fonction simple s peut s'écrire $s = \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{A_i} x_i$, où les x_i distincts deux à deux dans E , $x_0 = 0$, et $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est une partition mesurable de X , $\mu(X \setminus A_0) < +\infty$, une telle décomposition étant unique à l'ordre près des facteurs. En effet, l'ensemble des $\{x_i\} \cup \{0\}$ est exactement l'image de f et, si x_i est fixé dans l'image, on a $A_i = f^{-1}(\{x_i\})$.

Sur l'espace des fonctions simples, on peut définir sans ambiguïté, comme dans le cas réel positif, une intégrale :

Proposition-définition I.7. Soit f une fonction simple, $f = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} x_i$ où les A_i forment une partition de X (les x_i n'étant pas nécessairement distincts), avec $\mu(A_i) < +\infty$ lorsque $x_i \neq 0$. La quantité $\sum_{i=1}^n \mu(A_i) x_i \in E$ est indépendante d'une telle décomposition de f . On l'appelle intégrale de f et on la note

$$\int_X f(x) d\mu(x) \quad \text{ou} \quad \int_X f d\mu$$

Lorsque $x_i = 0$ et que $\mu(A_i) = +\infty$, on adopte la convention $x_i \mu(A_i) = 0$. En théorie de l'intégration, la convention $0 \times +\infty = 0$ est assez pratique, et est notamment utilisée par W. Rudin dans [6].

Démonstration. Soient deux écritures de $f = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} x_i = \sum_{j=1}^p \mathbb{1}_{B_j} y_j$ (avec $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(B_j)_{1 \leq j \leq p}$ partitions de X).

Lorsque $\mu(A_i \cap B_j) = +\infty$, on a par croissance de la mesure $\mu(A_i) = \mu(B_j) = +\infty$, et donc $x_i = y_j = 0$. d'autre part, lorsque $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, on a $f(x) = x_i = y_j$ pour $x \in A_i \cap B_j$. Ces deux remarques justifient le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mu(A_i) x_i &= \sum_{\substack{i,j \\ A_i \cap B_j \neq \emptyset}} \mu(A_i \cap B_j) x_i \\ &= \sum_{\substack{i,j \\ A_i \cap B_j \neq \emptyset}} \mu(A_i \cap B_j) y_j \\ &= \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) y_j \\ &= \sum_{j=1}^p \mu(B_j) y_j \end{aligned}$$

Proposition I.8. L'application $s \mapsto \int_X s d\mu$ est une application linéaire de $s(X, E)$ dans E .

Démonstration. Le point non évident de la linéarité est que, dans notre définition, la décomposition d'une fonction simple évoquée utilise le fait que (A_i) est une partition de X .

Soit λ un scalaire, et f et g simples. Montrons que $\int \lambda f + g \, d\mu = \lambda \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$. Pour cela, on écrit $f = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} x_i$ et $g = \sum_{j=1}^p \mathbb{1}_{B_j} y_j$, où (A_i) et (B_j) sont des partitions mesurables. C'est alors aussi le cas de la famille $(A_i \cap B_j)_{(i,j)}$, et selon cette partition, on peut décomposer $f = \sum_{i,j} x_i \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$, $g = \sum_{i,j} y_j \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$, ainsi que $f + g$. On applique la définition de l'intégrale de fonctions simples selon cette définition, et seule la linéarité de la somme suffit pour conclure (remarquons que, dès que $\mu(A_i \cap B_j) = +\infty$, alors $x_i = y_j = 0$ donc $\lambda x_i + y_j = 0$) :

$$\begin{aligned} \int \lambda f + g \, d\mu &= \sum_{(i,j)} (\lambda x_i + y_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \lambda \sum_{(i,j)} x_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{(i,j)} y_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \lambda \int f \, d\mu + \int g \, d\mu \end{aligned}$$

Définition I.9. Une fonction $f : X \rightarrow E$ est dite μ -mesurable si c'est une limite μ -presque partout de fonctions simples.

Remarque I.10. Cette notion est également appelée *mesurabilité forte*. Nous reprenons le choix de J. Droniou de l'appeler μ -mesurabilité pour rappeler que cette notion nécessite la donnée d'une mesure : elle n'est pas liée à la notion d'espace mesurable, mais à celle d'espace mesuré.

Corollaire I.11. Une fonction f μ -mesurable est à support de mesure σ -finie.

Démonstration. En effet, le support de f est inclus dans l'union (dénombrable) des supports d'une suite $(s_n)_n$ de fonction simples qui converge simplement vers f , et chacun de ces supports est de mesure finie.

Remarque I.12. Selon cette définition, si X n'est pas de mesure σ -finie, une fonction constante non nulle n'est pas mesurable. Dans les applications, nous nous placerons donc souvent dans le cas où X est de mesure σ -finie. Généralement, X est en effet un ouvert d'un espace euclidien.

Proposition I.13. Si $f : X \rightarrow E$ est mesurable, quitte à changer f sur un ensemble de mesure nulle, l'image de f est séparable.

Démonstration. Changeons f sur un ensemble de mesure de sorte à ce qu'une suite $(s_n)_n$ de fonctions simples converge partout vers f . On note F_n l'espace vectoriel engendré par l'image de $s_1, s_2, \dots, s_n$ (qui est un espace de dimension finie). Alors, l'image de f est incluse dans l'espace séparable $\bigcup_{n \geq 1} F_n$.

Théorème I.14 (Egorov). Si X est de mesure finie, si $f_n : X \rightarrow E$ est une suite de fonctions qui converge μ -presque partout vers f , alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe un ensemble A_ε tel que $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ et $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $X \setminus A_\varepsilon$.

Démonstration. La démonstration est semblable au cas où $E = \mathbb{R}$. Mais on peut aussi le déduire du cas (connu) $E = \mathbb{R}$: il suffit d'appliquer le théorème d'Egorov pour les fonctions à valeurs réelles à la suite de fonctions réelles $(\|f_n - f\|_E)_n$.

C'est ce théorème (non trivial) qui permet d'obtenir la propriété fondamentale suivante.

Théorème I.15. Une limite μ -presque partout de fonctions μ -mesurables est μ -mesurable.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, nous allons appliquer à plusieurs reprises le résultat suivant.

Lemme I.16. Soit Y un ensemble, et soit $g_n : Y \rightarrow E$ une suite d'applications qui converge uniformément vers $g : Y \rightarrow E$, et $h_{n,k} : Y \rightarrow E$ une famille d'applications telle que pour tout n , la suite $(h_{n,k})_k$ converge uniformément vers g_n . Il existe alors une suite strictement croissante d'entiers naturels $(k_n)_n$ telle que la suite $(h_{n,k_n})_n$ converge uniformément vers g .

La démonstration de ce lemme est reportée en annexe.

◊ Supposons d'abord X de mesure finie.

Soit $f_n : X \rightarrow E$ une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f hors d'un ensemble C_0 de mesure nulle. Soit, pour n fixé, $s_{n,k} : X \rightarrow E$ une suite de fonctions simples qui converge simplement vers f_n hors d'un ensemble C_n de mesure nulle. Nous avons donc convergence simple de toutes ces suites hors de l'ensemble $C = \bigcup_{n \geq 0} C_n$, ensemble de mesure nulle.

Appliquons le théorème d'Egorov : il existe des ensembles $(A_{p,n})_{n \geq 0}$ tel que $\mu(A_{p,n}) \leq 2^{-n-p-1}$ et tel que g_n converge uniformément vers g hors de $A_{p,0}$, et, pour tout n , $s_{k,n}$ converge uniformément vers g_n hors de $A_{p,n}$. Posons $B_p = \bigcup_{n \geq 0} A_{p,n}$, de sorte que $\mu(B_p) \leq 2^{-p}$ et toutes les convergences précitées ont lieu uniformément hors de B_p .

On applique le lemme une première fois avec $Y = X \setminus B_1$, $g_n = f_n$, $g = f$ et $h_{n,k} = s_{n,k}$. Il existe donc une suite strictement croissante d'entiers $(k_n^1)_n$ telle que s_{n,k_n^1} converge uniformément vers f sur $X \setminus B_1$.

Démontrons le résultat suivant par récurrence sur P :

Lemme I.17. pour tout P entier, il existe une famille d'entiers $\{k_n^p \mid 1 \leq p \leq P, 0 \leq n < +\infty\}$ telle que :

- pour tout $p \geq 1$, la suite $(k_n^p)_n$ est une suite strictement croissante et extraite de $(k_n^{p-1})_n$ si $p \geq 2$
- pour tout p , la suite $(s_{n,k_n^p})_n$ converge uniformément vers f sur $X \setminus B_p$.

Démonstration. Par ce qui a été dit, cette propriété est vraie pour $P = 1$; supposons-la (hypothèse de récurrence) vraie au rang $P - 1$ ($P \geq 1$). On applique alors le lemme avec $Y = X \setminus B_P$, $g_n = f_n$, $g = f$ et $h_{n,l} = s_{n,k_l^{P-1}}$. En posant $k_n^P = k_{k_n^{P-1}}^{P-1}$ (où la suite $(k_n)_n$ est donnée par le lemme), le résultat est vrai au rang P , ce qui achève la récurrence.

À partir du rang p , la suite $(s_{n,k_n^p})_n$ est une suite extraite de s_{n,k_n^p} , donc converge simplement vers f hors de B_p , et ceci pour tout p . La suite de fonctions simples s_{n,k_n^p} converge donc simplement vers f hors de l'ensemble $B = \bigcap_p B_p$ (qui est bien de mesure nulle car $\mu(\bigcap_p B_p) \leq \inf_p \mu(B_p)$ par croissance de la mesure). On a bien montré que f est μ -mesurable, ce qui clôt la démonstration du théorème I.15 dans la cas où X est de mesure finie.

◊ Si X est de mesure σ -finie.

Soit (X_N) une partition dénombrable de X en ensembles de mesures finies (qui existe par définition de la σ -finitude de X). $f|_{X_N}$ est limite μ -presque partout de fonctions μ -mesurables sur X_N , donc μ -mesurable d'après le cas précédent. Soit donc $s_n^N : X_N \rightarrow E$ une suite de fonctions simples qui converge μ -presque partout vers f , que l'on identifie à des fonction simples $X \rightarrow E$ en les prolongeant par 0 hors de X_N . La suite de fonctions simples $(t_n)_n$, où $t_n = \sum_{k=1}^n s_n^k$ converge μ -presque partout vers f , ce qui conclut.

◊ Cas général où X n'est pas de mesure σ -finie.

On sait qu'une union dénombrable d'ensembles de mesure σ -finie reste de mesure σ -finie. Chaque f_n est nulle hors d'un ensemble A_n de mesure σ -finie, et donc chaque f_n , ainsi que f , est nulle hors de l'ensemble $\{f_n \not\equiv f\} \cup \bigcup_{n \geq 1} A_n$, qui est de mesure σ -finie.

Corollaire I.18. *Si X est de mesure σ -finie et que E est séparable, alors toute fonction mesurable est μ -mesurable.*

Démonstration. $\diamond$ Si X de mesure finie et $\|f\|_E$ bornée sur X , disons par $M > 0$.

Soit $(a_k)_k$ une suite dense dans $B_E(0, M)$, et

$$U_1^n = B_E(a_1, 1/n) \cap B_E(0, M)$$

$$U_k^n = B_E(a_k, 1/n) \cap B_E(0, M) \setminus \bigcup_{i \leq k-1} U_i^n$$

de sorte de $(U_k^n)_n$ forment une partitions d'ensembles mesurables de $B(0, M)$ et de diamètre majoré par $1/n$. En notant, pour A mesurable, $\{f \in A\}$ l'ensemble $\{x \mid f(x) \in A\}$, on pose

$$f_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \mathbb{1}_{\{f \in U_k^n\}}$$

la somme existe bien car elle est toujours ponctuellement réduite à un terme non nul (au plus).

Comme les $(U_k^n)_k$ sont mesurables et disjoints, il est clair que f_n est mesurable (comme limite simple des sommes partielles, chacune étant une fonction simple).

D'autre part, pour tout $x \in X$, $\|f_n(x) - f(x)\|_E \leq 1/n$. En effet, si k_n est l'unique entier pour lequel $f(x) \in U_{k_n}^n$, on a à la fois $|f(x) - a_{k_n}| \leq 1/n$ et $f_n(x) = a_{k_n}$. En particulier, f est limite simple des fonctions f_n qui sont μ -mesurables, donc est μ -mesurable.

$\diamond$ si X est de mesure finie et f n'est pas bornée.

f est limite simple de la suite de fonctions $f_n = f \mathbb{1}_{\{\|f\|_E \leq n\}}$, chacune de ces f_n étant mesurable et bornée (on utilise le fait qu'un produit – continu de chacun de ses arguments – de fonctions mesurables est mesurable), donc μ -mesurable.

$\diamond$ Si X est de mesure σ -finie.

Soit X_n une suite croissante d'ensemble de mesure finie, de réunion X , on sait que $f|_{X_n}$ est μ -mesurable sur X_n ; on en déduit qu'il en est de même pour $f \mathbb{1}_{X_n}$ sur X (si $(s_k)_k$ est une suite approximante dans $s(X_n; E)$ de f , si $\tilde{s}_k$ est le prolongement par 0 hors de X_n de s_k , alors $(\tilde{s}_k)_k$ est approximante pour $f \mathbb{1}_{X_n}$). Alors, il est de même pour f , limite simple de la suite de fonctions μ -mesurables $f \mathbb{1}_{X_n}$.

Remarque I.19. *Comme le montre la remarque I.12, le théorème est systématiquement faux dès que X n'est pas de mesure σ -finie.*

Corollaire I.20. *Si X est de mesure σ -finie, que E est séparable, en prenant D est un ensemble dénombrable et dense dans E , $f : X \rightarrow E$ est μ -mesurable si et seulement si pour tout $d \in D$, $x \mapsto \|f(x) - d\|_E$ est mesurable*

Démonstration. Le sens direct est immédiat, puisque la μ -mesurabilité de f implique sa mesurabilité, et donc celle de $\|f - d\|_E$.

Pour la réciproque, d'après le corollaire précédent, il suffit de montrer la mesurabilité de f . Or, comme $\{B_E(d, 1/k) \mid d \in D, k \in \mathbb{N}^*\}$ forme une base dénombrable d'ouverts, il suffit de montrer que pour tout $d \in D$ et tout $k \geq 1$, $f^{-1}(B(d, 1/k))$ est mesurable, ce qui est le cas par hypothèse car

$$f^{-1}(B(d, 1/k)) = \|f - d\|^{-1}([0, 1/k[) .$$

Corollaire I.21. *Soit X un espace mesuré, E et F deux Banach inclus dans un même espace vectoriel G . Une fonction $f : X \rightarrow E \cap F$ est μ -mesurable si et seulement si $f : X \rightarrow E$ et $f : X \rightarrow F$ sont μ -mesurables.*

Le problème est le suivant : on sait par hypothèse qu'il existe une suite $s_n^E : X \rightarrow E$ de fonctions simple convergeant vers f μ -presque partout dans E . De même, il existe une suite $s_n^F : X \rightarrow F$ de fonctions simples convergeant vers f μ -presque partout dans F . Rien ne permet d'en tirer directement une suite $s_n^{E \cap F} : X \rightarrow E \cap F$ qui converge simplement vers f dans $E \cap F$.

Démonstration. Le sens direct est facile puisque, comme $E \cap F$ s'injecte continûment dans E et dans F , la mesurabilité dans $E \cap F$ de f implique sa mesurabilité dans E et sa mesurabilité dans F .

Regardons maintenant la réciproque, et prenons une fonction $f : X \rightarrow E \cap F$, μ -mesurable dans E et dans F . Quitte à restreindre X au support de f , on peut supposer que X est de mesure σ -finie. Quitte à changer f sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer que E et F sont séparables. On utilise alors le lemme suivant (démontré en annexe) :

Lemme I.22. *Si E et F sont deux espaces de Banach inclus dans un autre espace vectoriel G , si E et F sont séparable, alors $E \cap F$ est séparable.*

Il suffit donc de prouver, en vertu du théorème précédent, que $\|f - d\|_{E \cap F}$ est mesurable pour tout $d \in F$. Mais ceci est clair car $\|f - d\|_{E \cap F} = \|f - d\|_E + \|f - d\|_F$.

Nous introduisons maintenant une notion de mesurabilité faible.

Définitions 1. *Soit $f : X \rightarrow E$. f est faiblement mesurable si pour tout $H \in E'$, l'application $x \mapsto \langle H, f(x) \rangle_{E', E}$ est mesurable de X dans $\mathbb{R}$.*

Si E est le dual d'un espace F , on dit que f est $$ -faiblement mesurable si pour tout $h \in E$, l'application $x \mapsto \langle f(x), h \rangle_{E, F}$ est mesurable de X dans $\mathbb{R}$.*

Proposition I.23. *Si E est un dual, les notions de mesurabilités faible et faible- $*$ coïncident.*

Démonstration. Soit F tel que $F' = E$, et $f : X \rightarrow E$. Il s'agit de montrer que la mesurabilité des fonctions $(x \mapsto \langle f(x), y \rangle_{F', F})_{y \in F}$ entraîne celle des fonctions $(x \mapsto \langle z, f(x) \rangle_{E', E})_{z \in E'}$. Ceci découle du fait que, si J est l'injection isométrique canonique de F dans son bidual E' , alors $J(F)$ est séquentiellement faiblement dense dans $E' = F''$ (voir .

Proposition I.24. *Soit D un ensemble dense dans E' (dense pour la topologie faible- $*$ de E' suffit). $f : X \rightarrow E$ est faiblement mesurable si et seulement si pour tout $d \in D$, $\langle d, f \rangle_{E', E}$ est mesurable.*

Démonstration. Montrons le sens non trivial (mais facile). Soit $H \in E'$ et $(d_n)_n$ une suite d'éléments de D qui converge $*$ -faiblement vers H dans E' . Alors, pour μ -presque tout $x \in X$, $\langle d_n, f(x) \rangle_{E', E}$ converge vers $\langle H, f(x) \rangle_{E', E}$. La suite de fonctions mesurables $\langle d_n, f \rangle_{E', E}$ converge donc μ -presque partout vers $\langle H, f \rangle_{E', E}$. Donc $\langle H, f \rangle_{E', E}$ est mesurable, ce qui montre que f est faiblement mesurable.

De la même manière, on démontre que :

Proposition I.25. *Soit D un ensemble dense dans E (dense pour la topologie faible de E suffit). $f : X \rightarrow E'$ est $*$ -faiblement mesurable si et seulement si pour tout $d \in D$, $\langle f, d \rangle_{E', E}$ est mesurable.*

Nous avons également d'autres propriétés aisées à démontrer.

Proposition I.26 (Propriétés immédiates à propos de la mesurabilité faible).

- Une limite faible μ -presque partout de fonctions faiblement mesurables est également faiblement mesurable.
- Une limite faible- $*$ μ -presque partout de fonctions $*$ -faiblement mesurables est également $*$ -faiblement mesurable.

- Si $f : X \rightarrow E$ est mesurable, f est faiblement mesurable.
- Si E est un dual, et $f : X \rightarrow E$ est faiblement mesurable, alors f est $*$ -faiblement mesurable.

Dans certains cas, nous avons aussi une sorte de réciproque à ces dernières propriétés.

Proposition I.27. *On suppose que X est de mesure σ -finie. On suppose également que E' est séparable. Alors $f : X \rightarrow E$ est faiblement mesurable si et seulement si f est μ -mesurable.*

Démonstration. On a, pour tout $h \in E$, $\|h\|_E = \sup_{\|y\|_{E'}=1} |\langle y, h \rangle_{E',E}|$.

Soit $(a_n)_n$ une suite de E' dense dans la sphère unité (une telle suite existe : si $(b_n)_n$ est une suite dense dans E' (ne contenant pas 0), il suffit de poser $a_n = \frac{1}{\|b_n\|_{E'}} b_n$). On a alors pour tout $h \in E$, $\|h\|_E = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle a_n, h \rangle_{E',E}|$.

Soit $f : X \rightarrow E$ faiblement mesurable. Alors, pour tout $d \in E$, $|\langle a_n, f-d \rangle_{E',E}|$ est mesurable, donc $\|f-d\|_E = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle a_n, f-d \rangle_{E',E}|$ est mesurable (comme suprémum dénombrable de fonctions positives mesurables), ce qui montre, puisque E est séparable (conséquence de la séparabilité de E'), que f est μ -mesurable.

On démontre de la même manière que :

Proposition I.28. *On suppose que X est de mesure σ -finie. On suppose également que E est séparable et est le dual d'un espace F . Alors $f : X \rightarrow E$ est $*$ -faiblement mesurable si et seulement si f est μ -mesurable.*

Mutatis Mutandis, la même démonstration qu'à la proposition I.27 convient, vu que F est séparable (car son dual E l'est, voir le chapitre III de [1]) et pour tout $h \in E$,

$$\|h\|_E = \sup_{\|g\|_F=1} |\langle h, g \rangle_{E,F}|.$$

II Intégrabilité et Intégrale

1 Définition et premières propriétés

Définitions 2. *Une fonction $f : x \rightarrow E$ est dite μ -intégrable s'il existe une suite s_n de fonctions simples qui converge vers f μ -presque partout et telle que $\int_X \|s_n - f\|_E d\mu \rightarrow 0$.*

Une telle suite (s_n) est appelée suite approximante pour f .

On note $\mathcal{L}^1(X; E)$ l'ensemble des fonctions intégrables.

Remarque II.1. *Dans la littérature, on emploie également les termes de B-intégrabilité ou d'intégrabilité au sens de Bochner.*

Proposition-définition II.2 (Intégrale d'une fonction à valeurs dans un Banach).

Soit $f : X \rightarrow E$ une fonction μ -intégrable, et (s_n) une suite approximante pour f . La suite $\int s_n d\mu$ converge vers une limite L_f indépendante de la suite approximante $(s_n)_n$ choisie ; elle est égale à $\int f d\mu$ si f est simple. On peut donc définir sans ambiguïté, dans le cas général,

$$\int_X f d\mu = L_f.$$

Démonstration. On a

$$\left\| \int s_n d\mu - \int s_m d\mu \right\|_E \leq \int \|s_n - s_m\|_E d\mu \leq \int \|s_n - f\|_E d\mu + \int \|s_m - f\|_E d\mu$$

ce qui montre que la suite $(\int s_n d\mu)_n$ est de Cauchy dans E , donc converge vers un certain l_s .

Soit t_n une autre suite approximante. On a

$$\left\| \int s_n d\mu - \int t_n d\mu \right\|_E \leq \int \|s_n - t_n\|_E d\mu \leq \int \|s_n - f\|_E d\mu + \int \|t_n - f\|_E d\mu,$$

d'où $\|l_s - l_t\|_E \leq \limsup \left\| \int s_n d\mu - \int t_n d\mu \right\|_E = 0$, donc $l_s = l_t$.

Si f est simple, la suite constante $(f)_n$ est approximante, ce qui montre que $L_f = \int f d\mu$.

Proposition II.3. Soient E et F deux espaces de Banach, et $T : E \rightarrow F$ une application linéaire continue. Si $f \in L^1(X; E)$, alors $T(f) \in L^1(X; F)$ et on a :

$$T\left(\int_X f d\mu\right) = \int_X T(f) d\mu.$$

Démonstration. Si $(s_n)_n$ est une suite approximante pour f , $(T(s_n))_n$ est une suite approximante pour $T(f)$: c'est une suite de fonctions simples (si $s = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$, alors $T(s) = \sum T(a_i) \mathbb{1}_{A_i}$), et, comme T est continue, $T(s_n)$ converge μ -presque partout vers $T(f)$ et $\int \|T(s_n) - T(f)\|_F d\mu \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \int \|s_n - f\|_E d\mu \rightarrow 0$.

D'autre part, on remarque facilement que $\int T(s_n) d\mu = T(\int s_n d\mu)$; de nouveau, la continuité de T fournit :

$$T\left(\int f d\mu\right) = T\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \int s_n d\mu\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T\left(\int s_n d\mu\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int T(s_n) d\mu = \int T(f) d\mu$$

2 Espaces L^p à valeurs dans un Banach

Proposition II.4 (Bochner). $f : X \rightarrow E$ est μ -intégrable si et seulement si f est μ -mesurable et que l'on a

$$\int_X \|f(x)\|_E d\mu(x) < +\infty.$$

Démonstration. Si f est intégrable, alors f est μ -mesurable et l'inégalité triangulaire donne pour n suffisamment grand

$$\int \|f(x)\|_E d\mu(x) \leq \int \|f(x) - s_n(x)\|_E d\mu(x) + \int \|s_n(x)\|_E d\mu(x) < +\infty.$$

Montrons la réciproque : soit s_n une suite approximante, et posons

$$t_n = s_n \mathbb{1}_{\{\|s_n\|_E \leq 2\|f_n\|_E\}}. \quad (1)$$

En distinguant les cas $f(x) = 0$ et $f(x) \neq 0$, il est aisé de montrer que t_n converge presque partout vers f . Comme $\|t_n - f\|_E \leq \|t_n\|_E + \|f\|_E \leq 3\|f\|_E$, on peut appliquer le théorème de Lebesgue (pour les fonctions à valeurs réelles), pour avoir $\|t_n - f\|_{L^1(X; E)} \rightarrow 0$, donc f est μ -intégrable.

Corollaire II.5. Si E est séparable, alors $f : X \rightarrow E$ est μ -intégrable si et seulement si f est mesurable et $\|f\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ est intégrable.

Démonstration. Il reste à montrer le sens réciproque ; par le corollaire précédent, il suffit de montrer que f est μ -mesurable. Or $\text{supp } f$ est de mesure σ -finie : $\text{supp } f = \{f \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{\|f\|_E \geq 1/n\}$, et d'après l'inégalité de bienaymé-Tchebyshev, $\mu(\{\|f\|_E \geq 1/n\}) \leq n\|f\|_{L^1(X; E)}$. En particulier, d'après le corollaire I.18, $f|_{\text{supp } f}$ est μ -mesurable sur $\text{supp } f$, et on en déduit que f est μ -mesurable sur X .

Cette caractérisation permet une nouvelle définition de l'espace $\mathcal{L}^1(X; E)$, définition qui permet de définir de manière analogue les espaces $\mathcal{L}^p(X; E)$, puis $L^p(X; E)$ pour $p < +\infty$.

Proposition-définition II.6. *On définit $\mathcal{L}^p(X; E)$ comme étant l'espace vectoriel des fonctions f μ -mesurables telle que $\|f\|_E \in \mathcal{L}^p(X)$.*

On définit $L^p(X; E)$ comme étant l'espace vectoriel quotient de $\mathcal{L}^p(X; E)$ par l'espace vectoriel des fonctions nulles presque partout. L'application $f \mapsto \left(\int \|f(x)\|_E^p d\mu(x) \right)^{1/p}$ est alors correctement définie, et est une norme sur $L^p(X; E)$ notée $\| \cdot \|_{L^p(X; E)}$

L'application linéaire $f_X \mapsto \int f d\mu \in E$ est également correctement définie pour $f \in L^1(X; E)$, elle est continue :

$$\left\| \int f d\mu \right\|_E \leq \int \|f\|_E d\mu$$

Démonstration. Les vérifications sont analogues au cas des fonctions à valeurs réelles, et laissées à la charge du lecteur. Pour la dernière inégalité, on commence par la montrer pour f simple, puis on fait appel à une suite approximante.

Définition II.7. *On définit $\mathcal{L}^\infty(X; E)$ comme étant l'ensemble des fonctions μ -mesurables pour laquelle $\|f\|_E$ est essentiellement bornée.*

On pose également $L^\infty(X; E)$ l'ensemble des classes de fonctions (pour la relation d'égalité presque partout) de $\mathcal{L}^\infty(X; E)$. Alors l'application $\sup_{x \in X} \|f(x)\|_E < +\infty$ passe au quotient et fait de $L^\infty(X; E)$ un espace vectoriel normé.

Remarque II.8. *Lorsque X n'est pas de mesure σ -finie, $L^\infty(X; E)$ ne contient pas les constantes (qui ne sont pas mesurables). Ainsi, cette définition n'est pas la même que dans le cas $E = \mathbb{R}$. Néanmoins, l'hypothèse de σ -finitude de la mesure est peu restrictive vis-à-vis des applications : bien souvent, X est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.*

Théorème II.9. *$L^p(X; E)$ est un espace complet.*

Démonstration. Les démonstrations (différentes selon que $p < +\infty$ ou $p = +\infty$) sont les mêmes que pour les fonctions à valeurs réelles, quitte à remplacer les barres de valeur absolue par des normes dans E .

Proposition II.10. *L'espace des fonctions simples $s(X; E)$ est dense dans $L^p(X; E)$.*

Démonstration. On vérifie que la démonstration de la proposition II.4 s'adapte sans aucun problème au cas L^p .

Corollaire II.11. *Soit D une partie dense de E , Φ une partie dense de $L^p(X)$. Alors*

$$\Phi \otimes D = \left\{ \sum_{i=1}^n d_i \phi_i \mid d_i \in D, \phi_i \in \Phi \right\}$$

est dense dans $L^p(X; E)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que toute fonction de $s(X; E)$ est limite dans $L^p(X; E)$ de fonctions de $\Phi \otimes D$; pour cela (par linéarité), on se ramène à montrer que toute fonction du type $x \mathbb{1}_A$ est limite dans $L^p(X; E)$ de fonctions de $\Phi \otimes D$.

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de D convergeant vers x , et $(\phi_n)_n$ une suite d'éléments de Φ convergeant vers $\mathbb{1}_A$. On a pour presque tout $y \in X$, $\|\phi_n(y)x_n - \mathbb{1}_A(y)x\|_E \leq \|\phi_n(y)x_n - \phi_n(y)x\|_E + \|\phi_n(y)x - \mathbb{1}_A(y)x\|_E \leq \|\phi_n(y)\| \|x_n - x\|_E + \|\phi_n(y) - \mathbb{1}_A(y)\| \|x\|_E$

d'où

$$\|\phi_n x_n - \mathbb{1}_A x\|_{L^p(X; E)} \leq \|\phi_n\|_{L^p(X)} \|x_n - x\|_E + \|\phi_n - \mathbb{1}_A\|_{L^p(X)} \|x\|_E$$

Le second membre tend vers 0 car ϕ_n converge ϕ dans L^p , et en particulier y est une suite bornée, et x_n tend vers x dans E .

Corollaire II.12. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est séparable $L^p(U; E)$ est séparable si $1 \leq p < +\infty$.

Démonstration. C'est une application directe du corollaire précédent car pour $1 \leq p < +\infty$, $L^p(U)$ est séparable. En effet, considérons $K_n = \{x \in U \mid |x| \leq n, d(x, U^c) \geq 1/n\}$. Soit Q l'ensemble des éléments du type $P \mathbb{1}_{K_n}$, où P est un polynôme sur $\mathbb{R}^d$ à coefficients rationnels. Q est un ensemble dénombrable et dense dans $L^p(U)$. Les vérifications sont laissées au lecteur à titre d'exercice.

Corollaire II.13. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, l'espace

$$\mathcal{C}_c^\infty(U) \otimes \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \left\{ \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \psi_i(y) \mid \phi_i \in \mathcal{C}^\infty(U), \psi_i \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \right\} \subset \mathcal{C}_c^\infty(U \times \Omega)$$

est dense dans $L^p(U; L^q(\Omega))$ pour $1 \leq p, q < +\infty$.

Remarque II.14. Dans les formules données dans ce corollaire, nous avons implicitement fait l'identification canonique entre fonctions définies sur $U \times \Omega$ et fonctions définies sur U à valeurs dans l'espace des fonctions définies sur Ω .

Démonstration. C'est une application directe du corollaire II.11.

3 Intégrale faible

Nous suggérons ici un autre cadre pour pouvoir définir une intégrale d'une fonction $f : X \rightarrow E$. Ce cadre est plus faible (au sens où l'on définit une intégrale dans un cas plus général). D'autre part, il est non constructif. Nous ne faisons qu'évoquer une autre possibilité de définition.

On suppose que E est réflexif (dans ce cas, les notions de mesurabilités faible et faible-* coïncident).

Soit $f : X \rightarrow E$ faiblement mesurable, telle que $\|f\|_E : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ soit intégrable (on dira que f est faiblement intégrable). L'application

$$L'_f : \begin{cases} E' \longrightarrow \mathbb{R} \\ l \longmapsto \int_X \langle l, f(x) \rangle_{E', E} d\mu(x) \end{cases}$$

est bien définie, et est linéaire continue. Comme E est réflexif, il existe un unique élément $L_f \in E$ telle que pour tout $l \in E'$, $\langle L_f, l \rangle_{E'', E'} = \langle l, L_f \rangle_{E', E}$. On pose alors

$$L_f = \int_X f d\mu$$

Lorsque f est μ -intégrable, f est faiblement intégrable et les deux intégrales (faibles et fortes) coïncident, ce que l'on montre à l'aide de la proposition II.3. D'autre part, lorsque E est réflexif et séparable, les deux notions d'intégrabilité coïncident (d'après les propositions I.27 et I.28).

Désormais, on ne considère plus que le point de vue « fort ».

III Quelques théorèmes généraux

On donne ici quelques généralisations de théorèmes vraies lorsque $E = \mathbb{R}$.

1 Autour de la convergence dominée

Théorème III.1 (Convergence Dominée). Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions μ -mesurables de X dans E . On suppose que :

- $f_n \rightarrow f$ μ -presque partout.
- il existe $g \in L^p(X; \mathbb{R}_+)$ tel que pour tout n , $\|f_n\|_E \leq g$.

Alors $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(X; E)$

Démonstration. C'est une application du théorème de convergence dominée (à valeurs réelles) à la suite de fonctions $\|f_n - f\|_E$.

Théorème III.2 (Réciproque). Pour $1 \leq p < +\infty$, si $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(X; E)$, alors, il existe une sous-suite f_{n_k} et $g \in L^p(X)$ telles que :

- $f_{n_k} \rightarrow f$ μ -presque partout.
- $\|f_{n_k}\|_E \leq g$
- pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon \subset X$ tel que $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ et f_{n_k} converge uniformément vers f sur $X \setminus A_\varepsilon$.

Démonstration. Sans que ce ne soit pas une application directe du théorème à valeurs réelles, la démonstration est complètement analogue, en remplaçant des barres de valeurs absolue par la norme dans E là où c'est nécessaire. Elle est laissée à titre d'exercice.

2 Autour de l'équintégrabilité

Définition III.3 (equiintégrabilité). Soit $1 \leq p < +\infty$. Une famille $\mathcal{A}$ de fonctions de $X \rightarrow E$ est dite p -équintégrable si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K de mesure finie telle que pour tout $f \in \mathcal{A}$, $\int_K \|f\|_E^p d\mu < \varepsilon$.
- pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout A mesurable tel que $\mu(A) < \delta$, on a $\int_A \|f\|_E^p d\mu \leq \varepsilon$.

Remarque III.4. Cela équivaut à la p -équintégrabilité de la famille de fonctions à valeurs réelles $(\|f_n\|_E)_n$.

Théorème III.5 (Vitali). Soit $1 \leq p < +\infty$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(X; E)$ qui converge presque partout vers f . Alors f_n converge vers f dans $L^p(X; E)$ si et seulement si la famille $(f_n)_n$ est équintégrable dans L^p .

Démonstration. C'est une application du théorème de Vitali à valeurs réelles à la famille de fonction $(\|f_n - f\|_E)_n$.

3 Autour du dual de L^p

Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on note $p' \in [1, +\infty]$ tel que $1/p + 1/p' = 1$. On note

$$T: \begin{cases} L^{p'}(X; E') \longrightarrow (L^p(X; E))' \\ g \longmapsto \left(T_g : f \mapsto \int_X \langle g(x), f(x) \rangle_{E', E} d\mu(x) \right) \end{cases}$$

Proposition III.6. L'application T est une isométrie de $L^{p'}(X, E')$ sur un sous-espace de $(L^p(X, E))'$

Démonstration. Tout d'abord, il est clair que T est linéaire.

D'après l'inégalité de Hölder, $\|T_g\|_{(L^p(X;E))'} \leq \|g\|_{L^{p'}(X;E)}$. Par densité de $s(X;E)$, il suffit donc de montrer que, si s est une fonction simple, alors $\|T_s\| \geq \|s\|$. Soit donc $s = \sum x_i 1_{A_i}$ (la somme étant finie); on a alors $\|s\|_{L^{p'}(X;E)}^{p'} = \sum \|x_i\|_E^{p'} \mu(A_i)$ pour $1 < p' < +\infty$.

D'après un corollaire du théorème de Hahn-Banach (voir par exemple [1]), pour tout i , il existe $y_i \in E'$ tel que $\|y_i\|_{E'} = 1$ et $\langle y_i, x_i \rangle_{E',E} = \|x_i\|_E$. Posons $t = \sum y_i \|x_i\|_E^{\frac{p}{p-1}} 1_{A_i}$. $t : X \rightarrow E'$ est une fonction simple et $\|t\|_{L^p(X;E)}^p = \sum \|x_i\|_E^{p'} \mu(A_i) = \|s\|_{L^{p'}(X;E)}^{p'}$.

De plus,

$$\begin{aligned} \int_X \langle s(x), t(x) \rangle_{E',E} d\mu(x) &= \sum_i \int_{A_i} \langle s(x), t(x) \rangle_{E',E} d\mu(x) \\ &= \sum_i \|x_i\|_E^{\frac{p}{p-1}} \langle y_i, x_i \rangle_{E',E} \mu(A_i) \\ &= \sum_i \|x_i\|_E^{p'} \mu(A_i) \\ &= \|s\|_{L^{p'}(X;E)}^{p'} \|t\|_{L^p(X;E)}^p \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\|T_s\|_{(L^p(X;E))'} \geq \|s\|_{L^{p'}(X;E)}$ lorsque $1 < p < +\infty$. Le même raisonnement convient lorsque $p = +\infty$, en convenant que $\frac{p}{p-1} = 1$.

Lorsque $p = 1$, on choisit $t = y_{i_0}$, où i_0 est choisi tel que $\|x_{i_0}\|_E = \max_i \|x_i\|_E$, et on a également

$$\int_X \langle s(x), t(x) \rangle_{E',E} d\mu(x) = \|s\|_{L^\infty(X;E')} \|t\|_{L^1(X;E)}.$$

Lemme III.7. *Lorsque E est de dimension finie, l'isométrie T est surjective.*

Démonstration. L'idée est de raisonner coordonnée par coordonnée, et d'appliquer le résultat connu lorsque $E = \mathbb{R}$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E , et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. Soit $G \in (L^p(X;E))'$. Toute fonction $f \in L^p(X;E)$ s'écrit $f = \sum f_i e_i$ avec $f_i = \langle e_i^*, f \rangle_{E',E} \in L^p(X)$, et on a alors $G = \sum H_i(f_i)$ où, par définition, $H_i = G(\cdot e_i) \in L^p(X)'$. D'après le cas réel, il existe $g_i \in L^{p'}(X)$ tel que pour tout $h \in L^p(X)$, on a $H_i(h) = \int_X g_i h d\mu$. Posons alors $g = \sum g_i e_i^*$, on trouve que $G = T_g$.

Théorème III.8. *Lorsque E' est séparable, T est surjective.*

Démonstration. Soit G un élément du dual de $L^p(X;E)$

Soit $(E_n)_n$ une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E , dont la réunion est dense dans E . On munit E_n de la norme induite par celle de E .

Par restriction, G induit un élément G_n du dual de $L^p(X;E_n)$. D'après le lemme III.7, il existe $g_n \in L^{p'}(X;E'_n)$ tel que

$$G_n(f) = \int_X \langle g_n(x), f(x) \rangle_{E',E} d\mu(x)$$

Pour $m \geq n$, notons $g_{m|E_n}$ l'application qui à presque tout x associe la restriction de la forme linéaire sur E_m $g_m(x)$ à E_n . On a alors, pour $f \in L^p(X;E_n)$

$$\int_X \langle g_n(x), f(x) \rangle_{E'_n,E_n} d\mu(x) = G_n(f) = G_m(f) = \int_X \langle g_m(x), f(x) \rangle_{E'_m,E_m} d\mu(x)$$

c'est à dire que, pour $f \in L^p(X;E_n)$, $T_{g_{m|E_n}}(f) = T_{g_n}(f)$, ou encore $T_{g_{m|E_n}} = T_{g_n}$. Or, T est injective (c'est une isométrie), donc $g_{m|E_n} = g_n$.

On peut donc définir, pour presque tout $x \in X : g(x) : \bigcup E_n \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = g_n(x)$ si $x \in E_n$.

◊ Alors $g(x)$ est continue (μ -presque partout). En effet, d'une part, $g_n(x)$ est continue, d'autre part. $\sup_n \|g(x)_{|E_n}\|_{E'_n} = \sup_n \|g_n(x)\|_{E'_n}$ est mesurable (comme supremum dénombrable de fonctions mesurables), et, comme $E_n \subset E_{n+1}$, la suite $(\|g_n(x)\|_{E'_n})$ est croissante, ce qui donne en particulier

$$\|g(x)\|_{(\cup E_n)'} = \lim_n \|g_n(x)\|_{E'_n}$$

- si $p = 1$, on a $\|g_n\|_{L^\infty(X; E'_n)} = \|G_n\|_{(L^1(X; E))'} \leq \|G\|_{(L^1(X; E))'} < +\infty$; donc pour μ -presque tout $x \in X$, $\sup_n \|g(x)_{|E_n}\|_{E'_n} \leq \|G\|_{(L^1(X; E))'} < +\infty$
- si $p > 1$, d'après le lemme de Fatou, on a :

$$\begin{aligned} \int_X \sup_n \|g(x)_{|E_n}\|_{E'_n}^{p'} d\mu(x) &= \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} \|g(x)_{|E_n}\|_{E'_n}^{p'} d\mu(x) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|g_n\|_{L^{p'}(X; E'_n)}^{p'} \\ &\leq \|G\|_{(L^p(X; E))'}^{p'} \end{aligned}$$

De sorte que, pour presque tout x , $\sup_n \|g(x)_{|E_n}\|_{E'_n} < +\infty$. Dit autrement, l'application linéaire $g(x) : \cup E_n \rightarrow \mathbb{R}$ est continue pour μ -presque tout x (pour la norme $\|\cdot\|_E$), et se prolonge en un uniquement élément de E' , toujours noté $g(x)$.

On a alors $\|g(x)\|_{E'} = \sup_n \|g(x)_{|E_n}\|_{E'_n}$, et donc grâce aux calculs précédent,

$$\| \|g\|_{E'} \|_{L^{p'}(X)} \leq \|G\|_{(L^p(X; E))'}.$$

◊ Montrons que $g : X \rightarrow E'$ est μ -mesurable. Comme E' est séparable, il suffit, d'après le corollaire I.27 de montrer que g est faiblement mesurable. Par densité, il suffit de montrer que pour $h \in \cup E_n$, $\langle g(x), h \rangle_{E', E}$ est mesurable; Or, si $h \in \cup E_n$, il existe n_0 tel que $h \in E_{n_0}$, et alors, $\langle g(x), h \rangle_{E', E} = \langle g_n(x), h \rangle_{E'_n, E_n}$, qui est bien mesurable car $g_n : x \rightarrow E'_n$ est mesurable.

$g : X \rightarrow E'$ est mesurable et $\|g\|_{L^{p'}(X; E')} = \| \|g\|_{E'} \|_{L^p(X)} < +\infty$.

◊ Montrons enfin que $T_g = G$. Comme on sait déjà que les deux membres sont des applications continues sur $L^p(X; E)$, il suffit de montrer qu'elle coïncident sur un ensemble dense. D'après le lemme II.11, il suffit de montrer que $T_g(f) = G(f)$ dès que f est de la forme $\sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$ avec $a_i \in \cup E_n$ et A_i mesurable dans X . Par linéarité, il suffit donc de vérifier que si $a \in \cup E_n$ et $A \subset X$, $T_g(a \mathbb{1}_A) = G(a \mathbb{1}_A)$.

Or, dans ce cas, a appartient à un E_{n_0} , et alors on a $T_g(a \mathbb{1}_A) = T_{g_{n_0}}(a \mathbb{1}_A) = G_{n_0}(a \mathbb{1}_A) = G(a \mathbb{1}_A)$. La démonstration est donc achevée.

IV Cas où $E = L^q(\Omega)$

Dans ce qui suit, on suppose que U est un ouvert de $\mathbb{R}^s$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On note λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Proposition IV.1. *Soit $1 \leq q < +\infty$. Soit $f : U \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. On suppose que pour presque tout $x \in U$, $\int_\Omega |f(x, y)|^q d\lambda_N(y) < +\infty$. Alors, la fonction définie presque partout*

$$F : \begin{cases} U \longrightarrow L^q(\Omega) \\ x \longmapsto f(x, \cdot) \end{cases}$$

est λ_s -mesurable.

Démonstration. On sait que $L^q(\Omega)$ est séparable; comme de plus U est de mesure σ -finie, il suffit donc de montrer que pour tout $d \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, $\|f(\cdot) - d\|_{L^q(\Omega)} : U \rightarrow \mathbb{R}_+$ est mesurable. Or,

comme $|f(x, y) - d(y)|^q$ est une fonction positive et mesurable sur $U \times \Omega$, le théorème de Fubini-Tonelli affirme que

$$H : x \mapsto \int_{\Omega} |f(x, y) - d(y)|^q d\lambda_N(y) = \|F(x) - d\|_{L^q(\Omega)}^q$$

est mesurable, ce qui conclut la preuve.

Nous avons également une sorte de réciproque :

Proposition IV.2. *Cette fois, on suppose $1 \leq q \leq +\infty$. Soit $F : U \rightarrow L^q(\Omega)$ μ -mesurable. Il existe une fonction $f : U \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que pour presque tout $x \in U$, on a $F(x) = f(x, \cdot)$.*

Remarque IV.3. *Nous serions tentés de définir f par $f(x, y) = F(x)(y)$ « presque-partout ». Le problème est que l'on ne peut pas le faire sans précaution. En effet, hors d'un ensemble $O \subset U$ de mesure nulle, on peut définir $F(x)(y)$ λ_N -presque partout; ceci veut dire que pour presque tout x , il existe un ensemble V_x de Ω de mesure nulle où l'on peut « définir » $F(x)(y)$. Nous ne pouvons assurer que $\{(x, y) \in U \times \Omega \mid x \notin O, y \notin V_x\}$ soit mesurable, et a fortiori de mesure nulle. Et quand bien même ce serait le cas, il est improbable qu'une telle façon de construire $F(x)(y)$ définisse une fonction mesurable (au vu des choix possibles de chaque représentant mesurable à x fixé)*

Démonstration. Nous allons de nouveau recourir à la convergence uniforme.

◊ On remarque qu'une fonction simple $U \rightarrow L^q(\Omega)$ est mesurable sur $U \times \Omega$. En effet, on constate que, si $f \in L^q(\Omega)$ la fonction $(x, y) \mapsto f(y)$ est mesurable, ainsi que la fonction $(x, y) \mapsto \mathbb{1}_A(x)$. Il en est donc de même de leur produit, et donc, par linéarité, de toute fonction simple.

◊ On démontre le lemme suivant :

Lemme IV.4. *Soit $s_n : X \rightarrow L^q(\Omega)$ des fonctions simples qui convergent uniformément vers $f : X \rightarrow L^q(\Omega)$. Alors, il existe une suite extraite $(s_{n_k})_k$ telle que la suite de fonctions mesurables (notées également s_n)*

$$s_n : \begin{cases} X \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto [s_n(x)](y) \end{cases}$$

convergent $\mu \otimes \lambda_N$ -presque partout sur $X \times \Omega$ vers une fonction g . De plus, pour μ -presque tout $x \in X$, $g(x, \cdot) = f(x)$ dans $L^p(\Omega)$.

L'idée de la preuve est de suivre la démonstration de la deuxième assertion du théorème III.2, réciproque du théorème de convergence dominée, et de maintenir une uniformité en $x \in X$.

Démonstration. On commence par extraire une sous-suite de sorte que

$$\|s_{n_k} - s_{n_{k-1}}\|_{L^\infty(X; L^q(\Omega))} \leq 2^{-2k}.$$

On écrit $s_{n_k} = \sum_{i=1}^{i_k} \mathbb{1}_{A_{i,k}} g_{i,k}$ avec $A_{i,k} \subset X$ et $g_{i,k} \in L^p(\Omega)$

On se donne un représentant de $g_{i,k}$, défini hors d'un ensemble $B_{i,k} \subset \Omega$ de mesure nulle. L'ensemble $J = \{(i, k) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i \leq i_k\}$ est dénombrable, l'ensemble $B = \bigcup_{(i,k) \in J} B_{i,k}$ est donc mesurable et de mesure nulle, et les $g_{i,k}$ sont tous définis sur $\Omega \setminus B$, donc $(x, y) \mapsto s_{n_k}(x)(y)$ est défini partout sur $X \times (\Omega \setminus B)$ et est mesurable.

La série de fonctions de terme général $(x, y) \mapsto |s_{n_k}(x, y) - s_{n_{k-1}}(x, y)|$ converge simplement vers une fonction h dans $\mathbb{R}_+$. De plus, d'après le théorème de convergence monotone (version séries),

$$\sum \int_{\Omega} \|s_{n_k}(x, y) - s_{n_{k-1}}(x, y)\|_E dy = \int_{\Omega} \sum \|s_{n_k}(x, y) - s_{n_{k-1}}(x, y)\|_E dy < +\infty$$

Ainsi, pour tout $x \in X$, la propriété suivante est vérifiée pour presque tout $y \in \Omega$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |s_{n_k}(x, y) - s_{n_{k-1}}(x, y)| < +\infty .$$

D'autre part, comme chaque s_n est mesurable sur $X \times \Omega$, l'ensemble

$$\left\{ (x, y) \in X \times \Omega \mid \sum \|s_{n_k}(x, y) - s_{n_{k-1}}(x, y)\|_E < +\infty \right\}$$

est mesurable. Il est donc de mesure nulle, d'après un corollaire du théorème de Fubini Tonelli, dont nous donnons (sans démonstration) l'énoncé ci-dessous :

Lemme IV.5. *Soient X et Y deux espaces mesurés, de mesure associées μ et ν . Soit $\mathbb{P}(x, y)$ une propriété sur $X \times Y$, mesurable (c'est à dire que $\{(x, y) \in X \times Y \mid \mathbb{P}(x, y)\}$ est mesurable). Alors, si, pour μ -presque tout x , $\nu(\{y \in Y \mid \mathbb{P}(y, x)\}) = 0$, on a $\mu \otimes \nu(\{(x, y) \in X \times Y \mid \mathbb{P}(x, y)\}) = 0$*

On a donc une convergence $\mu \otimes \lambda_N$ -presque partout de la suite (s_{n_k}) , vers une fonction g . Enfin, pour tout $x \in X$, $s_{n_k}(x)$ converge λ_N -presque partout vers $g(x)$, d'autre part converge dans $L^p(\Omega)$ vers $f(x)$. L'une de ses suites extraites converge donc vers $f(x)$ λ_N -presque partout. Par unicité de la limite, on a alors $f(x) = g(x)$ λ_N -presque partout. Ceci termine la démonstration du lemme.

◊ Supposons d'abord U de mesure finie.

Soit $s_n : U \rightarrow L^q(\Omega)$ une suite de fonctions simples qui converge λ_d -presque partout vers f . Soit $m \in \mathbb{N}$; d'après le théorème d'Egorov, il existe $A_m \subset U$ tel que $\mu(U \setminus A_m) < 1/m$ et s_n converge uniformément vers f sur A_m . Quitte à remplacer A_m par $\bigcup_{m' \leq m} A_{m'}$, on peut supposer que la suite d'ensembles $(A_m)_m$ est croissante.

Appliquons une première fois le lemme à la suite $(s_{n|A_1})_n$: Il existe une suite extraite $(s_{n_{k,1}})_k$ qui converge simplement vers une fonction f_1 sur $A_1 \times (\Omega \setminus B)$. Appliquons une deuxième fois le lemme à la suite $(s_{n_{k,1}|A_2})_n$: il existe une suite $(n_{k,2})_k$ extraite de la suite $(n_{k,1})_k$ telle que la suite $(s_{n_{k,2}})_k$ qui converge simplement vers une fonction f_2 sur $A_2 \times (\Omega \setminus B)$. De plus, $f_2|_{A_1} = f_1$. Continuons le procédé. On construit une famille de suite $\{(n_{k,p})_k \mid p \geq 1\}$, chaque suite étant extraite de la précédente, et une suite de fonctions $(f_p)_p$ définies sur $A_p \times (\Omega \setminus B)$ telles que $f_p|_{A_r \times (\Omega \setminus B)} = f_r$ pour $r \leq p$, et $s_{n_{k,p}}$ converge simplement vers f_p sur $A_p \times (\Omega \setminus B)$. Appelons toujours par f_p son prolongement (mesurable) par 0 hors de $A_p \times (\Omega \setminus B)$. Soit f la fonction définie sur $(\bigcup A_p) \times (\Omega \setminus B)$ par $f(x, y) = f_p(x, y)$ pour $x \in A_p$ et $y \in \Omega \setminus B$, $f(x, y) = 0$ autrement. La suite de fonctions $(f_p)_p$ converge simplement vers f sur $(\bigcup A_p) \times (\Omega \setminus B)$, donc presque partout sur $U \times \Omega$. La fonction f est donc mesurable. D'autre part, $f(x, \cdot)$ coïncide avec $F(x)$ sur $U \setminus B$ (donc λ_d -presque partout). La proposition est donc démontrée : $F(x) = f(x, \cdot)$ presque partout.

◊ Cas général : comme f est μ -mesurable, U peut être supposé de mesure σ -finie, donc réunion croissante d'ensembles U_n , chacun de mesure finie. $f_n = \mathbb{1}_{U_n} f$ est alors une suite de fonctions mesurables sur $U_n \times \Omega$, donc sur $U \times \Omega$, et qui converge μ -presque partout vers f . f est donc mesurable.

Proposition IV.6. *Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et $1 \leq q < +\infty$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) $f \in L^p(U; L^q(\Omega))$
- ii) $f : U \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable et vérifie

$$\int_U \left(\int_{\Omega} |f(x, y)|^q d\lambda_N(y) \right)^{p/q} d\lambda_s(x) < +\infty \quad \text{si } p < +\infty$$

$$\exists M > 0 \quad \int_{\Omega} |f(x, y)|^q d\lambda_N(y) \leq M \quad \text{pour } \lambda_s\text{-presque tout } x \in U \quad \text{si } p = +\infty$$

Corollaire IV.7. $L^p(U \times \Omega)$ est canoniquement isométrique à $L^p(U; L^p(\Omega))$ si $p < +\infty$.

En revanche,

Proposition IV.8. La proposition IV.6 n'est pas vraie lorsque $q = +\infty$: La fonction

$$g = e^{-|x|} \mathbb{1}_{\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| > |y|\}}$$

n'est même pas mesurable de $\mathbb{R}$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$, bien qu'elle vérifie évidemment

$$x \mapsto \|f(x, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \in L^p(\mathbb{R}) .$$

Démonstration. La mesurabilité de g équivaut à la mesurabilité de $f : x \mapsto e^{|x|}g(x)$. Dorénavant, nous travaillons sur f . Commençons par remarquer que, si $|x| \neq |y|$, alors $\|f(x) - f(y)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$ (en effet, $f(x) - f(y) = \mathbb{1}_{[-|x|, -|y|] \cup [|y|, |x|]}$ si $|x| > |y|$) et $f(x) = f(-x)$. Cette propriété de « très forte discontinuité » laisse déjà présager le caractère non mesurable de $f : \mathbb{R} \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$.

Considérons S un ensemble non mesurable dans $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0, et U l'ouvert (donc mesurable) de $L^\infty(\mathbb{R})$ défini par :

$$U = \bigcup_{s \in S} B_{L^\infty(\mathbb{R})}(f(s), 1/2)$$

Alors,

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= \bigcup_{s \in f} f^{-1}(B_{L^\infty(\mathbb{R})}(f(s), 1/2)) \\ &= \bigcup_{s \in S} \{x \in \mathbb{R} \mid \|f(s) - f(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1/3\} \\ &= \bigcup_{s \in S} \{s, -s\} \\ &= S \end{aligned}$$

ce qui montre bien que f n'est pas mesurable.

Remarque IV.9. Contrairement à la présentation adoptée, bien que ce soit vrai, il n'est pas trivial que pour toute fonction mesurable $f : U \times \Omega$, l'application $x \mapsto \|f(x, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{y \in \Omega} |f(x, y)|$ (à valeurs dans $\mathbb{R}_+$) est mesurable, du fait que l'ensemble Ω n'est pas dénombrable. Esquissons une idée de preuve :

Si Ω est de mesure finie, on commence par montrer que, pour presque tout $x \in U$,

$$\sup_{y \in \Omega} |f(x, y)| = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f(x, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} = \lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \in \mathbb{N}}} \|f(x, \cdot)\|_{L^p(\Omega)}$$

(assertion laissée en exercice). D'après Fubini-Tonelli, $x \mapsto \|f(x, \cdot)\|_{L^p(\Omega)}$ est mesurable, donc f est mesurable comme limite simple de fonctions mesurables.

Si Ω est de mesure σ -finie, on fait comme d'habitude, en considérant une suite croissante $(\Omega_n)_n$ d'ensembles de mesure finie et de réunion Ω . La suite de fonctions

$$(g_n : x \mapsto \sup_{y \in \Omega_n} |f(x, y)|)_n$$

est une suite de fonctions mesurables d'après le cas précédent, et converge presque partout (exercice simple, mais qui n'est pas qu'un jeu d'écriture) vers $x \mapsto \sup_{y \in \Omega} |f(x, y)|$.

1 Compatibilité des définitions de $\int_X f(x, \cdot) d\mu(x)$ pour $f : U \rightarrow L^q(\Omega)$

Soit $f \in L^1(U; L^q(\Omega))$. On sait maintenant définir $\int_X f(x) d\mu(x)$ comme élément de $L^q(\Omega)$. D'autre part, f est une fonction mesurable sur $U \times \Omega$ et, au moins dans certains cas, on peut définir une fonction $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$. Obtient-on la même fonction sur $L^q(\Omega)$? La réponse est oui.

Proposition IV.10. *Soit $f \in L^1(U; L^q(\Omega))$ et g un représentant de f mesurable sur $U \times \Omega$. Alors pour presque tout $y \in \Omega$ l'intégrale $\int_X g(x, y) d\mu(x)$ existe, et l'application $y \mapsto \int_X g(x, y) d\mu(x)$ est un représentant de $\int_X f(x) d\mu(x)$ dans $L^q(\Omega)$.*

Démonstration. $\diamond$ Montrons que pour presque tout $y \in \Omega$, on a $\int_X |f(x, y)| d\mu(x) < +\infty$. Comme Ω est de mesure σ -finie, il suffit de montrer que pour toute partie $\Omega' \subset \Omega$ de mesure finie, on a $\int_X |f(x, y)| < +\infty$. Or, $L^q(\Omega') \subset L^1(\Omega')$, avec injection continue. Ainsi, $f \in L^1(U; L^1(\Omega'))$ (en identifiant f avec l'application $x \mapsto f(x)|_{\Omega'}$). D'après le corollaire IV.7, $f \in L^1(U \times \Omega)$ et, d'après le théorème de Fubini-Tonelli, l'application $y \mapsto \int_X |f(x, y)| d\mu(x)$ est dans $L^1(\Omega')$, et en particulier est presque partout finie. D'après le théorème de Fubini (pour les fonctions à valeurs réelles), l'application définie presque partout $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ est mesurable.

$\diamond$ Montrons que les éléments $G : y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ et $F = \int_X f(x) d\mu(x)$ coïncident comme classe de fonctions mesurables. Pour cela, on montre que pour toute fonction $g \in L^{q'}(\Omega)$, on a l'égalité suivante (et l'existence du membre de gauche) :

$$\int g(y) G(y) d\nu(y) = \int g(y) F(y) d\nu(y)$$

D'après l'inégalité de Hölder, pour presque tout $x \in X$, l'application $y \mapsto f(x, y)g(y)$ est dans $L^1(\Omega)$, de norme majorée par $\|f(x)\|_{L^q} \|g\|_{L^{q'}}$, et alors, on a, d'après Fubini-Tonelli

$$\int_{\Omega} g(y) G(y) d\nu(y) = \int_U \int_{\Omega} g(y) f(x, y) d\nu(y) d\mu(x)$$

D'autre part, comme l'application $T : h \mapsto \int_{\Omega} gh d\nu$ est linéaire continue de $L^q(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, la proposition II.3 stipule que

$$T(F) = \int_{\Omega} g(y) F(y) d\nu(y) = \int_U \left[T(f(x, \cdot)) \right] d\mu(x) = \int_U \int_{\Omega} g(y) f(x, y) d\nu(y) d\mu(x)$$

L'égalité cherchée est démontrée.

V Annexe

1 Démonstration des lemmes techniques

Démonstration (du lemme I.16). On construit sans difficulté par récurrence la famille (k_n) de la manière suivante :

- k_0 est le plus petit entier tel que $\|h_{0,k} - g_0\|_{\infty} \leq 1$ pour tout $k \geq k_0$.
- k_{n+1} est le plus petit entier strictement supérieur à k_n tel que $\|h_{n,k} - g_n\|_{\infty} \leq 1/n$

On a alors pour tout n :

$$\|h_{n,k_n} - g\|_\infty \leq \|h_{n,k_n} - g_n\|_\infty + \|g_n - g\| \leq 1/n + \|g_n - g\|_\infty \rightarrow 0$$

Démonstration (du lemme I.22). L'espace $E \cap F$ est de manière sous-entendue munie de la norme $\|\cdot\|_{E \cap F} = \|\cdot\|_E + \|\cdot\|_F$. C'est alors également un espace de Banach.

Rappelons la définition d'une base d'ouvert d'un espace topologique : C'est une famille d'ouvert (E_i) qui contient une base de voisinage de tous points ; c'est-à-dire que pour tout point x et tout voisinage V de x (ou bien, de manière équivalente, tout ouvert contenant x , ou toute boule de centre x dans un espace métrique), il existe i tel que $U_i \subset V$.

Rappelons que pour un espace métrique la séparabilité équivaut à l'existence d'une base dénombrable d'ouverts. Soient donc $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (resp. $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$) une base dénombrable d'ouverts de E (resp : de F). Montrons que la famille dénombrable $(U_i \cap V_j)_{i,j}$ est une base d'ouverts.

- $U_i \cap V_j$ est ouvert : Soit $x \in U_i \cap V_j$. Comme U_i est ouvert dans E et que V_j est ouvert dans F , il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_E(x, \varepsilon) \subset U_i$ et $B_F(x, \varepsilon) \subset V_j$, donc

$$B_{E \cap F}(x, \varepsilon) \subset (B_E(x, \varepsilon) \cap B_F(x, \varepsilon)) \subset U_i \cap V_j$$

ce qui montre que $U_i \cap V_j$ est ouvert dans $E \cap F$

- Montrons que $(U_i \cap V_j)_{i,j}$ est une base d'ouverts. Soit donc $x \in E \cap F$, et $\varepsilon > 0$. on vérifie que $(B_E(x, \varepsilon/2) \cap B_F(x, \varepsilon/2)) \subset B_{E \cap F}(x, \varepsilon)$. Comme (U_i) (resp (V_j)) est une base d'ouvert de E (resp. F), il existe i (resp : j) tel que $x \in U_i \subset B_E(x, \varepsilon/2)$ (resp. $x \in V_j \subset B_F(x, \varepsilon/2)$). On a alors $x \in U_i \cap V_j \subset B_{E \cap F}(x, \varepsilon)$, ceci quelque soit $\varepsilon > 0$. cqfd.

Références

- [1] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, 1986.
- [2] Jérôme Droniou. Intégration et espaces de sobolev à valeurs vectorielles, téléchargeable à www-gm3.univ-mrs.fr/polys/gm3-02. 2001.
- [3] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1995.
- [4] Gerald B. Folland. *Real Analysis : Modern Techniques and their Applications*. Princeton University Press, 1983.
- [5] Edwards R.E. *Functional Analysis, theory and applications*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1965.
- [6] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 1998.