UNIVERSITE DE RENNES 1

Jean Starynkévitch

Rapport de stage de DEA

septembre 2002

Existence globale de solutions fortes au système de Maxwell-Landau-Lifshitz en dimension 2

Responsable de stage :
Guy Métivier – Professeur
MAB – Université de Bordeaux 1.

I Problème

On se donne une fonction $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant les hypothèses suivantes

– pour tout m et h de $\mathbb{R}^3$,

$$f(m,h) \cdot m = 0 \tag{I.1}$$

– pour tout $\mathrm{R} > 0$, il existe une constante $\mathrm{C_R}$ telle que pour tout m et m' de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $|m| \leqslant \mathrm{R}$ et $|m'| \leqslant \mathrm{R}$, et tout h, h' de $\mathbb{R}^3$,

$$|f(m,h)| \leqslant \mathrm{C_R}|h| \tag{I.2}$$

$$|f(m,h) - f(m',h')| \leqslant \mathrm{C_R}(|m-m'|\,|h| + |h-h'|) \tag{I.3}$$

Expérimentalement, on prend généralement f définie par

$$f(m,h) = -m \wedge h - \alpha\, m \wedge (m \wedge h) \tag{I.4}$$

On considère le système de Maxwell couplé à l'équation de Landau-Lifshitz :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varepsilon\, \partial_t \mathbf{E} - \mathbf{rot\ H} &=& 0 \\ \mu_0\, \partial_t(\mathbf{H}+\mathbf{M}) + \mathbf{rot\ E} &=& 0 \\ \partial_t \mathbf{M} &=& f(\mathbf{M},\mathbf{H}) \\ && \\ (\mathbf{E},\mathbf{H})|_{t=0} &=& (\mathbf{E}_0,\mathbf{H}_0) \\ \mathbf{M}|_{t=0} &=& \mathbf{M}_0 \end{array}\right. \tag{I.5}$$

Le but de ce travail est de présenter une démonstration de l'existence de solutions « fortes » à ce système en 2D.

On s'appuye essentiellement sur le chapitre 2 de la thèse d'Houssem Haddard [1]; certaines preuves sont cependant simplifiées au niveau des détails techniques.

Notation. On note, pour $\mathrm{T} > 0$, $\mathcal{Q}_\mathrm{T} = \mathbb{R}^2 \times [\,0\,;\mathrm{T}\,]$ et $\mathcal{Q}_\infty = \mathbb{R}^2 \times [\,0\,;+\infty\,[$

Définition I.1. On appelle solution forte 2D du système I.5 un triplet $(\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{M})$ tel que chacun des champs $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{M}$, $\partial_t\mathbf{E}$, $\partial_t\mathbf{H}$, $\partial_t\mathbf{M}$ soit dans $\mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}([\,0\,;\mathrm{T}\,[\,,\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2))$ et que le système d'équations I.5 soit vérifié presque partout.

On dit que la solution est globale si elle est définie sur $\mathcal{Q}_\infty$.

II Quelques notations et théorèmes prérequis

Le terme 2D se rapporte à la dimension des *variables* d'espace : les fonctions que l'on considère sont définies sur $\mathbb{R}^2$ ou une partie, mais toujours à valeurs dans $\mathbb{R}^3$; une autre façon de dire les choses est qu'il n'y a pas de dépendance en la troisième variable d'espace. Par exemple, si $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_x, \boldsymbol{u}_y, \boldsymbol{u}_z)$ est une « distribution de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ », on a $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{u} = (\partial_y \boldsymbol{u}_z, -\partial_x \boldsymbol{u}_z, \partial_x \boldsymbol{u}_y - \partial_y \boldsymbol{u}_x)$.

Sauf précision contraire, les dérivations faites s'entendent au sens des distributions.

On définit $\mathrm{L}^2_{||}(\mathbb{R}^2) = \{\boldsymbol{v} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)^3 \mid \mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} = 0\}$ et $\mathrm{L}^2_\perp(\mathbb{R}^2) = \{\boldsymbol{v} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)^3 \mid \operatorname{div}\ \boldsymbol{v} = 0\}$. Nous avons alors la décomposition orthogonale suivante :

$$\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)^3 = \mathrm{L}^2_{||}(\mathbb{R}^2) \oplus \mathrm{L}^2_\perp(\mathbb{R}^2) \tag{II.1}$$

On note $\mathrm{P}_{||}$ et $\mathrm{P}_\perp$ les projecteurs (orthogonaux) associés à cette décomposition.

Proposition II.1. *Les opérateurs* $\mathrm{P}_{||}$ *et* $\mathrm{P}_{\perp}$ *se prolongent en opérateurs continus de* $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^2)^3$ *dans lui-même pour tout* $p \in \,]1\,;+\infty[$. *De plus, si* A_p *désigne la norme de* $\mathrm{P}_{||}$ *(resp :* $\mathrm{P}_{\perp}$*) comme endomorphisme de* $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^2)^3$*, il existe une constante* A *telle que pour tout* $p \geqslant 2$*, on ait :*

$$\mathrm{A}_p \leqslant \mathrm{A}p \tag{II.2}$$

La preuve de ce résultat est établie dans [2], page 22.

Notation. On notera $\mathrm{H}(\mathbf{rot}\,,\mathbb{R}^2) = \{\boldsymbol{v} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)^3 \mid \mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)^3\}$

III Hypothèses et énoncé du théorème

On considère que Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$. On fait les hypothèses suivantes :

- il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tels que $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon(x) \leqslant \varepsilon_2$ pp $x \in \mathbb{R}^2$.
- $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \in \mathrm{H}(\mathbf{rot}\,,\mathbb{R}^2)^2$, $\mathbf{M}_0 \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^2)^3$ et $\operatorname{div}(\mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_0) = 0$.
- $\operatorname{supp} \mathbf{M}_0 \subset \Omega$.

Notation. On pose $\Omega_{\mathrm{T}} = \Omega \times [\,0\,;\mathrm{T}\,]$.

Nous avons alors le théorème suivant.

Théorème III.1. *Sous les hypothèses précédentes, le problème de Cauchy I.5 admet une unique solution forte. De plus, cette solution est globale.*

Dans ce rapport, on démontre l'existence globale de la solution.

IV Régularisation

1 Procédé de régularisation

On se donne une fonction ϕ régulière (de sorte que sa tranformée de Fourier inverse soit dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^2)$), telle que $\phi(\boldsymbol{\xi}) = 1$ si $|\boldsymbol{\xi}| \leqslant 1$ et $\phi(\boldsymbol{\xi}) = 0$ si $|\boldsymbol{\xi}| \geqslant 2$. On pose aussi $\phi_\lambda(\boldsymbol{\xi}) = \phi\left(\dfrac{\boldsymbol{\xi}}{\lambda}\right)$

On définit l'opérateur S^λ par la formule

$$\widehat{\mathrm{S}^\lambda u}(\boldsymbol{\xi}) = \phi_\lambda(\boldsymbol{\xi})\,\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) \tag{IV.1}$$

Si l'on note $\overline{\overline{v}}$ la transformée de Fourier inverse v, S^λ désigne également l'opérateur de convolution par $\overline{\widehat{\phi}_\lambda}$, et du fait que $\|\overline{\widehat{\phi}_\lambda}\|_{\mathrm{L}^1} = \|\overline{\widehat{\phi}}\|_{\mathrm{L}^1}$, les propriétés classiques du produit de convolution conduisent au fait que la famille $(\mathrm{S}_\lambda)_\lambda$ est une famille d'opérateurs agissant de L^p dans lui-même, et de normes uniformément bornées en λ. De plus, par construction, cette famille est une identité approchée dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$.

D'autre part, si $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$, on a, d'après la formule d'inversion de Fourier et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\mathrm{S}^\lambda u\,(\boldsymbol{x})| \leqslant \frac{1}{2\pi}\underbrace{\|\phi_\lambda\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}}_{=\lambda\|\phi\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}}\|\widehat{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \tag{IV.2}$$

d'où :

$$\|\mathrm{S}^\lambda u\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^2)} \leqslant \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}\|u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \tag{IV.3}$$

2 Problème régularisé

On considère la famille de problèmes indexés par λ

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varepsilon\,\partial_t \mathbf{E}^\lambda - \mathbf{rot}\ \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda &=& 0 \\ \mu_0(\partial_t \mathbf{H}^\lambda + \partial_t \mathbf{M}^\lambda) + \mathbf{rot}\ \mathrm{S}^\lambda \mathbf{E}^\lambda &=& 0 \\ \partial_t \mathbf{M}_\lambda &=& f(\mathbf{M}^\lambda, \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda) \\ (\mathbf{E}^\lambda, \mathbf{H}^\lambda)|_{t=0} &=& (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \\ \mathbf{M}^\lambda|_{t=0} &=& \mathbf{M}_0 \end{array}\right. \tag{IV.4}$$

Proposition IV.1. *Sous les hypothèses III, le problème de Cauchy IV.4 admet une unique solution forte* $(\mathbf{E}^\lambda, \mathbf{H}^\lambda, \mathbf{M}^\lambda) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)^3 \times \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)^3 \times \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^2)^3)$

Démonstration. Le problème peut en fait s'écrire sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre dans l'espace de Banach $\mathrm{X} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)^3 \times \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)^3 \times \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^2)^3$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}\mathrm{U}^\lambda}{\mathrm{d}t} &=& \mathrm{G}^\lambda(\mathrm{U}^\lambda) \\ \mathrm{U}^\lambda(0) &=& (\mathbf{E}_0, \mathbf{M}_0, \mathbf{H}_0) \end{array}\right. \tag{IV.5}$$

où l'on a posé $\mathrm{U}^\lambda = (\mathbf{E}^\lambda, \mathbf{H}^\lambda, \mathbf{M}^\lambda)$ et, pour $\mathrm{U} = (\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$,

$$\mathrm{G}(\mathrm{U}) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{rot}\ \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}, -\frac{1}{\mu_0}\mathbf{rot}\ \mathrm{S}^\lambda \mathbf{E} - f(\mathbf{M}, \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}), f(\mathbf{M}, \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H})\right)$$

Afin d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipshitz, montrons que l'application G^λ est localement lipshitzienne de X dans lui-même.

Si $\mathbf{E} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$, on a $\widehat{\mathbf{rot}\ \mathrm{S}^\lambda \mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi}) = \phi_\lambda(\boldsymbol{\xi})\, i\boldsymbol{\xi} \wedge \widehat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi})$. Compte tenu du fait que $\phi_\lambda(\boldsymbol{\xi}) = 0$ si $|\boldsymbol{\xi}| \geqslant 2\lambda$ et de la formule de Parseval, il vient que $\|\mathbf{rot}\ \mathrm{S}^\lambda \mathbf{E}\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant 2\lambda \|\mathbf{E}\|_{\mathrm{L}^2}$.

D'autre part, d'après la propriété I.2 ainsi que la proposition IV.3, si $\mathbf{H} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)^3$ et $\mathbf{M} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^2)^3$, alors $f(\mathbf{M}, \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}) \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^2)^3 \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)^3$. De la sorte, G définit bien une application de X dans lui-même.

Pour montrer que G est localement lipshitzienne, il reste principalement à vérifier que l'application $(\mathbf{M}, \mathbf{H}) \mapsto f(\mathbf{M}, \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H})$ est localement lipshitzienne de $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^2)^3 \times \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)^3$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)^3$ d'une part (ce qui résulte immédiatement de la proriété I.3), et dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^2)^3$ (ce qui découle des deux proriétés I.3 et IV.3). □

Le théorème de Cauchy-Lipshitz assure l'existence et l'unicité d'une solution maximale $\mathrm{U}^\lambda \in \mathcal{C}^1([\,0\,;\mathrm{T}\,[\,, \mathrm{X})$. De plus, pour montrer que la solution est globale, il nous suffit de montrer qu'elle n'explose pas en temps fini ; ceci est une conséquence des résultats prouvés dans la section suivante.

V Estimations a priori pour le problème régularisé

Lemme V.1. *On a :*

$$|\mathbf{M}^\lambda(\boldsymbol{x}, t)| = |\mathbf{M}_0(\boldsymbol{x})| \tag{V.1}$$

Démonstration. D'après le système d'équations et la propriété I.1, on a :

$$\frac{1}{2}\partial_t |\mathbf{M}^\lambda(\boldsymbol{x}, t)|^2 = f(\mathbf{M}^\lambda(\boldsymbol{x}, t), \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda(\boldsymbol{x}, t)) \cdot \mathbf{M}^\lambda(\boldsymbol{x}, t) = 0$$

Le résultat à trouver est alors immédiat. □

Notation. pour $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)^3$, on pose

$$\mathcal{E}(\mathbf{E},\mathbf{H}) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon|\mathbf{E}|^2 + \mu_0|\mathbf{H}|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{V.2}$$

Lemme V.2. *On a :*

$$\mathcal{E}(\mathbf{E}^\lambda(t),\mathbf{H}^\lambda(t)) \leqslant e^{2\mathrm{C}_{\mathrm{M}_0}t}\mathcal{E}(\mathbf{E}_0,\mathbf{H}_0) \tag{V.3}$$

où $\mathrm{M}_0 = \|\mathrm{M}_0\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^2)}$ *et* $\mathrm{C}_{\mathrm{M}_0}$ *est la constante intervenant dans I.2.*

Démonstration. Montrons d'abord la formule suivante :

Lemme V.3. *Soient* $\boldsymbol{a}$ *et* $\boldsymbol{b}$ *deux éléments de* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})^3$ *; on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{rot}\ \mathrm{S}^\lambda \boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{b}\, d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{a}\,(\mathbf{rot}\ \mathrm{S}^\lambda \boldsymbol{b})\, d\boldsymbol{x} \tag{V.4}$$

Notation. Ici, le $\cdot$ désigne le produit scalaire canonique réel, de sorte que le produit scalaire complexe est $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \mapsto \boldsymbol{a}\cdot\overline{\boldsymbol{b}}$

Démonstration. La formule de Parseval fournit :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{rot}\ \mathrm{S}^\lambda \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{x}))\cdot\overline{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\mathbf{rot}\ \mathrm{S}^\lambda}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\xi})\cdot\overline{\widehat{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{\xi})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \phi_\lambda(\boldsymbol{\xi})\,(i\boldsymbol{\xi}\wedge\widehat{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\xi}))\cdot\overline{\widehat{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{\xi})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} i\,\phi_\lambda(\boldsymbol{\xi})\,(\boldsymbol{\xi}\wedge\widehat{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\xi}))\cdot\overline{\widehat{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{\xi})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} i\,\phi_\lambda(\boldsymbol{\xi})\,[\boldsymbol{\xi},\widehat{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\xi}),\overline{\widehat{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{\xi})}]\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} -i\,\phi_\lambda(\boldsymbol{\xi})\,[\boldsymbol{\xi},\overline{\widehat{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{\xi})},\widehat{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\xi})]\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \phi_\lambda(\boldsymbol{\xi})\,\overline{(i\boldsymbol{\xi}\wedge\widehat{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{\xi}))}\cdot\widehat{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{x})\cdot\overline{(\mathbf{rot}\ \mathrm{S}^\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}))}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

□

Multiplions scalairement la première équation de IV.4 par $\mathbf{E}^\lambda(t)$, la seconde par $\mathbf{H}^\lambda(t)$ et faisons la somme des deux égalités. Compte tenu de la formule V.4 appliquée avec $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\mathbf{E}^\lambda(t),\mathbf{H}^\lambda(t))$, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(\mathbf{E}^\lambda(t),\mathbf{H}^\lambda(t)) = -\mu_0\int_{\mathbb{R}^2}\partial_t\mathbf{M}^\lambda\cdot\mathbf{H}^\lambda\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\mu_0\int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{M}^\lambda,\mathrm{S}^\lambda\mathbf{H}^\lambda)\cdot\mathbf{H}^\lambda\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{V.5}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz, suivie de la propriété I.2 fournit alors

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(\mathbf{E}^\lambda(t),\mathbf{H}^\lambda(t)) &\leqslant \mu_0\,\|f(\mathbf{M}^\lambda(t),\mathrm{S}^\lambda\mathbf{H}^\lambda(t))\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\,\|\mathbf{H}^\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\\
&\leqslant \mu_0\,\mathrm{C}_{\mathrm{M}_0}\,\|\mathrm{S}^\lambda\mathbf{H}^\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\|\mathbf{H}^\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\\
&\leqslant \mu_0\,\mathrm{C}_{\mathrm{M}_0}\|\mathbf{H}^\lambda(t)\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\\
&\leqslant 2\,\mathrm{C}_{\mathrm{M}_0}\,\mathcal{E}(\mathbf{E}^\lambda(t),\mathbf{H}^\lambda(t))
\end{aligned} \tag{V.6}$$

L'inégalité recherchée s'obtient après intégration en t.

□

VI Estimations a priori sur les dérivées en temps

Cette fois-ci, on pose $\mathrm{M}_0 = \|\mathbf{M}_0\|_{\mathrm{L}^\infty} + \|\mathbf{M}_0\|_{\mathrm{L}^2}$

Lemme VI.1. *Pour tout* $\mathrm{T} > 0$*, il existe une constante* $\mathrm{C}_0(\mathrm{T})$ *indépendante de* λ *telle que, pour tout* $t \leqslant \mathrm{T}$*,*

$$\mathcal{E}(\partial_t \mathbf{E}^\lambda(t), \partial_t \mathbf{H}^\lambda(t)) \leqslant \mathrm{C}_0(\mathrm{T}) \tag{VI.1}$$

Démonstration. L'idée de départ est d'effectuer similaires à ceux de la démonstration précédentes avec les dérivées en temps des champs $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ et $\mathbf{M}$. Pour cela, on dérive les équations IV.4. Du fait que ∂_t, $\mathbf{rot}$ et S^λ commutent (immédiat en Fourier), il vient

$$\begin{cases} \varepsilon\, \partial^2_{tt} \mathbf{E}^\lambda - \mathbf{rot}\ \mathrm{S}^\lambda(\partial_t \mathbf{H}^\lambda) = 0 \\ \mu_0\, \partial^2_{tt} \mathbf{H}^\lambda + \mathbf{rot}\ \mathrm{S}^\lambda(\partial_t \mathbf{E}^\lambda) = -\mu_0\, \partial_t\, f(\mathbf{M}^\lambda, \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda) \end{cases} \tag{VI.2}$$

Multiplions scalairement la première équation par $\partial_t \mathbf{E}^\lambda(t)$, la seconde par $\partial_t \mathbf{H}^\lambda(t)$ et faisons la somme des deux. En utilisant V.4 avec $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\partial_t \mathbf{E}^\lambda(t), \partial_t \mathbf{H}^\lambda(t))$, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{E}(\partial_t \mathbf{E}^\lambda(t), \partial_t \mathbf{H}^\lambda(t)) = -\mu_0 \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t f(\mathbf{M}^\lambda, \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda) \cdot \partial_t \mathbf{H}^\lambda(t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{VI.3}$$

Par ailleurs, en définissant $\mathrm{D}_h u$ par $\dfrac{u(t+h) - u(t)}{h}$, on a, pour tout $h > 0$, grâce à V.1 et à I.3,

$$|\mathrm{D}_h\, f(\mathbf{M}^\lambda, \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda)| \leqslant \mathrm{C}_{\mathrm{M}_0} \left(|\mathrm{D}_h \mathbf{M}^\lambda|\, |\mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda| + |\mathrm{D}_h \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda| \right) \tag{VI.4}$$

ce qui fournit, après extraction de suite et passage à la limite en h,

$$|\partial_t f(\mathbf{M}^\lambda, \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda)| \leqslant \mathrm{C}_{\mathrm{M}_0}(|\partial_t \mathbf{M}^\lambda| |\mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda| + |\partial_t \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda|) \tag{VI.5}$$

Finalement, en joignant cette dernière inégalité à VI.3, ainsi que l'inégalité de Hölder, il vient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{E}(\partial_t \mathbf{E}^\lambda(t), \partial_t \mathbf{H}^\lambda(t)) \leqslant \mu_0 \mathrm{C}_{\mathrm{M}_0} \left(\|\partial_t \mathbf{M}^\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^p} \|\mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^q} \|\partial_t \mathbf{H}^\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^r} + \|\partial_t \mathbf{H}^\lambda(t)\|^2_{\mathrm{L}^2} \right) \tag{VI.6}$$

avec
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

au vu du second terme du membre de gauche, il est naturel d'essayer de prendre $r = 2$. D'autre part, compte tenu de I.2, on a :

$$|\partial_t \mathbf{M}^\lambda(\boldsymbol{x}, t)| = |f(\mathbf{M}^\lambda, \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda)| \leqslant \mathrm{C}_{\mathrm{M}_0} |\mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda(\boldsymbol{x}, t)| \tag{VI.7}$$

de sorte que le choix de $p = q (= 4)$ simplifie l'inégalité VI.6 en

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{E}(\partial_t \mathbf{E}^\lambda(t), \partial_t \mathbf{H}^\lambda(t)) &\leqslant \mu_0 \mathrm{C}^2_{\mathrm{M}_0} \|\mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t)\|^2_{\mathrm{L}^4} \|\partial_t \mathbf{H}^\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^2} + \mu_0 \mathrm{C}_{\mathrm{M}_0} \|\partial_t \mathbf{H}^\lambda(t)\|^2_{\mathrm{L}^2} \\ &\leqslant \sqrt{2\mu_0}\, \mathrm{C}^2_{\mathrm{M}_0} \|\mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t)\|^2_{\mathrm{L}^4} \sqrt{\mathcal{E}(\partial_t \mathbf{E}^\lambda(t), \partial_t \mathrm{H}^\lambda(t))} \\ &\qquad + \mathrm{C}_{\mathrm{M}_0} \mathcal{E}(\partial_t \mathbf{E}^\lambda(t), \partial_t \mathrm{H}^\lambda(t)) \end{aligned} \tag{VI.8}$$

Pour obtenir une bonne majoration de $\|\mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^4}$, du fait que le système donne des informations différentes sur le rotationnel et la divergence, nous utilisons la décomposition orthogonale.

Tout d'abord, vu que $\operatorname{div}(\mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_0) = 0$ et que, d'après la deuxième équation de IV.4, on a $\partial_t \operatorname{div}(\mathbf{H}^\lambda + \mathbf{M}^\lambda) = 0$, il vient :

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \operatorname{div}(\mathbf{H}^\lambda(t) + \mathbf{M}^\lambda(t)) = 0 \tag{VI.9}$$

De fait, $\mathrm{P}_{||}(\mathbf{H}^\lambda(t) + \mathbf{M}^\lambda(t)) = 0$, ce qui donne en particulier

$$\mathbf{H}^\lambda(t) = \mathrm{P}_\perp \mathbf{H}^\lambda(t) - \mathrm{P}_{||}\mathbf{M}^\lambda(t) \tag{VI.10}$$

puis, en composant par S^λ (qui commute avec $\mathrm{P}_\perp$ et $\mathrm{P}_{||}$)

$$\mathrm{S}^\lambda\mathbf{H}^\lambda(t) = \mathrm{P}_\perp \mathrm{S}^\lambda\mathbf{H}^\lambda(t) - \mathrm{P}_{||}\mathrm{S}^\lambda\mathbf{M}^\lambda(t) \tag{VI.11}$$

Or, $(\mathrm{S}^\lambda)_\lambda$ est uniformément bornée comme suite d'opérateurs de L^4 dans lui-même. Comme $\mathrm{P}_{||}$ y est aussi borné, il existe $\mathrm{R} > 0$ (indépendant de λ) tel que

$$\|\mathrm{P}_{||}\mathrm{S}^\lambda\mathbf{M}^\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^4} \leqslant \mathrm{R}\|\mathbf{M}^\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^4} \leqslant \mathrm{R}\,\mathrm{M}_0 \tag{VI.12}$$

Pour le terme en $\mathrm{P}_\perp$, on utilise l'inégalité de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg suivante :

$$\forall u \in \mathrm{W}^{1,1}(\mathbb{R}^2) \qquad \|u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \leqslant c\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^2)} \tag{VI.13}$$

avec $u = |\mathrm{P}_\perp \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t)|^2$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{P}_\perp \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t)\|^2_{\mathrm{L}^4} &\leqslant 2c\|\mathrm{P}_\perp \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^2}\|\nabla(\mathrm{P}_\perp \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t))\|_{\mathrm{L}^2}\\
&= 2c\|\mathrm{P}_\perp \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^2}\|\,\mathbf{rot}\ \mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^2}\\
&\leqslant 2c\|\mathbf{H}^\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^2}\|\varepsilon\partial_t\mathbf{E}^\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^2}\\
&\leqslant 2c\sqrt{\frac{2}{\mu_0}\mathcal{E}(\mathbf{E}^\lambda(t),\mathbf{H}^\lambda(t))}\|\varepsilon\partial_t\mathbf{E}^\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^2}\\
&\leqslant \underbrace{2c\,e^{\mathrm{C}_{\mathrm{M}_0}\mathrm{T}}\sqrt{\frac{2}{\mu_0}\mathcal{E}(\mathbf{E}_0,\mathbf{H}_0)}}_{:=\mathrm{C}_1(\mathrm{T})}\|\varepsilon\partial_t\mathbf{E}^\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^2}\\
&\leqslant \mathrm{C}_1(\mathrm{T})\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_1}\mathcal{E}(\partial_t\mathbf{E}^\lambda(t),\partial_t\mathbf{H}^\lambda(t))}
\end{aligned} \tag{VI.14}$$

Mettons bout à bout les estimations VI.8, VI.11, VI.12 et VI.14. Il vient, en posant

$$\mathrm{Z}^\lambda(t) = \mathcal{E}(\partial_t\mathbf{E}^\lambda(t),\partial_t\mathrm{H}^\lambda(t)) \tag{VI.15}$$

une inégalité du type, pour tout $t \leqslant \mathrm{T}$

$$\frac{\mathrm{dZ}^\lambda}{\mathrm{d}t} \leqslant \mathrm{C}_2(\mathrm{T})\mathrm{Z}^\lambda(t) + \mathrm{C}_3(\mathrm{T})\sqrt{\mathrm{Z}^\lambda(t)} \tag{VI.16}$$

Les constantes $\mathrm{C}_2(\mathrm{T})$ et $\mathrm{C}_3(\mathrm{T})$ étant bien entendu indépendantes de λ. Ceci conduit à

$$\frac{\mathrm{dZ}^\lambda}{\mathrm{d}t} \leqslant \mathrm{C}_4 + \mathrm{C}_5(\mathrm{T})\mathrm{Z}^\lambda(t) \tag{VI.17}$$

Le lemme de Gronwall permet de conclure (que $Z^\lambda(t)$ est uniformément borné en $\lambda > 0$ et en $t \in [0;T]$), une fois montré que $(Z^\lambda(0))$ est uniformément borné en λ. C'est bien le cas :

$$\begin{aligned} Z^\lambda(0) &= \mathcal{E}(\frac{1}{\varepsilon}\,\mathbf{rot}\ S^\lambda \mathbf{H}_0, -\frac{1}{\mu_0}\,\mathbf{rot}\ S^\lambda \mathbf{E}_0 - f(\mathbf{M}_0, S^\lambda \mathbf{H}_0)) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon_2}{{\varepsilon_1}^2}\|\,\mathbf{rot}\ \mathbf{H}_0\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\mu_0}\|\,\mathbf{rot}\ \mathbf{E}_0\|_{L^2}^2 + 2\mu_0 C(M_0)\|\mathbf{H}_0\|_{L_2}^2 \end{aligned} \tag{VI.18}$$

□

Lemme VI.2. *Pour tout* $T > 0$*, il existe une constante* $C_0(T)$ *indépendante de* λ *telle que, pour tout* $t \leqslant T$*,*

$$\frac{\mu_0}{2}\|\partial_t \mathbf{M}^\lambda(t)\|_{L^2}^2 \leqslant C_0(T) \tag{VI.19}$$

Démonstration. L'estimation VI.7 fournit :

$$\frac{\mu_0}{2}\|\partial_t \mathbf{M}^\lambda(t)\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{\mu_0}{2} C_{M_0}\|S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t)\|_{L^2}^2 \leqslant C_{M_0}\frac{\mu_0}{2}\|\mathbf{H}^\lambda(t)\|_{L^2}^2 \leqslant C_{M_0}\,\mathcal{E}(\mathbf{E}^\lambda(t), \mathbf{H}^\lambda(t)) \tag{VI.20}$$

L'inégalité V.3 permet de conclure. □

VII Passage à la limite dans le problème régularisé

On se fixe $T > 0$. Les deux sections précédentes nous montre que chacun des champs $\mathbf{E}^\lambda, \mathbf{H}^\lambda$, $\mathbf{M}^\lambda$, $\partial_t \mathbf{E}^\lambda, \partial_t \mathbf{H}^\lambda, \partial_t \mathbf{M}^\lambda$ est borné dans $L^\infty([0;T], L^2(\mathbb{R}^2)^3)$; il existe de fait des éléments $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ et $\mathbf{M}$ dans $W^{1,\infty}([0;T], L^2(\mathbb{R}^2)^3)$ tel que

$$(\mathbf{E}^\lambda, \partial_t \mathbf{E}^\lambda) \rightharpoonup (\mathbf{E}, \partial_t \mathbf{E}) \text{ dans } L^\infty([0;T], L^2(\mathbb{R}^2)^3) \text{ faible-}* \tag{VII.1}$$

$$(\mathbf{H}^\lambda, \partial_t \mathbf{H}^\lambda) \rightharpoonup (\mathbf{H}, \partial_t \mathbf{H}) \text{ dans } L^\infty([0;T], L^2(\mathbb{R}^2)^3) \text{ faible-}* \tag{VII.2}$$

$$(\mathbf{M}^\lambda, \partial_t \mathbf{M}^\lambda) \rightharpoonup (\mathbf{M}, \partial_t \mathbf{M}) \text{ dans } L^\infty([0;T], L^2(\mathbb{R}^2)^3) \text{ faible-}* \tag{VII.3}$$

Pour passer à la limite dans les équations, le principal problème est le terme en $f(\mathbf{M}^\lambda, S^\lambda \mathbf{H}^\lambda)$. Pour le résoudre, nous démontrons qu'à extraction près, la suite $(\mathbf{M}^\lambda)$ est de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathcal{C}^0([0;T], L^2(\mathbb{R}^2]^3)$. Nous avons pour cela besoin de deux lemmes péliminaires.

Lemme VII.1. *Soit* $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$*. Alors, pour tout* $\rho > 0$*, on a*

$$\|S^\rho u\|_{L^\infty} \leqslant \frac{1}{2}\|u\|_{H^1} \ln(1 + 4\rho^2) \tag{VII.4}$$

$$\|u - S^\rho u\|_{L^2} \leqslant \frac{\|u\|_{H^1}}{\rho} \tag{VII.5}$$

Démonstration. Fixons $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
|\mathrm{S}^\rho u(\boldsymbol{x})| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{R}^2} \phi_\rho(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant 2\rho} |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant 2\rho} \left|\widehat{u}(\boldsymbol{\xi})\sqrt{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}\right| \frac{1}{\sqrt{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \\
&\leqslant \|u\|_{\mathrm{H}^1}\frac{1}{2\pi}\int_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant 2\rho}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{1+|\boldsymbol{\xi}|^2} \\
&= \|u\|_{\mathrm{H}^1}\int_0^{2\rho}\frac{r\,\mathrm{d}r}{1+r^2} \\
&= \frac{1}{2}\|u\|_{\mathrm{H}^1}\ \ln(1+4\rho^2) \qquad \text{(VII.6)}
\end{aligned}$$

ce qui fournit la première inégalité cherchée.

Pour la seconde, la formule de Parseval donne

$$\|u-\mathrm{S}^\rho u\|_{\mathrm{L}_2}^2 = \|\widehat{u}(1-\phi_\rho)\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant \int_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant\rho} |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \leqslant \frac{\|u\|_{\mathrm{H}^1}^2}{1+\rho^2} \qquad \text{(VII.7)}$$

□

Lemme VII.2. *Soient $\rho > e$ et $\mathrm{M}_0 > 0$ données. Il existe une application (non linéaire) $\mathrm{P}_{||}^\rho$ (dépendant aussi de M_0) de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)^2$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^2)^3$ et une constante $\mathrm{C}(\mathrm{M}_0) > 0$ telles que, pour tous $\mathbf{M} \in (\mathrm{L}^2)^3 \cap (\mathrm{L}^\infty)^3$ vérifiant $\|\mathbf{M}\|_{\mathrm{L}^2} + \|\mathbf{M}\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant \mathrm{M}_0$, on a*

$$\|\mathrm{P}_{||}^\rho(\mathbf{M})\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant \mathrm{C}(\mathrm{M}_0)\ln\rho \quad et \quad \|\mathrm{P}_{||}\mathbf{M} - \mathrm{P}_{||}^\rho(\mathbf{M})\|_{\mathrm{L}^2}\ le \mathrm{C}(\mathrm{M}_0)\frac{\ln(\rho)}{\rho^2} \qquad \text{(VII.8)}$$

Démonstration. On définit notre application $\mathrm{P}_{||}^p$ par

$$\mathrm{P}_{||}^p(\mathbf{M})(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathrm{P}_{||}^p\mathbf{M}(\boldsymbol{x}) & \text{si } |\mathrm{P}_{||}^p\mathbf{M}(\boldsymbol{x})| \leqslant \mathrm{C}\ln\rho \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{(VII.9)}$$

où la constante C sera choisie plus tard.

Par construction, on a alors $\|\mathrm{P}_{||}^\rho(\mathbf{M})\|_\infty \leqslant \mathrm{C}\ln\rho$

D'autre part, on a, pour tout $p \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{P}_{||}\mathbf{M} - \mathrm{P}_{||}^\rho(\mathbf{M})\|_{\mathrm{L}^2}^2 &= \int_{|\mathrm{P}_{||}^p\mathbf{M}|\geqslant \mathrm{C}\ln\rho} |\mathrm{P}_{||}\mathbf{M}|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\leqslant \frac{1}{(\mathrm{C}\ln\rho)^{p-2}}\int_{|\mathrm{P}_{||}^p\mathbf{M}|\geqslant \mathrm{C}\ln\rho} |\mathrm{P}_{||}\mathbf{M}|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\leqslant \frac{1}{(\mathrm{C}\ln\rho)^{p-2}}\|\mathrm{P}_{||}\mathbf{M}\|_{\mathrm{L}^p}^p \qquad \text{(VII.10)}
\end{aligned}$$

Maintenant, la proposition II.1 nous dit

$$\|\mathrm{P}_{||}\mathbf{M}\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \mathrm{A}p\,\|\mathbf{M}\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \mathrm{A}p\,(\|\mathbf{M}\|_{\mathrm{L}^2} + \|\mathbf{M}\|_{\mathrm{L}^\infty}) \leqslant \mathrm{A}p\,\mathrm{M}_0 \qquad \text{(VII.11)}$$

de sorte que

$$\|\mathrm{P}_{||}\mathbf{M} - \mathrm{P}_{||}^\rho(\mathbf{M})\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant \frac{(\mathrm{A}\,\mathrm{M}_0\,p)^{p/2}}{(\mathrm{C}\ln\rho)^{p/2-1}} \qquad \text{(VII.12)}$$

Le choix de $C = C(M_0) = 4AM_0$ et de $p = 4 \ln \rho$ conduit à

$$\|P_{||}\mathbf{M} - P_{||}^{\rho}(\mathbf{M})\|_{L^2} \leqslant \frac{C \ln \rho}{\rho^2} \tag{VII.13}$$

$\square$

Ces lemmes préliminaires étant établis, nous pouvons attaquer :

Lemme VII.3. *À extraction de suite près, $(\mathbf{M}^{\lambda})$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0;T], L^2(\mathbb{R}^2))$*

Démonstration. Soient λ et μ deux réels positifs donnés. On a

$$\partial_t(\mathbf{M}^{\lambda} - \mathbf{M}^{\mu}) = f(\mathbf{M}^{\lambda}, S^{\lambda}\mathbf{H}^{\lambda}) - f(\mathbf{M}^{\mu}, S^{\mu}\mathbf{H}^{\mu}) \tag{VII.14}$$

Prenons le produit scalaire de cette égalité avec $\mathbf{M}^{\lambda} - \mathbf{M}^{\mu}$, et utilisons la propriété I.3 jointe à IV.3. Il vient

$$\frac{1}{2}\partial_t|\mathbf{M}^{\lambda} - \mathbf{M}^{\mu}|^2 \leqslant C_{M_0}(|\mathbf{M}^{\lambda} - \mathbf{M}^{\mu}|^2\,|S^{\lambda}\mathbf{H}^{\lambda}| + |\mathbf{M}^{\lambda} - \mathbf{M}^{\mu}|\,|S^{\lambda}\mathbf{H}^{\lambda} - S^{\mu}\mathbf{H}^{\mu}|) \tag{VII.15}$$

Suite heuristique de la démonstration du lemme. Le principe de la démonstration est alors l'utilisation du fait que la dimension $d = 2$ constitue le cas limite de l'injection de $H^1(\mathbb{R}^d)$ dans $L^{\infty}(\mathbb{R}^d)$. Imaginons donc être dans ce cas idéal (avec l'injection). À extraction de suite près, nous avons une suite $(S^{\lambda}\mathbf{H}^{\lambda})$ bornée $L^{\infty}(\mathcal{Q}_T)$ (même avant extraction – mais en ayant pris soin de prendre $\mathbf{H}_0$ dans H^1 plutôt que $H(\mathbf{rot}))$ et de Cauchy dans $L^2(\Omega_T)$. Prenons l'intégrale sur Ω de VII.15. Il viendrait, pour $t \leqslant T$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{M}^{\lambda}(t) - \mathbf{M}^{\mu}(t)\|_{L^2} \leqslant C_1(T)\|\mathbf{M}^{\lambda}(t) - \mathbf{M}^{\mu}(t)\|_{L^2}^2 + C_{M_0}\|\mathbf{M}^{\lambda}(t) - \mathbf{M}^{\mu}(t)\|_{L^2}\|S^{\lambda}\mathbf{H}^{\lambda} - S^{\mu}\mathbf{H}^{\mu}\|_{L^2(\Omega)} \tag{VII.16}$$

D'où, après intégration en temps, une majoration du type

$$\|\mathbf{M}^{\lambda}(t) - \mathbf{M}^{\mu}(t)\|_{L^2} \leqslant C_2(T)\|S^{\lambda}\mathbf{H}^{\lambda} - S^{\mu}\mathbf{H}^{\mu}\|_{L^2(\Omega)} \tag{VII.17}$$

ce qui permettrait de conclure. Évidemment, nous n'avons a priori aucune des deux propriétés du cas idéal. Il nous faudra utiliser les lemmes précédents...

Tout d'abord, on a

$$S^{\lambda}\mathbf{H}^{\lambda} = \underbrace{P_{\perp}S^{\lambda}\mathbf{H}^{\lambda}}_{:=\psi^{\lambda}(t)} - P_{||}S^{\lambda}\mathbf{M}^{\lambda} \tag{VII.18}$$

D'après la première équation de IV.4, on a :

$$\mathbf{rot}\,\psi^{\lambda}(t) = P_{\perp}(\varepsilon\,\partial_t\mathbf{E}^{\lambda}) \tag{VII.19}$$

L'estimation VI.1 montre que $\mathbf{rot}\,\psi^{\lambda} \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Comme il est clair que $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ d'après V.3, on en déduit (du fait que ψ^{λ} est un $P_{\perp}$) que (ψ^{λ}) est une suite bornée dans $H^1(\Omega_T)^3$. À extraction de suite près, on peut donc supposer que ψ^{λ} converge dans $L^2(\Omega_T)$.

D'autre part, $(S^{\lambda}\mathbf{M}^{\lambda}(t))$ est uniformément bornée dans $(L^2)^3 \cap (L^{\infty})^3$ pour presque tout $t \leqslant T$ et tout λ (par $M_0 = \|\mathbf{M}_0\|_{L^2} + \|\mathbf{M}_0\|_{L^{\infty}}$). en particulier, on peut appliquer à $\mathbf{M} = S^{\lambda}\mathbf{M}^{\lambda}(t)$ le lemme VII.2.

Posons $F_{\lambda}^{\rho} = S^{\rho}\psi^{\lambda} - P_{||}^{\rho}(S^{\lambda}\mathbf{M}^{\lambda})$

On a

$$\begin{aligned} S^{\lambda}\mathbf{H}^{\lambda}(t) - F_{\lambda}^{\rho}(t) &= S^{\lambda}\mathbf{H}^{\lambda}(t) - \psi^{\lambda}(t) + \psi^{\lambda}(t) - S^{\rho}\psi^{\lambda}(t) + P_{||}^{\rho}(S^{\lambda}\mathbf{M}^{\lambda}(t)) \\ &= \psi^{\lambda}(t) - S^{\rho}\psi^{\lambda}(t) + P_{||}^{\rho}(S^{\lambda}\mathbf{M}^{\lambda}(t)) - P_{||}S^{\lambda}\mathbf{M}^{\lambda}(t) \end{aligned} \tag{VII.20}$$

d'où

$$\begin{aligned}\|\mathrm{S}^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t) - \mathrm{F}^\rho_\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^2} &\leqslant \|\psi^\lambda - \mathrm{S}^\rho\psi^\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^2} + \|\mathrm{P}^\rho_{||}(\mathrm{S}^\lambda\mathbf{M}^\lambda(t)) - \mathrm{P}_{||}\mathrm{S}^\lambda\mathbf{M}^\lambda(t)\| \\ &\leqslant \mathrm{C}_{\mathrm{M}_0}\frac{\ln\rho}{\rho^2} + \frac{\|\psi^\lambda\|_{\mathrm{H}^1}}{\rho} \\ &\leqslant \frac{\mathrm{C}}{\rho}\end{aligned} \tag{VII.21}$$

et

$$\begin{aligned}\|\mathrm{F}^\lambda_\rho(t)\|_{\mathrm{L}^\infty} &\leqslant \|\mathrm{S}^\rho\psi^\lambda(t)\|_{\mathrm{L}^\infty} + \|\mathrm{P}^\rho_{||}(\mathrm{S}^\lambda\mathbf{M}^\lambda(r))\|_{\mathrm{L}^\infty} \\ &\leqslant 2\ln(\mathrm{A}+4\rho^2)\|\psi^\lambda(t)\|_{\mathrm{H}^1} + \mathrm{C}(\mathrm{M}_0)\ln\rho \\ &\leqslant \mathrm{C}\ln\rho\end{aligned} \tag{VII.22}$$

De fait, en décomposant $\mathrm{S}^\lambda\mathbf{H}^\lambda = (\mathrm{S}^\lambda\mathbf{H}^\lambda - \mathrm{F}^\lambda_\rho) + \mathrm{F}^\rho_\lambda$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{M}^\lambda(t) - \mathbf{M}^\mu(t)|^2 |\mathrm{S}^\lambda\mathbf{H}^\lambda(t)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \mathrm{C}\ln\rho\|\mathbf{M}^\lambda(t)-\mathbf{M}^\mu(t)\|^2_{\mathrm{L}^2} + \frac{2\mathrm{M}_0\mathrm{C}}{\rho}\|\mathbf{M}^\lambda(t)-\mathbf{M}^\mu(t)\|_{\mathrm{L}^2} \tag{VII.23}$$

Occupons-nous maintenant de l'autre terme. Il s'agit de majorer efficacement $\mathrm{S}^\lambda\mathbf{H}^\lambda - \mathrm{S}^\mu\mathbf{H}^\mu$. On peut d'abord le décomposer en deux morceaux, l'un ne posant pas de problème $(\psi^\lambda - \psi^\mu)$, l'autre moins sympatique : $\mathrm{S}^\mu\mathrm{P}_{||}\mathbf{M}^\mu - \mathrm{S}^\lambda\mathrm{P}_{||}\mathbf{M}^\lambda$. Pour majorer ce dernier convenablement, introduisons une différence $\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu$:

$$\mathrm{S}^\mu\mathrm{P}_{||}\mathbf{M}^\mu - \mathrm{S}^\lambda\mathrm{P}_{||}\mathbf{M}^\lambda = \mathrm{S}^\mu\mathrm{P}_{||}(\mathbf{M}^\mu - \mathbf{M}^\lambda) + (\mathrm{S}^\mu - \mathrm{S}^\lambda)\mathrm{P}_{||}\mathbf{M}^\lambda \tag{VII.24}$$

De nouveau, le second terme pose problème (puisque $\mathbf{M}^\lambda$ dépend de λ). On doit donc introduire la limite faible-$*$ $\mathbf{M}$. Finalement, on écrit donc :

$$\mathrm{S}^\lambda\mathbf{H}^\lambda - \mathrm{S}^\mu\mathbf{H}^\mu = (\psi^\lambda - \psi^\mu) + (\mathrm{S}^\lambda - \mathrm{S}^\mu)\mathrm{P}_{||}(\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}) - (\mathrm{S}^\lambda - \mathrm{S}^\mu)\mathrm{P}_{||}\mathbf{M} \tag{VII.25}$$

d'où

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{S}^\lambda\mathbf{H}^\lambda - \mathrm{S}^\mu\mathbf{H}^\mu)(t)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leqslant\ & \|(\psi^\lambda - \psi^\mu)(t)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|(\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu)(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \\ & +2\|(\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M})(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} + \|(\mathrm{S}^\lambda - \mathrm{S}^\mu)\mathrm{P}_{||}\mathbf{M}(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\end{aligned} \tag{VII.26}$$

On pose

$$\mathrm{X}^{\lambda,\mu}(t) = \|(\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu)(t)\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \tag{VII.27}$$

$$\mathrm{X}^{\lambda,\infty}(t) = \|(\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M})(t)\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \tag{VII.28}$$

$$\mathrm{G}^{\lambda,\mu}(t) = \|(\psi^\lambda - \psi^\mu)(t)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|(\mathrm{S}^\mu - \mathrm{S}^\lambda)\mathrm{P}_{||}\mathbf{M}(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \tag{VII.29}$$

Lemme VII.4. *pour tout $t \leqslant \mathrm{T}$, on a*

$$\mathrm{X}^{\lambda,\mu}(t) \leqslant \liminf_{\mu\to+\infty} \mathrm{X}^{\lambda,\infty}(t) \tag{VII.30}$$

Démonstration. Sachant que la norme est semi-continue inférieurement pour la topologie faible, il nous suffit de montrer que, à extraction près, pour tout t, $\mathbf{M}^\mu(t) \rightharpoonup \mathbf{M}(t)$.

Soit $\phi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)^3$ donnée, et montrons que $t \mapsto \int \phi\,\mathbf{M}^\lambda(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ converge simplement, en fait uniformément, vers $t \mapsto \int \phi\mathbf{M}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. En effet, l'inégalité VI.19 montre que $(\partial_t\mathbf{M}^\lambda)$ est une famille uniformément bornée en λ de $\mathcal{C}([0;\mathrm{T}],\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)^3)$. Il en résulte l'existence d'une constante $\mathrm{C}>0$ telle que :

$$\forall\lambda>0,\forall t,t'\in[0;\mathrm{T}]\qquad \|\mathbf{M}^\lambda(t)-\mathbf{M}^\lambda(t')\|_{\mathrm{L}^2}\leqslant \mathrm{C}|t-t'| \tag{VII.31}$$

Il en résulte que la famille $(t\mapsto\int\phi\,\mathbf{M}^\lambda(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x})_\lambda$ est équicontinue. Le théorème d'Ascoli, montre que pour tout ϕ de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)^3$ et tout $t\in[0;\mathrm{T}]$, on a convergence d'une suite extraite de la famille $\left(\int\phi\,\mathrm{M}^\lambda(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)_\lambda$. On applique ce théorème avec ϕ décrivant une base hilbertienne (dénombrable) de l'espace de Hilbert séparable $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)^3$; un procédé classique d'extraction diagonale permet de conclure la convergence faible de $\mathbf{M}^\lambda(t)$ vers un certain $\mathbf{M}'(t)$, qui, par unicité de la limite au sens des distribution, ne peut être que $\mathbf{M}(t)$. □

Lemme VII.5. *On a (à extraction près)* $\lim\limits_{\lambda,\mu\to+\infty}\|\mathrm{G}^{\lambda,\mu}\|_{\mathrm{L}^2([0;\mathrm{T}])}=0$

Démonstration. On a vu que (ψ^λ) était une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^2(\Omega_\mathrm{T})$. En particulier,

$$\int_{\Omega_\mathrm{T}}|\psi^\lambda-\psi^\mu|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t=\int_0^\mathrm{T}\|(\psi^\lambda-\psi^\mu)(t)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t\xrightarrow[\lambda,\mu\to+\infty]{}0 \tag{VII.32}$$

D'autre part, la formule de Parseval et le théorème de Fubini donnent

$$\begin{aligned}\int_0^\mathrm{T}\|(\mathrm{S}^\lambda-\mathrm{S}^\mu)\mathrm{P}_{\|}\mathbf{M}(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^\mathrm{T}\int_{\mathbb{R}^2}|(\phi_\lambda-\phi_\mu)(\xi)|^2\,|\widehat{\mathrm{P}_{\|}\mathbf{M}(t)}|^2(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int\limits_{|\xi|\geqslant\min(\lambda,\mu)}\left(\int_0^\mathrm{T}|\widehat{\mathbf{M}}(\xi,t)|^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{VII.33}$$

ce qui permet de conclure pour le lemme.

□

Intégrons sur Ω l'inégalité VII.15. Celle-ci, jointe aux estimations VII.23 et VII.26, ainsi que l'inégalité de Schwarz, nous donne, pour ρ assez grand,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{X}^{\lambda,\mu}(t) &\leqslant \mathrm{C}_{\mathrm{M}_0}\int_\Omega|(\mathbf{M}^\lambda-\mathbf{M}^\mu)(t)|^2|\mathrm{S}^\lambda\mathbf{H}^\lambda(t)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\mathrm{C}_{\mathrm{M}_0}(\mathrm{C}\ln\rho+1)\,\mathrm{X}^{\lambda,\mu}(t)\\ &\qquad+2\mathrm{C}_{\mathrm{M}_0}\sqrt{\mathrm{X}^{\lambda,\mu}}\left(\sqrt{\mathrm{X}^{\lambda,\infty}(t)}+\mathrm{G}^{\lambda,\mu(t)}+\frac{2\mathrm{M}_0\mathrm{C}}{\rho}\right)\\ &\leqslant \mathrm{C}_4\ln\rho\,\mathrm{X}^{\lambda,\mu(t)}+\mathrm{C}_5\left(\mathrm{X}^{\lambda,\infty}(t)+\mathrm{G}^{\lambda,\mu}(t)^2+\frac{1}{\rho^2}\right)\end{aligned} \tag{VII.34}$$

Une fois intégrée, ceci nous amène, pour $0\leqslant t_0\leqslant t\leqslant\mathrm{T}$, à

$$\begin{aligned}\mathrm{X}^{\lambda,\mu}(t) &\leqslant \mathrm{X}^{\lambda,\mu}(t_0)\,e^{\mathrm{C}_4\ln\rho\,(t-t_0)}+\mathrm{C}_5\int_{t_0}^t e^{\mathrm{C}_4\ln\rho\,(t-t')}\left[\frac{1}{\rho^2}+\mathrm{X}^{\lambda,\infty}(t')+\mathrm{G}^{\lambda,\mu}(t')^2\right]\mathrm{d}t'\\ &\leqslant \mathrm{X}^{\lambda,\mu}(t_0)\,e^{\mathrm{C}_4\ln\rho\,(t-t_0)}+\mathrm{C}_5\,e^{\mathrm{C}_4\ln\rho\,(t-t_0)}\left[\frac{\mathrm{T}}{\rho^2}+\|\mathrm{G}^{\lambda,\mu}\|^2_{\mathrm{L}^2([0;\mathrm{T}])}\right]\\ &\qquad+\mathrm{C}_5\int_t^{t_0}e^{\mathrm{C}_4\ln\rho\,(t-t')}\mathrm{X}^{\lambda,\infty}(t')\,\mathrm{d}t'\end{aligned} \tag{VII.35}$$

L'utilisation de l'égalité VII.4 nous conduit à

$$\begin{aligned} \mathrm{X}^{\lambda,\infty}(t)e^{-\mathrm{C}_4\ln(\rho)t} \leqslant \liminf_{\mu\to+\infty} \mathrm{X}^{\lambda,\mu}(t_0)\, e^{-\mathrm{C}_4\ln(\rho)\,t_0} + \mathrm{C}_5\, e^{-\mathrm{C}_4\ln(\rho)\,t_0} \left[\frac{\mathrm{T}}{\rho^2} + \|\mathrm{G}^{\lambda,\infty}\|^2_{\mathrm{L}^2([\,0\,;\mathrm{T}\,])}\right] \\ +\mathrm{C}_5 \int_t^{t_0} \mathrm{X}^{\lambda,\infty}(t')e^{-\mathrm{C}_4\ln(\rho)t'}\,\mathrm{d}t' \end{aligned} \tag{VII.36}$$

qui, en appliquant de nouveau le lemme de Gronwall (à la fonction $t \mapsto \mathrm{X}^{\lambda,\infty}(t)e^{-\mathrm{C}_4\ln(\rho)t}$) nous donne :

$$\begin{aligned} &\mathrm{X}^{\lambda,\infty}(t)e^{-\mathrm{C}_4\ln(\rho)t} \\ &\leqslant \left(\liminf_{\mu\to+\infty} \mathrm{X}^{\lambda,\mu}(t_0)\, e^{-\mathrm{C}_4\ln(\rho)\,t_0} + \mathrm{C}_5\, e^{-\mathrm{C}_4\ln(\rho)\,t_0} \left[\frac{\mathrm{T}}{\rho^2} + \|\mathrm{G}^{\lambda,\infty}\|^2_{\mathrm{L}^2}\right]\right) e^{\mathrm{C}_5(t-t_0)} \end{aligned} \tag{VII.37}$$

Soit

$$\mathrm{X}^{\lambda,\infty}(t) \leqslant \left(\liminf_{\mu\to+\infty} \mathrm{X}^{\lambda,\mu}(t_0)\, e^{\mathrm{C}_4\ln(\rho)\,(t-t_0)} + \mathrm{C}_5\, e^{(\mathrm{C}_4\ln(\rho)+\mathrm{C}_5)\,(t-t_0)} \left[\frac{\mathrm{T}}{\rho^2} + \|\mathrm{G}^{\lambda,\infty}\|^2_{\mathrm{L}^2([\,0\,;\mathrm{T}\,])}\right]\right) \tag{VII.38}$$

Prenons maintenant le sup sur $[\,t_0\,;t\,]$ de chaque membre :

$$\begin{aligned} &\sup_{[\,t_0\,;t\,]} \mathrm{X}^{\lambda,\infty} \\ &\leqslant \left(\liminf_{\mu\to+\infty} \mathrm{X}^{\lambda,\mu}(t_0)\, e^{\mathrm{C}_4\ln(\rho)\,(t-t_0)} + \mathrm{C}_5\, e^{(\mathrm{C}_4\ln(\rho)+\mathrm{C}_5)\,(t-t_0)} \left[\frac{\mathrm{T}}{\rho^2} + \|\mathrm{G}^{\lambda,\infty}\|^2_{\mathrm{L}^2([\,0\,;\mathrm{T}\,])}\right]\right) \end{aligned} \tag{VII.39}$$

D'où

$$\limsup_{\lambda\to+\infty}\left(\sup_{[\,t_0\,;t\,]} \mathrm{X}^{\lambda,\infty}\right) \leqslant \limsup_{\lambda\to+\infty}\left(\liminf_{\mu\to+\infty} \mathrm{X}^{\lambda,\mu}(t_0)\right)\; e^{\mathrm{C}_4\ln(\rho)\,\mathrm{T}} + \mathrm{C}_5\,\mathrm{T}\,e^{\mathrm{C}_5\mathrm{T}}\cdot e^{\ln(\rho)[\mathrm{C}_4(t-t_0)-2]} \tag{VII.40}$$

Supposons avoir $\limsup\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\liminf\limits_{\mu\to+\infty} \mathrm{X}^{\lambda,\mu}(t_0)\right) = 0$ et posons $t_1 = \min(t_0 + \frac{1}{\mathrm{C}_4}, \mathrm{T})$, de sorte que $\mathrm{C}_4(t_1-t_0)-2<0$. En faisant tendre ρ vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, il vient alors

$$\limsup_{\lambda\to+\infty}\left(\sup_{[\,t_0\,;t_1\,]} \mathrm{X}^{\lambda,\infty}\right) \leqslant 0 \tag{VII.41}$$

On en déduit que $\mathrm{X}^{\lambda,\mu}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $[\,t_0\,;t_1\,]$; de plus, on a alors

$$\limsup_{\lambda\to+\infty}\left(\liminf_{\mu\to+\infty} \mathrm{X}^{\lambda,\mu}(t_1)\right) \leqslant \lim_{\lambda,\mu\to+\infty}\,\sup_{[\,t_0\,;t_1\,]} \mathrm{X}^{\lambda,\infty} = 0 \tag{VII.42}$$

On peut donc appliquer de nouveau l'argument avec

$$t_0 = t_1 \quad \text{et} \quad t_1 = t_2 := \min\left(t_0 + \frac{2}{\mathrm{C}_4}, \mathrm{T}\right).$$

On en déduit facilement à l'aide d'une récurrence finie que

$$\lim_{\lambda,\mu\to+\infty} \sup_{[\,t_0\,;\mathrm{T}\,]} \mathrm{X}^{\lambda,\infty} = 0 \tag{VII.43}$$

Pour conclure, il ne reste plus qu'à pouvoir initialiser la récurrence à $t_0 = 0$, c'est-à-dire vérifier que $\limsup_{\lambda\to+\infty}\left(\liminf_{\mu\to+\infty} \mathrm{X}^{\lambda,\mu}(0)\right) = 0$. Ceci est évident vu que $\mathrm{X}^{\lambda,\mu}(0) = 0$ pour tous λ et μ. $\square$

Tout ceci nous permet de passer à la limite dans le problème régularisé : d'abord, on a vu que $\mathbf{rot}\ \mathrm{S}^{\lambda}$ est autoadjoint. Comme cet opérateur converge fortement vers $\mathbf{rot}$ dans $\mathrm{H}(\mathbf{rot}\,,\mathbb{R}^2)$, ceci amène au fait que $(\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{M})$ vérifie les deux premières équations du système I.5.

De plus, $\mathrm{S}^{\lambda}\mathbf{H}^{\lambda}$ converge dans $\mathrm{L}^2(\Omega_\mathrm{T})$ vers $\mathbf{H}$. Avec le fait que la suite $(\mathbf{M}^{\lambda})$ est de Cauchy, on en déduit la convergence dans $\mathrm{L}^2(\Omega_\mathrm{T})$ de $f(\mathbf{M}^{\lambda},\mathrm{S}^{\lambda}\mathbf{H}^{\lambda})$ vers $f(\mathbf{M},\mathbf{H})$. Par unicité de la limite au sens des distributions, ceci montre que la troisième équation de I.5 est également vérifiée.

Nous avons ainsi prouvé l'existence d'une solution forte sur $[\,0\,;\mathrm{T}\,]$, et ceci pour tout $\mathrm{T} > 0$. Un procédé classique d'extraction diagonale conclut quand à l'existence d'une solution forte globale.

Bibliographie

[1] Houssem Haddard. Modèles asymptotiques en ferromagnétisme ; couches minces et homogénéisation. *thèse de doctorat*, décembre 2000.

[2] E. M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton University Press, 1970.