Quelques résultats d'estimation globale pour le système de Maxwell-Landau-Lifshitz

Jean Starynkévitch

16 mai 2003

I Introduction

1 Le Système de Maxwell-Landau-Lifshitz

On étudie l'évolution de l'aimantation $\mathbf{M}$ au sein d'un aimant. Celle-ci est régie par une loi non-linéaire qu'on appelle loi de Landau-Lifshitz, que l'on couple avec le système de Maxwell habituel. Nous étudions un cas en l'absence de champ magnétique extérieur et d'énergie d'échange. Sous ces hypothèses, il s'agit alors d'étudier le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t \mathbf{E} - \mathbf{rot}\ \mathbf{H} & = & 0 \\ \partial_t(\mathbf{H}+\mathbf{M}) + \mathbf{rot}\ \mathbf{E} & = & 0 \\ \partial_t \mathbf{M} & = & f(\mathbf{M},\mathbf{H}) \\ & & \\ (\mathbf{E}(0),\mathbf{H}(0)) & = & (\mathbf{E}_0,\mathbf{H}_0) \\ \mathbf{M}(0) & = & \mathbf{M}_0 \\ \mathrm{div}\,(\mathbf{E}_0) & = & 0 \\ \mathrm{div}\,(\mathbf{H}_0+\mathbf{M}_0) & = & 0 \end{array}\right. \tag{I.1}$$

où f est une application régulière $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant les hypothèses suivantes :

- f est linéaire en h ;
- pour tout h, $f(0,h) = 0$;
- f (vue comme application de $\mathbb{R}^3_m$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3_h)$) est localement lipshitzienne en m ;
- pour tous h et m, $\quad f(m,h) \cdot m = 0$;
- pour tout $\mathrm{R} > 0$ il existe $\alpha_{\mathrm{R}}, \beta > 0$ tels que pour tous m et h avec $|m| \leqslant \mathrm{R}$,

$$\alpha_{\mathrm{R}} |f(m,h)|^2 \leqslant \beta\, |m \wedge h|^2 \leqslant f(m,h) \cdot h \tag{I.2}$$

Notation. Désormais, on notera K une constante telle que :

- $|f(m,h)| \leqslant \mathrm{K}\,|m|\,|h|$
- $\|\mathrm{D}_m f(m,h)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathrm{K}|h|$

Une telle constante existe bien en vertu des hypothèses faites sur f.

Proposition I.1. *Soient $\eta, \alpha > 0$. La fonction $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^s$ définie par*

$$f(m,h) = -\eta(m \wedge h + \alpha\, m \wedge (m \wedge h)) \tag{I.3}$$

vérifie les hypothèses précédentes.

Démonstration. L'hypothèse la moins facile à vérifier est la dernière :

$$\begin{aligned} f(m,h)\cdot h &= -\eta\alpha\;(m\wedge(m\wedge h))\cdot h \\ &= -\eta\alpha\det(m,m\wedge h,h) \\ &= \eta\alpha\,(m\wedge h,m,h)) \\ &= \eta\alpha\,(m\wedge h)\cdot(m\wedge h) \\ &= \eta\alpha\,|m\wedge h|^2 \end{aligned}$$

ce qui fournit la seconde inégalité (qui est alors même une égalité) en posant $\beta=\eta\alpha$.

D'autre part, les deux termes $m\wedge h$ et $m\wedge(m\wedge h)$ étant orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$, il vient que

$$\begin{aligned} |f(m,h)|^2 &= \eta^2\big(|m\wedge h|^2+\alpha^2|m\wedge(m\wedge h)|^2\big) \\ &= \eta^2\big(|m\wedge h|^2+\alpha^2\,|m|^2\,|m\wedge h|^2\big) \\ &= |m\wedge h|^2\,\eta^2\,(1+\alpha^2\,|m|^2) \\ &\leqslant |m\wedge h|^2\,\eta^2\,(1+\alpha^2\mathrm{R}^2) \end{aligned}$$

de sorte que la première inégalité voulue est vérifiée si l'on choisit $\alpha_{\mathrm{R}}=\dfrac{\eta\alpha}{\eta^2\,(1+\mathrm{R}^2\,\alpha^2)}$. □

Nous identifierons fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ indépendante de la troisième variable réelle à valeur dans $\mathbb{R}^3$ (pour donner un sens au rotationnel par exemple) et fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ (pour la manipulation de la transformée de Fourier). Remarquons que cette identification est « compatible » avec tous les opérateurs différentiels utilisés dans le problème (qui aboutissent sur le même objet avec deux définitions a priori différentes).

Nous dirons qu'il y a dissipation si $\alpha,\beta>0$.

2 L'énergie associée au système

Notation. Soit $(\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{M})$ une solution faible du système I.1. On note :

$$\mathcal{E}(t)=\frac{1}{2}(\|\mathbf{E}(t)\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}+\|\mathbf{H}(t)\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)})$$

$$a(t)=\|\partial_t\mathbf{M}(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}$$

$$b(t)=\|\mathbf{M}\wedge\mathbf{H}(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}$$

Supposons connaître une solution régulière du système I.1.

Évaluons en (t,x) la troisième équation et multiplions-la scalairement par $\mathbf{M}(t)$. Il vient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{M}(t,x)|^2=0$$

ce qui donne,

$$\mathbf{M}(t,x)=\mathbf{M}_0(x)\qquad p.p.t.\ x\in\mathbb{R}^d \tag{I.4}$$

Cette égalité, nous incite à prendre $\mathbf{M}_0$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$. En fait, l'adimensionnement préalablement effectué supposait effecivement que $\mathbf{M}_0\in\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$; une fois cet adimensionnement fait, on suppose que $\|\mathbf{M}_0\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)}=1$;

Désormais, on prendra $\mathrm{R}=\|\mathbf{M}_0\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)}=1$, on supposera de plus $\mathbf{M}_0$ à support compact, et on notera $\alpha=\alpha_1$. Nous avons alors $\|\mathbf{M}\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^{1+d})}=\|\mathbf{M}_0\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)}=1$.

Évaluons la première équation en $t \geqslant 0$, et multiplions-la scalairement par $\mathbf{E}(t)$. De même pour la seconde, en la multipliant cette fois par $\mathbf{H}(t)$. En faisant la somme des deux (et en tenant compte du fait que $\mathbf{rot}$ est un opérateur auto-adjoint sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$), il vient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(t) + \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{M}(t), \mathbf{H}(t)) \cdot \mathbf{H}(t) \, \mathrm{d}x = 0 \tag{I.5}$$

Compte tenu des inégalités I.2, il vient donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(t) + \alpha a(t)^2 \leqslant 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(t) + \beta b(t)^2 \leqslant 0$$

Par intégrations en temps, vient :

Proposition I.2. *Si* $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$ *est une solution régulière du système I.1, on a :*

$$\mathcal{E}(t) + \alpha \int_0^t a(s)^2 \, ds \leqslant \mathcal{E}(0) \tag{I.6}$$

$$\mathcal{E}(t) + \beta \int_0^t b(s)^2 \, ds \leqslant \mathcal{E}(0) \tag{I.7}$$

Corollaire I.3. *Dans ce cas, on a* $\qquad a, b \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+)$

Définition I.1. Soit $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$ une solution faible (*ie* au sens des distributions) du système I.1. On dit que c'est une solution d'énergie finie si $\mathcal{E}(0) < +\infty$ et si les estimations I.4, I.6 et I.7 sont satisfaites.

3 Quelques résultats connus sur le sujet

Théorème I.4 (Joly-Métivier-Rauch). *On se donne $d \in \{1; 2; 3\}$ une dimension d'espace. On suppose que $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ sont dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, et que $\mathbf{M}_0 \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et est à support compact. Alors il existe une solution d'énergie finie au système I.1, telle que chacun des champs $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M}$ appartienne à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))$. Si l'on suppose de plus que $\mathbf{rot}\, \mathbf{E}_0$ et $\mathbf{rot}\, \mathbf{H}_0$ sont dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, alors il existe une solution d'énergie finie telle que les champs $\mathbf{rot}\, \mathbf{E}, \mathbf{rot}\, \mathbf{H}, \mathbf{rot}\, \mathbf{M}$ sont également dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))$; il y a alors unicité d'une telle solution.*

La preuve de ce résultat est établie dans [4].

Désormais, on se donne une telle solution.

Théorème I.5 (Haddar). *On suppose que $d = 2$, que $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ sont dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$, et que $\mathbf{M}_0 \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^2)$ et est à support compact. Alors il existe une unique solution d'énergie finie telle que chacun des champs $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M}$ appartienne à $\mathrm{W}^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))$.*

Ce résultat est démontré au chapitre 2 de la thèse d'Houssem Haddar [2].

4 Une décomposition orthogonale de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$

Rappelons quelques résultats sur la décomposition orthogonale.

Notation. Pour $1 \leqslant d \leqslant 3$, on note

$$\mathrm{L}^2_\perp(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)^3 \mid \operatorname{div} u = 0\}$$
$$\mathrm{L}^2_{||}(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)^3 \mid \mathbf{rot}\ u = 0\}$$

Proposition I.6. *On a une somme directe orthogonale*

$$\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)^3 = \mathrm{L}^2_\perp(\mathbb{R}^d) \oplus \mathrm{L}^2_{||}(\mathbb{R}^d) \tag{I.8}$$

On note $\mathrm{P}_\perp : u \mapsto \mathrm{P}_\perp u = u_\perp$ *et* $\mathrm{P}_{||}u \mapsto \mathrm{P}_{||}u = u_{||}$ *les projecteurs orthogonaux associés à cette décomposition.*

Ces projecteurs sont tous deux des multiplicateurs de Fourier, de symboles respectivement définis par $\widehat{\mathrm{P}_\perp f}(\xi) = -\dfrac{\xi \wedge (\xi \wedge \widehat{f}(\xi))}{|\xi|^2}$ *et* $\widehat{\mathrm{P}_{||} f}(\xi) = \dfrac{\xi \cdot (\xi \cdot \widehat{f}(\xi))}{|\xi|^2}$.

5 Équations d'ondes découlant du système de Mawell-Landau-Lifshitz

Prenons la dérivée en temps de la première équation du système, et ajoutons-y le rotationnel de la deuxième. Compte tenu du fait que $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, il vient :

$$\Box \mathbf{E} = -\,\mathbf{rot}\ \partial_t \mathbf{M} = -\,\mathbf{rot}\ \partial_t \mathbf{M}_\perp \tag{I.9}$$

Prenons la dérivée en temps de la deuxième équation, et soustrayons-y le rotationnel de la première. Après composition avec l'opérateur de projection orthogonal $\mathrm{P}_\perp$ (qui commute avec toutes les dérivations), il vient :

$$\Box \mathbf{H}_\perp = -\partial_t^2 \mathbf{M}_\perp \tag{I.10}$$

Nous cherchons des estimations sur $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$. Pour cela, remarquons que si u est solution de $\Box u = -\partial_t \mathbf{M}_\perp$, alors $\mathrm{E} - \mathbf{rot}\ u$ et $\mathbf{H}_\perp - \partial_t u$ sont solution de l'équation des ondes linéaire homogène.

De plus, on sait que $\partial_t \mathbf{M} = f(\mathbf{M}, \mathbf{H})$. Ce qui implique, comme $\mathbf{M} \in \mathrm{L}^\infty$ et est à support inclus dans un ensemble du type $\mathbb{R}_+ \times \mathrm{K}$, où K est compact, et comme d'après I.6, $\mathbf{H} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))$, que $\partial_t \mathbf{M} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))$ et que $\operatorname{supp} \partial_t \mathbf{M} \subset \mathbb{R}_+ \times \mathrm{B}_\mathrm{R}$, ($\mathrm{B}_\mathrm{R}$ étant la boule de rayon R centrée en 0).

S'il y a dissipation, nous avons de plus $\partial_t \mathbf{M} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))$ (voir le corollaire I.3).

Ces remarques motivent l'étude faite à la section suivante.

II Résultats d'estimation L^2 locale sur l'équation des ondes linéaire avec second membre

Dans cette section, d est un entier positif quelconque (on n'impose plus $d \leqslant 3$)

Notation. On note $\mathrm{B}_\rho = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leqslant \rho\}$ la boule de centre 0 et de rayon ρ, $\mathrm{S}_\rho = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = \rho\}$ la sphère de centre 0 et de rayon ρ, et $\Gamma_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \leqslant |x| \leqslant b\}$ la couronne (boule si $a \leqslant 0$) de rayon intérieur a et de rayon extérieur b.

Notation. On note $\mathrm{E}(t)$ la solution élémentaire de l'opérateur des ondes évaluée au temps t, c'est-à-dire également la distribution tempérée (en fait, à support compact) sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\mathrm{E}(t) * g = f(t)$ où $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))$ est définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Box f & = & 0 \\ f_{|t=0} & = & 0 \\ \partial_t f_{|t=0} & = & g \end{array}\right. \tag{II.1}$$

On a toujours (en toute dimension)

$$\widehat{\mathrm{E}(t)}(\xi) = \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \tag{II.2}$$

Cette formule implique que

Proposition II.1. *pour $t \geqslant 0$ $\partial_t \mathrm{E}(t)$ définit un endomorphisme de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ de norme 1. De même, $\nabla \mathrm{E}(t)$ est continu de norme 1 de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)^d$*

Démonstration. En effet, on a $\widehat{\partial_t \mathrm{E}}(t,\xi) = \cos(t|\xi|)$ et $\widehat{\nabla_x \mathrm{E}}(t,\xi) = \dfrac{\xi}{|\xi|}\sin(t|\xi|)$. Il s'agit de deux fonctions bornées par 1, et qui définissent donc des endomorphismes continus de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d_\xi)$. La formule de Parseval nous fournit alors le résultat souhaité. $\Box$

Lorsque d est pair, $\mathrm{E}(t)$ est une distribution de classe $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de S_t ; elle est définie par la formule :

$$\mathrm{E}(t,x) = \frac{\left(\frac{d}{2}-1\right)!}{2\,\pi^{d/2}\,(d-1)!} \frac{\mathbb{1}_{\mathrm{B}_t}(x)}{\left(\sqrt{t^2-|x|^2}\right)^{d-1}} \tag{II.3}$$

Pour ce résultat, on pourra consulter le livre de Laurent Schwartz [5]. On en déduit :

$$\partial_t \mathrm{E}(t,x) = -\frac{\left(\frac{d}{2}-1\right)!}{2\,\pi^{d/2}\,(d-2)!} \frac{t\,\mathbb{1}_{\mathrm{B}_t}(x)}{\left(\sqrt{t^2-|x|^2}\right)^{d+1}} \tag{II.4}$$

$$\nabla_x \mathrm{E}(t,x) = -\frac{\left(\frac{d}{2}-1\right)!}{2\,\pi^{d/2}\,(d-2)!} \frac{x\,\mathbb{1}_{\mathrm{B}_t}(x)}{\left(\sqrt{t^2-|x|^2}\right)^{d+1}} \tag{II.5}$$

Si d est impair et $\geqslant 3$, la distribution $\mathrm{E}(t)$ a pour support S_t (principe de Huygens). Il en est de même de $\partial_t \mathrm{E}(t)$, et ceci également pour $d = 1$. De fait, dans le problème que nous regardons, la dimension 1 d'espace ne sera « pas trop » singulière.

On considère la solution u du problème de Cauchy suivant.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Box u & = & v \\ u_{|t=0} & = & 0 \quad c \\ \partial_t u_{|t=0} & = & 0 \end{array}\right. \tag{II.6}$$

u est donnée par

$$u(t) = \int_0^t \mathrm{E}(t-s)v(s)\,\mathrm{d}s := \mathrm{E} * v(t) \tag{II.7}$$

ce qui donne

$$\partial_t u(t) = \int_0^t \partial_t \mathrm{E}(t-s) v(s)\,\mathrm{d}s \tag{II.8}$$

On munit l'espace des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}_+$ de la convolution définie formellement par

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-s)\,g(s)\,\mathrm{d}s$$

Nous montrons les deux théorèmes suivant :

Théorème II.2. *Soit $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. On suppose que $\operatorname{supp} v \subset \mathbb{R}_+ \times \mathrm{B}_\mathrm{R}$, où R est une réel positif donné. et que $v \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))$. Soit $\rho \geqslant \mathrm{R}$ fixé, et u_v la solution du problème de Cauchy II.6 (ou plutôt sa restriction à $\mathbb{R}_+ \times \mathrm{B}_\rho$). Alors $\nabla_{t,x} u_v \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathrm{L}^2(\mathrm{B}_\rho)) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathrm{L}^2(\mathrm{B}_\rho))$. Plus précisément, il existe une constante C ne dépendant que de d telle que pour tout $v \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))$ avec $\operatorname{supp} v \subset \mathbb{R}_+ \times \mathrm{B}_\mathrm{R}$, pour tout q tel que $p \leqslant q \leqslant +\infty$, et pour tout $\mathrm{T} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et tous R et $\rho \geqslant \mathrm{R}$, on ait*

$$\|\nabla_{t,x} u_v\|_{\mathrm{L}^q([0,\mathrm{T}[,\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))} \leqslant \mathrm{C}\rho^{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|v\|_{\mathrm{L}^p([0,\mathrm{T}[,\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))} \tag{II.9}$$

Notation. Soit P une fonction régulière hors de l'origine, 0-homogène sur $\mathbb{R}^d$. On pose

$$\|\mathrm{P}\|_{\mathcal{C}^d(\mathrm{S}^{d-1})} = \sum_{j=0}^{d} \|\mathrm{P}^{(j)}\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{S}^{d-1})}$$

Notation. Soient $a \leqslant b$. On note $\Gamma(a,b)$ la couronne de rayon intérieur a et extérieur b.

$$\Gamma(a,b) = \big\{x \in \mathbb{R}^d \mid a \leqslant |x| \leqslant b\big\}$$

Théorème II.3. *On se donne maintenant une fonction P de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d - \{0\}$ homogène de degré 0. On note $\mathrm{P}v = \mathrm{P}(\mathrm{D})v$, c'est-à-dire la fonction f telle que $\widehat{f}(\xi) = \mathrm{P}(\xi)\widehat{v}(\xi)$.*

On fait les même hypothèses sur v que précédemment. On note $u_{\mathrm{P}v}$, la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Box u &=& \mathrm{P}v \\ u_{|t=0} &=& 0 \\ \partial_t u_{|t=0} &=& 0 \end{array}\right. \tag{II.10}$$

Alors $\nabla_{t,x} u_{\mathrm{P}v} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathrm{L}^2(\mathrm{B}_\rho)) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathrm{L}^2(\mathrm{B}_\rho))$, et il existe une constante C, telle que pour tout $v \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))$, α, q tel que $p \leqslant q \leqslant +\infty$, et $\rho \geqslant \mathrm{R}$, on ait :

$$\|\nabla_{t,x} u_{\mathrm{P}v}\|_{\mathrm{L}^q([0,\mathrm{T}[,\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))} \leqslant \mathrm{C}\rho^{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|\mathrm{P}\|_{\mathcal{C}^d(\mathrm{S}^{d-1})} \|v\|_{\mathrm{L}^p([0,\mathrm{T}[,\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))} \tag{II.11}$$

Démonstration (du théorème II.2). Tout d'abord, comme $\rho \geqslant \mathrm{R}$, si v est support dans $\mathbb{R}_+ \times \mathrm{B}_\mathrm{R}$, elle est aussi à support dans $\mathbb{R}_+ \times \mathrm{B}_\rho$. On peut donc supposer que $\mathrm{R} = \rho$.

Nous supposons d'abord que $\mathrm{R} = \rho = 1$. Le cas général s'obtient alors en appliquant ce résultat à la fonction $\widetilde{u}(t,x) = u(\rho t, \rho x)$, solution de $\widetilde{u} = \Box(\rho^2\widetilde{v})$ où $\widetilde{v}(t,x) = v(\rho t, \rho x)$.

Le principe est de décomposer v en plusieurs morceaux (raisonnement valide de par la linéarité de l'équation) et, à partir de la solution explicite et de sa localisation, de majorer chacun des morceaux de w correspondant par la convoluée de $\|v\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} : t \mapsto \|v(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}$ avec une fonction $[\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^\infty](\mathbb{R}_+)$.

Pour la clareté de la rédaction, nous n'expliciterons la démonstration que pour $\partial_t u_v$. Pour $\nabla_x u_v$, il suffit de remarquer que les propriétés de support et de bornitude dans $\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))$ sont les mêmes, et qu'en dimension paire, on a de plus sur l'ensemble $\{|x| < t\}$

$$|\nabla_x \mathrm{E}(t,x)| \leqslant |\partial_t \mathrm{E}(t,x)|$$

Tout d'abord, on écrit, pour $t \geqslant 4$

$$u_v(t) = \int_0^{t-4} \partial_t \mathrm{E}(t-s)v(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t-4}^{t} \partial_t \mathrm{E}(t-s)v(s)\,\mathrm{d}s \tag{II.12}$$

Le second terme du membre de droite se majore comme indiqué préalablement :

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{t-4}^{t} \partial_t \mathrm{E}(t-s)v(s)\,\mathrm{d}s \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1)} \\
\leqslant\ & \left\| \int_{t-4}^{t} \partial_t \mathrm{E}(t-s)v(s)\,\mathrm{d}s \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \\
\leqslant\ & \int_{t-4}^{t} \|\partial_t \mathrm{E}(t-s)v(s)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}\,\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & \int_{t-4}^{t} \|v(s)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}\,\mathrm{d}s \\
=\ & (\mathbb{1}_{[0,4]} * \|v\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)})(t)
\end{aligned}$$

Le même raisonnement tient encore lorsque $0 \leqslant t < 4$ (et dans ce cas, seul le second membre est non nul).

Évaluons maintenant $[\partial_t \mathrm{E}(t-s)v(s)]$ (sur B_1) lorsque $t-s \geqslant 4$.

En dimension impaire, la propriété de support d'une convolution (en fonction des supports des fonctions convoluées) montre que :

$$\partial_t \mathrm{E}(t-s)u(s) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathrm{B}_1$$

de sorte que le calcul précédent fournit la conclusion dans le cas de la dimension impaire.

Maintenant, en dimension paire, $\partial_t \mathrm{E}(t-s)u(s)$ coïncide sur B_1 avec une fonction $\mathcal{C}^\infty$, et on a, pour $x \in \mathrm{B}_1$:

$$[\partial_t \mathrm{E}(t-s)v(s)](x) = \int_{\mathrm{B}_1} \frac{\mathrm{C}_d\,(t-s)}{\sqrt{(t-s)^2 - |x-y|^2}^{d+1}} v(s,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s$$

L'inégalité de Schwarz fournit (grâce au fait qu'ici $(t-s)^2 - |x-y|^2 \geqslant \frac{1}{2}(t-s)^2$) :

$$\begin{aligned}
\|\partial_t \mathrm{E}(t-s)v(s)\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1)} &\leqslant \sqrt{\sigma_d}\|\partial_t \mathrm{E}(t-s)v(s)\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_1)} \\
&\leqslant \mathrm{C}_d\,\sigma_d \cdot (t-s)^{-d} \cdot \|v(s)\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1)} \\
&\leqslant \mathrm{C}_d\,\sigma_d \cdot (t-s)^{-d} \cdot \|v(s)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}$$

Cette majoration permet de conclure pour le morceau restant propre à la dimension paire, vu que $t \mapsto t^{-d}\mathbb{1}_{[4,+\infty[}(t)$ est dans $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}_+)$. □

Démonstration (du théorème II.3). De la même manière que l'on pouvait supposer $t \geqslant 4$ dans la démontration du théorème II.2, on supposera ici que $t \geqslant 6$.

On écrit

$$\mathrm{P}v(s) = \underbrace{\mathrm{P}v(s)\mathbb{1}_{\mathrm{B}_{\frac{t-s}{2}-2}}}_{v_1(t,s)} + \underbrace{\mathrm{P}v(s)\mathbb{1}_{\Gamma(\frac{t-s}{2}-2,t-s-4)}}_{v_2(t,s)} + \underbrace{\mathrm{P}v(s)\mathbb{1}_{\Gamma(t-s-4,t-s)}}_{v_3(t,s)} + \underbrace{\mathrm{P}v(s)\mathbb{1}_{\mathrm{B}^c_{t-s}}}_{v_4(t,s)} \quad \text{(II.13)}$$

La propriété de support d'une convolution (en fonction des supports des fonctions convoluées) montre que.

$$\partial_t \mathrm{E}(t-s)v_4(t,s)_{|\mathrm{B}_1} = 0$$

et, en dimension impaire d'espace,

$$\partial_t \mathrm{E}(t-s)v_1(t,s)_{|\mathrm{B}_1} = \partial_t \mathrm{E}(t-s)v_2(t,s)_{|\mathrm{B}_1} = 0$$

D'autre part, comme $\partial_t \mathrm{E}(t-s)$ est un endomorphisme de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ continu de norme 1,

$$\|\partial_t \mathrm{E}(t-s)v_3(t,s)\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1)} \leqslant \|v_3(t,s)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = \|\mathrm{P}v(s)\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma_{t-s-4,t-s})} \quad \text{(II.14)}$$

Pour majorer cette dernière quantité par une convolution d'une fonction ($\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^\infty$) avec $\|v\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}$, nous utilisons le théorème suivant :

Théorème II.4. *Soit* P *un multiplicateur de Fourier de symbole* $\mathrm{P}(\xi)$*, de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^d - \{0\}$ *et homogène de degré* 0*. Alors la tranformée (inverse) de Fourier de* $\mathrm{P}(\xi)$*, notée* $\widetilde{\mathrm{P}}(x)$ *coïncide avec une fonction* $\mathcal{C}^\infty$ *en dehors de l'origine, homogène de degré* $-d$*.*

Plus précisément, il existe une constante γ *(indépendante de* P*) telle que*

$$|\widetilde{\mathrm{P}}(x)| \leqslant \frac{\gamma \,\|\mathrm{P}\|_{\mathcal{C}^d(\mathrm{S}^{d-1})}}{|x|^d}$$

Pour une démonstration de ce résultat, voir [6]. Dorénavant, γ désignera la constante exhibée dans ce théorème.

Corollaire II.5. *Soit* $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ *à support inclus dans* B_1*, et* P *comme ci-dessus. Alors* $\mathrm{P}f$ *en de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^d - \mathrm{B}_1$*, et pour* $|x| > 1$*, on a :*

$$|\mathrm{P}f(x)| \leqslant \frac{\gamma \,\|\mathrm{P}\|_{\mathcal{C}^d(\mathrm{S}^{d-1})} \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)}}{(|x|-1)^d}$$

Démonstration. La régularité annoncée de $\mathrm{P}f$ vient de la propriété de localisation du support singuliers d'une convolution (voir par exemple le chapitre 4 de [3]). L'estimation s'obtient à l'aide d'une majoration brutale. □

Corollaire II.6 (du théorème II.4). *Il existe une constante* C *ne dépendant que de* d *telle que pour toute* $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ *à support inclus dans* B_R *et* $t \geqslant 6$*,*

$$\|\mathrm{P}f\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma_{t-4,t})} \leqslant \frac{\mathrm{C}\gamma \,\|\mathrm{P}\|_{\mathcal{C}^d(\mathrm{S}^{d-1})} \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}}{t^{\frac{d+1}{2}}}$$

Démonstration. On a $\|\mathrm{P}f\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma_{t-1,t+1})} = \|\mathbb{1}_{\Gamma_{t-4,t}}\mathrm{P}\,\mathbb{1}_{\mathrm{B}_1}f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}$. L'opérateur ainsi mis en évidence $\mathbb{1}_{\Gamma_{t-4,t}}\mathrm{P}\,\mathbb{1}_{\mathrm{B}_1}$ est un opérateur à noyau, de noyau K défini par

$$\mathrm{K}(x,y) = \mathbb{1}_{\Gamma_{t-4,t}}(x)\widetilde{\mathrm{P}}(x-y)\,\mathbb{1}_{\mathrm{B}_1}(y) \tag{II.15}$$

où $\widetilde{\mathrm{P}}$ désigne la transformée de Fourier inverse de $\mathrm{P}(\xi)$, le symbole de l'opérateur P.

On a vu que

$$|\widetilde{\mathrm{P}}(z)| \leqslant \frac{\gamma\|\mathrm{P}\|_{\mathcal{C}^d(\mathrm{S}^{d-1})}}{|z|^d}$$

De fait, on a :

$$\mathrm{M}_1 := \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\|\mathrm{K}(x,\,\cdot\,)\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)} = \sup_{x\in\Gamma_{t-4,t}}\|\widetilde{\mathrm{P}}(x-\,\cdot\,)\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{B}_1)} \leqslant \frac{\mathrm{C}_d\,\gamma\|\mathrm{P}\|_{\mathcal{C}^d(\mathrm{S}^{d-1})}}{(t-5)^d} \tag{II.16}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_2 \quad &:= \quad \sup_{y\in\mathbb{R}^d}\|\mathrm{K}(\,\cdot\,,y)\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)} = \sup_{y\in\mathrm{B}_1}\|\widetilde{\mathrm{P}}(\,\cdot\,-y)\|_{\mathrm{L}^1(\Gamma_{t-4,t})} \\ &\leqslant \quad \frac{\mathrm{C}\,\gamma\|\mathrm{P}\|_{\mathcal{C}^d(\mathrm{S}^{d-1})}\,[t^d-(t-5)^d]}{(t-5)^d} \leqslant \frac{\gamma\|\mathrm{P}\|_{\mathcal{C}^d(\mathrm{S}^{d-1})}\mathrm{C}'_d}{t-5}\end{aligned} \tag{II.17}$$

D'après le lemme de Schur, l'opérateur est alors borné dans $\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))$ par $\sqrt{\mathrm{M}_1\,\mathrm{M}_2}$, ce qui donne en particulier le résultat cherché. $\square$

Le corollaire précédent majore ainsi le second membre de l'inégalité II.14 par le quotient $\dfrac{\|v(s)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}}{(t-s)^{\frac{d+1}{2}}}$, cette dernière majoration une fois intégrée en s étant bien la convolution de $\|v\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}$ avec une fonction $\mathrm{L}^1\cap\mathrm{L}^\infty$ (car si d est pair, $\dfrac{d+1}{2} > 1$).

Il reste les deux morceaux propres à la dimension paire. Maintenant, en dimension paire, on a :

$$[\partial_t\mathrm{E}(t-s)v_1(t,s)](x) = \int_{\mathrm{B}_{\frac{t-s}{2}-1}} \frac{\mathrm{C}_d\,\mathbb{1}_{\mathrm{B}_{t-s}}(x-y)\,(t-s)}{\sqrt{(t-s)^2-|x-y|^2}^{\,d+1}}\mathrm{P}v(s,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s$$

L'inégalité de Schwarz fournit (grâce aux inégalités $(t-s)^2-|x-y|^2 \geqslant \dfrac{3}{4}(t-s)^2$ et $\|\mathrm{P}v(s)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|v(s)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}$) :

$$\|\partial_t\mathrm{E}(t-s)v_1(t,s)\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_1)} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\sigma_d}\mathrm{C}_d\cdot(t-s)^{-d}\cdot\|v(s)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}$$

ce qui par les même arguments que précédemment apporte la conclusion pour ce morceau.

D'autre part, nous pouvons maintenant appliquer le corollaire II.5 pour estimer le terme correspondant à v_2.

$$[\partial_t\mathrm{E}(t-s)v_2(t,s)](x) = \int_{\Gamma_{\frac{t-s}{2}-2,t-s-4}} \frac{\mathrm{C}_d\,\mathbb{1}_{\mathrm{B}_{t-s}}(x-y)\,(t-s)}{\sqrt{(t-s)^2-|x-y|^2}^{\,d+1}}\mathrm{P}v(s,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
|[\partial_t \mathrm{E}(t-s)v_2(t,s)](x)| &\leqslant \int_{\Gamma_{\frac{t-s}{2}-2,t-s-4}} \frac{\mathrm{C}_d\,(t-s)}{\sqrt{(t-s)^2-(1+|y|)^2}^{d+1}} \|v(s)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \frac{\mathrm{d}y}{|y|^d} \\
&\leqslant \frac{\mathrm{C}_d}{d-1} \frac{\|v(s)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}}{(9(t-s-2))^{\frac{d+1}{2}}}
\end{aligned}
$$

Ceci conclut si $d \geqslant 2$, vu que dans ce cas $t \mapsto (9(t-2))^{-\frac{d+1}{2}}$ est intégrable sur $[\,6\,,+\infty\,[$. Mais si $d=1$, toute fonction homogène est constante, et le théorème II.2 s'applique et donne ainsi la conclusion à ce théorème-ci. $\square$

Théorème II.7. *Soient* $u_0 \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ *et* $u_1 \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ *deux données à support inclus dans* B_R*, et* u *telle que*

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\square u &=& 0 \\
u_{|t=0} &=& u_0 \\
\partial_t u_{|t=0} &=& u_1
\end{array}
\right.
$$

Alors il existe une constante C *ne dépendant que de* d *telle que pour tout* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$*, et tout* $\rho \geqslant \mathrm{R}$*, on ait :*

$$
\|\nabla_{t,x} u\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}_+,\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_\rho))} \leqslant \mathrm{C}\,\rho^{1+\frac{1}{p}} \left[\|\nabla u_0\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} + \|u_1\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}\right] \tag{II.18}
$$

Démonstration. On peut de nouveau supposer que $\mathrm{R}=\rho=1$

On se donne une fonction $\chi(t)$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, valant 0 pour $t \leqslant 1/2$ et 1 pour $t \geqslant 1$. On pose $w(t,x)=\chi(t)u(t,x)$. w est solution du problème de Cauchy suivant

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\square w &=& \chi'' u + \chi' \partial_t u \\
w_{|t=0} &=& 0 \\
\partial_t w_{|t=0} &=& 0
\end{array}
\right.
$$

La fonction $\chi'' u + \chi' \partial_t u$ est à support dans $[\,1/2\,,1\,] \times \mathrm{B}_2$ (ce qui donne des conditions initiales triviales), et

$$
\|\chi'' u + \chi' \partial_t u\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}_+,\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))} \leqslant \|\chi''\|_{\mathrm{L}^\infty} \|u\|_{\mathrm{L}^\infty([\,0\,,1\,],\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))} + \|\chi'\|_{\mathrm{L}^\infty} \|\partial_t u\|_{\mathrm{L}^\infty([\,0\,,1\,],\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))}
$$

Le théorème II.2, le fait que $u(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t \partial_t u(s)\,\mathrm{d}s$, et le fait que u et w coïncident comme distributions sur l'ouvert $t>1$ nous fournissent la conclusion recherchée. $\square$

Remarque. Nous avons un résultat analogue pour des données initiales du type $\mathrm{P}u_0$ et $\mathrm{P}u_1$. Il suffit de remarquer que le résultat s'obtient en ajoutant des multiplications par l'opérateur P (qui ne posent aucun problème substanciel) dans la démontration.

III Application au système de Maxwell-Landau-Lifshitz

1 Estimations locales en espace sur le champ électromagnétique

En prenant la divergence de la première équation de I.1 et compte tenu de div $\mathbf{E}_0 = 0$, il vient que div $\mathbf{E}(t) = 0$ pour tout t. Dit autrement, $\mathbf{E}(t) \in \mathrm{L}^2_\perp$, et donc $\mathbf{E}_\perp(t) := \mathbf{E}(t)_\perp = \mathbf{E}(t)$, de fait

$$\mathbf{E}_{||}(t) = 0 \tag{III.1}$$

En travaillant sur la seconde équation, on établit de la même manière que

$$\mathbf{H}_{||}(t) = -\mathbf{M}_{||}(t) \tag{III.2}$$

Nous avons les problèmes de Cauchy suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Box \mathbf{H}_\perp & = & -(\partial_t^2 \mathbf{M})_\perp \\ \mathbf{H}_{\perp|t=0} & = & \mathrm{P}_\perp \mathbf{H}_0 \\ \partial_t \mathbf{H}_{\perp t=0} & = & -\mathrm{P}_\perp f(\mathbf{M}_0, \mathbf{H}_0) - \mathrm{P}_\perp \,\mathbf{rot}\; \mathrm{E}_0 \end{array}\right. \tag{III.3}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Box \mathbf{E} & = & -\,\mathbf{rot}\; \partial_t \mathbf{M}_\perp \\ \mathbf{E}_{|t=0} & = & \mathbf{E}_0 \\ \partial_t \mathbf{E}_{t=0} & = & \mathbf{rot}\; \mathrm{H}_0 \end{array}\right. \tag{III.4}$$

Considérons $\mathbf{M}$ comme une donnée. On étudie les fonctions u, Φ et Ψ solutions des problèmes de Cauchy suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Box u & = & (\partial_t \mathbf{M})_\perp \\ u_{|t=0} & = & 0 \\ \partial_t u_{|t=0} & = & 0 \end{array}\right. \tag{III.5}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Box \Phi & = & 0 \\ \Phi_{|t=0} & = & 0 \\ \partial_t \Phi_{|t=0} & = & \mathrm{P}_\perp \mathbf{H}_0 \end{array}\right. \tag{III.6}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Box \Psi & = & 0 \\ \Psi_{|t=0} & = & 0 \\ \partial_t \Psi_{|t=0} & = & -\mathbf{E}_0 \end{array}\right. \tag{III.7}$$

Proposition III.1. *Soient u, Φ, Ψ les solutions respectives des trois problèmes de Cauchy III.5, III.6 et III.7. On pose $\mathbf{H}_\perp = \partial_t u + \partial_t \Phi + \mathbf{rot}\; \Psi$. Alors $\mathbf{H}_\perp$ est solution du problème de Cauchy III.3*

Démonstration. Il est clair que $\mathbf{H}_\perp$ vérifie l'équation des ondes de III.3, ainsi que la condition $\mathbf{H}_{\perp|t=0} = \mathrm{P}_\perp \mathbf{H}_0$. Il reste à calculer $\partial_t \mathbf{H}_{\perp|t=0}$:

$$\begin{array}{rcl} \partial_t \mathbf{H}_{\perp|t=0} & = & \partial_t^2 u_{|t=0} + \partial_t^2 \Phi_{|t=0} + \partial_t \,\mathbf{rot}\; \Psi_{|t=0} \\ & = & (\Delta u)_{|t=0} + \mathrm{P}_\perp (\partial_t \mathbf{M})_{|t=0} + (\Delta \Phi)_{|t=0} + [\mathbf{rot}\; (\partial_t \Psi)]_{|t=0} \\ & = & \Delta (u_{|t=0}) + \mathrm{P}_\perp f(\mathbf{M}_0, \mathbf{H}_0) + \Delta(\Phi_{|t=0}) - \mathbf{rot}\; \mathbf{E}_0 \\ & = & \mathrm{P}_\perp (f(\mathbf{M}_0, \mathbf{H}_0) - \mathbf{rot}\; \mathbf{E}_0) \end{array}$$

$\square$

On montre de manière aussi simple le résultat suivant.

Proposition III.2. *Soient u, Φ, Ψ les solutions respectives des trois problèmes de Cauchy III.5, III.6 et III.7. On pose $\mathbf{E} = \mathbf{rot}\ u + \mathbf{rot}\ \Phi - \partial_t \Psi$. Alors $\mathbf{E}$ est solution du problème de Cauchy III.4*

Corollaire III.3 (des deux précédentes propositions). *En dimension 1, 2 ou 3, on a $\mathbf{H}_\perp$ et $\mathbf{E}$ sont dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathrm{L}^2(\mathrm{B}_\rho))$ quel que soit $\rho > 0$. S'il y a dissipation, les deux champs sont même dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathrm{L}^2(\mathrm{B}_\rho))$*

Démonstration. Il suffit d'appliquer à u le théorème II.3, et le théorème II.7 à Φ et Ψ.

2 Estimations sur les dérivées premières du champ électromagnétique

Nous prouvons maintenant une estimation $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathrm{L}^2(\mathrm{B_R}))$ sur $\nabla_{t,x}\mathbf{H}_\perp$.

On a

$$\partial_t^2 \mathbf{M} = \partial_t f(\mathbf{M}, \mathbf{H}) = \mathrm{D}_m f(\mathbf{M}, \mathbf{H})\partial_t \mathbf{M} + f(\mathbf{M}, \partial_t \mathbf{H})$$

$$\begin{aligned} |\mathrm{D}_m f(\mathbf{M}, \mathbf{H})\partial_t \mathbf{M}| &\leqslant \mathrm{K}|\mathbf{H}|\,|\partial_t \mathbf{M}| \leqslant \mathrm{K}^2\,|\mathbf{H}|^2\,|\mathbf{M}| \\ |\mathrm{D}_m f(\mathbf{M}, \mathbf{H})\partial_t \mathbf{M}|^2 &\leqslant 4\mathrm{K}^4 \|\mathbf{M}\|_{\mathrm{L}^\infty}^2 \left[|\mathbf{H}_\perp|^4 + |\mathbf{M}_{||}|^4\right] \end{aligned}$$

Or, il existe une constante C_1 telle que pour presque tout $t \geqslant 0$,

$$\|\mathbf{M}_{||}(t)\|_{\mathrm{L}^4(\mathbb{R}^d)}^4 \leqslant \mathrm{C}_1 \|\mathbf{M}(t)\|_{\mathrm{L}^4(\mathbb{R}^d)}^4 \leqslant \mathrm{C} \cdot \mathrm{R}^d \|\mathbf{M}\|_{\mathrm{L}^\infty}$$

En intégrant en espace sur $\mathrm{B_R}$ les calculs précédents, il vient donc

$$\|\mathrm{D}_m f(\mathbf{M}(t), \mathbf{H}(t))\partial_t \mathbf{M}(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leqslant 4\mathrm{K}^2 \|\mathbf{M}\|_{\mathrm{L}^\infty}^2 (\|\mathbf{H}_\perp(t)\|_{\mathrm{L}^4(\mathrm{B_R})}^4 + \mathrm{C}_1\,\mathrm{R}^d \|\mathbf{M}\|_{\mathrm{L}^\infty}^4)$$

Or, comme $d \leqslant 3$, on a (voir [1]) une inégalité de Sobolev du type :

$$\|\mathrm{H}\|_{\mathrm{L}^4(\mathrm{B_R})} \leqslant \mathrm{C}(\|\mathrm{H}\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B_R})} + \mathrm{R}\|\nabla \mathrm{H}\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B_R})})$$

On obtient donc finalement

$$\begin{aligned} \|\mathrm{D}_m f(\mathbf{M}(t), \mathbf{H}(t))\partial_t \mathbf{M}(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leqslant 16\mathrm{K}^2 \|\mathbf{M}\|_{\mathrm{L}^\infty}^2 (\mathrm{R}^4 \|\nabla_x \mathbf{H}_\perp(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B_R})}^4 + \|\mathbf{H}_\perp(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B_R})}^4 \\ + \mathrm{C}\,\mathrm{R}^d \|\mathbf{M}\|_{\mathrm{L}^\infty}^4) \end{aligned} \tag{III.8}$$

Maintenant, estimons le second morceau avec une méthode similaire.

$$|f(\mathbf{M}, \partial_t \mathbf{H})| \leqslant \mathrm{K}|\mathbf{M}|\,|\partial_t \mathbf{H}|$$

$$|f(\mathbf{M}, \partial_t \mathbf{H})|^2 \leqslant 2\mathrm{K}^2 \|\mathbf{M}\|_{\mathrm{L}^\infty}^2 \left(|\partial_t \mathbf{H}_\perp|^2 + |\partial_t \mathbf{M}_{||}|^2\right)$$

$$\|f(\mathbf{M}(t), \partial_t \mathbf{H}(t))\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leqslant 2\mathrm{K}^2 \|\mathbf{M}\|_{\mathrm{L}^\infty}^2 \left(\|\partial_t \mathbf{H}_\perp(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B_R})}^2 + \|\partial_t \mathbf{M}(t)\|^2\right) \tag{III.9}$$

Il vient au final (en prenant la borne supérieure en t sur $[\,0\,,\mathrm{T}\,[$) :

$$\begin{aligned}\|\partial_t f(\mathbf{M},\mathbf{H})\|^2_{\mathrm{L}^\infty([\,0\,,\mathrm{T}\,[,\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))} \leqslant\ & \mathrm{C}_2\mathrm{K}^2\|\mathbf{M}\|^2_{\mathrm{L}^\infty}\Big[\mathrm{R}^4\|\nabla_x\mathbf{H}_\perp\|^4_{\mathrm{L}^\infty([\,0\,,\mathrm{T}\,[,\mathrm{L}^2(\mathrm{B_R}))} \\ & +\|\partial_t\mathbf{H}_\perp\|^2_{\mathrm{L}^\infty([\,0\,,\mathrm{T}\,[,\mathrm{L}^2(\mathrm{B_R}))} + \mathrm{C}(\mathbf{H}_\perp,\mathbf{M},\partial_t\mathbf{M})\Big]\end{aligned} \tag{III.10}$$

avec

$$\mathrm{C}(\mathbf{H}_\perp,\mathbf{M},\partial_t\mathbf{M}) = \|\mathbf{H}_\perp\|^4_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}_+,\mathrm{L}^2(\mathrm{B_R}))} + \mathrm{CR}^d\|\mathbf{M}\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^{1+d})} + \|\partial_t\mathbf{M}\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}_+,\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))}$$

Or, nous avons déjà montré que

$$\mathrm{C}(\mathbf{H}_\perp,\mathbf{M},\partial_t\mathbf{M}) < +\infty \tag{III.11}$$

D'autre part, dans la mesure où les quantités introduites sont supposées finies, le théorème II.2 nous dit qu'il existe une constante C_3 telle que

$$\|\nabla_{t,x}\mathbf{H}_\perp\|_{\mathrm{L}^\infty([\,0\,,\mathrm{T}\,[,\mathrm{L}^2(\mathrm{B_R}))} \leqslant \mathrm{C}_3\mathrm{R}^2\|\partial_t f(\mathbf{M},\mathbf{H})\|_{\mathrm{L}^\infty([\,0\,,\mathrm{T}\,[,\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))} + \|\nabla_{t,x}\mathbf{H}_{\perp|t=0}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \tag{III.12}$$

Mettons ces deux dernières inégalités bout à bout, et faisons l'hypothèse supplémentaire (qui permet de passer du côté gauche le terme $\|\partial_t\mathbf{H}_\perp\|^2_{\mathrm{L}^\infty([\,0\,,\mathrm{T}\,[,\mathrm{L}^2(\mathrm{B_R}))}$ dans III.10) sur les données :

Hypothèse III.1. $2\,\mathrm{C}_2\,\mathrm{R}\,\mathrm{C}_3\,\mathrm{K}^2\,\|\mathbf{M}_0\|^2_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant 1$

Sous cette hypothèse (en convenant que toutes les constantes C_i sont prises supérieures à 1), il existe une constante C_4 telle que :

$$\mathrm{C}(\mathbf{H}_\perp,\mathbf{M},\partial_t\mathbf{M}) \leqslant \mathrm{C}_4\Big[\mathcal{E}(0)^2 + \mathcal{E}(0) + (\mathrm{K}^2+\mathrm{R}^d)\|\mathbf{M}_0\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)}\Big] \tag{III.13}$$

Et posons :

$$\mathrm{X(T)} = \|\nabla_{t,x}\mathbf{H}_\perp\|^2_{\mathrm{L}^\infty([\,0\,,\mathrm{T}\,[,\mathrm{L}^2(\mathrm{B_R}))} \tag{III.14}$$

Nous obtenons, en posant $\mathrm{C}_5 = 2\,\mathrm{C}_2\,\mathrm{C}_3$:,

$$\mathrm{X(T)} \leqslant 2\,\mathrm{C}_5\,\mathrm{R}\,\mathrm{K}\,\|\mathbf{M}_0\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)}\Big[\mathrm{X(T)}^2 + \mathrm{C}_6\big(\mathcal{E}(0)^2 + \mathcal{E}(0) + (\mathrm{K}^2+\mathrm{R}^d)\|\mathbf{M}_0\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)}\big)\Big] \tag{III.15}$$

Pour conclure, remarquons que l'on a $\|\nabla_x\mathbf{H}_\perp(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)^d} = \|\,\mathbf{rot}\ \mathbf{H}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}$. Ceci étant dit, vu que l'on considère des solutions de régularité $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathrm{H}(\mathbf{rot},\mathbb{R}^d))$ du système I.1, nous en déduisons que X est une fonction continue.

Maintenant, le discriminant associé au trinôme en X(T) intervenant naturellement dans III.15 est :

$$\Delta = 1 - (2\mathrm{C}_5\,\mathrm{R}\,\mathrm{C}_6\,\mathrm{K}\,\|\mathbf{M}_0\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)})^2(\mathcal{E}(0)^2 + \mathcal{E}(0) + (\mathrm{K}^2+\mathrm{R}^d)\|\mathbf{M}_0\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)})$$

Finalement, nous obtenons, par un argument habituel que $\|\nabla_{t,x}\mathbf{H}_\perp(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B_R})}$ reste borné uniformément en t dès lors que les données initiales du champ électromagnétique, ainsi que celle de $\mathrm{K}\|\mathbf{M}_0\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)}$, sont suffisamment petites.

Enfin, remarquons que pour g dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, on a $\|\nabla g_\perp\|_{\mathrm{L}^2} = \|\,\mathbf{rot}\ g\|_{\mathrm{L}^2}$. Les équations de Mawxell, ainsi que le résultat de l'alinea précédent précisé montre alors le théorème suivant.

Théorème III.4. *Il existe des constantes c_1 et c_2 telle que pour toute donnée initiale $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0)$ au système I.1 vérifiant*

- *supp* $\mathrm{M}_0 \subset \mathrm{B}_\mathrm{R}$
- $(\mathrm{R}\,\mathrm{K}\|\mathbf{M}_0\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)})^2\,(\mathcal{E}(0)^2 + (\mathrm{K}^2 + \mathrm{R}^d)\|\mathbf{M}_0\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)} + 1) \leqslant c_1$
- $(\|\,\mathbf{rot}\ \mathbf{H}_0\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} + \|\,\mathbf{rot}\ \mathbf{E}_0\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)})\mathrm{R}\,\mathrm{K}\,\|\mathbf{M}_0\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant c_2$

et si $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$ désigne la solution du système de régularité $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathrm{H}(\mathbf{rot}\,))$, les champs $\partial_t\mathbf{E}$, $\partial_t\mathbf{H}$, $\mathbf{rot}\ \mathbf{E}$ et $\mathbf{rot}\ \mathbf{H}$ sont bornés par la quantité $\sqrt{\|\,\mathbf{rot}\ \mathbf{H}_0\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} + \|\,\mathbf{rot}\ \mathbf{E}_0\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}}$ dans l'espace de Banach $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathrm{L}^2(\mathrm{B}_\mathrm{R}))$.

Remerciements. Je remercie Guy Métivier, Stéphane Labbé et Pierre Fabrie pour leurs indications précieuses, ainsi que Gilles Carbou et David Sanchez pour leurs discussions enrichissantes.

Bibliographie

[1] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et application.* Hermann, 1966.

[2] Houssem Haddard. Modèles asymptotiques en ferromagnétisme ; couches minces et homogénéisation. *thèse de doctorat*, décembre 2000.

[3] Lars Hörmander. *The analysis of Linear Partial Differential Operators I.* Springer-Verlag, 1990.

[4] J-L Joly, Guy Métivier, and Jeffrey Rauch. Global solution to maxwell equation in a ferromagnetic medium. *Annales de l'IHP*, 1999.

[5] Laurent Schwartz. *Théorie des distributions.* Hermann, 1966.

[6] E. M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton University Press, 1970.