LES ESPACES ADIQUES

Groupe de travail - IMB - Bordeaux 1

Dajano Tossici

29 janvier 2013

Ces notes sont une introduction à les espaces àdiques de Huber. Le but est de donner les dèfinitions et les résultats plus interessants et utiles pour comprendre l'article de Scholtze [S12]

1. Valuations

Soit Γ un groupe abelien totalement ordonné (noté multiplicativament). On considére $\Gamma \cup \{0\}$ et on lui donne une structure d'ordre total en posant, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma > 0$. De plus on on peut lui donner une structure de demi-groupe commutative, qui induit sur Γ la loi de groupe donnée, en posant, pour tout $\gamma \in \Gamma \cup \{0\}$, $\gamma \cdot 0 = 0 \cdot \gamma = 0$. On vérifie aussitôt que la loi de demi-groupe respect la relation d'ordre.

Définition 1.1. Soit A an anneau. Une *valuation (ou seminorme)* sur R est une application multiplicative

$$|\cdot| : A \longrightarrow \Gamma \cup \{0\}$$

telle que

(i) $|0| = 0$, $|1| = 1$

(ii) $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ pour tout $x, y \in A$.

Si A est un anneau topologique, une valuation est dite continue si, pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a que l'ensemble $\{x \in A | |x| < \gamma\}$ est ouvert.

Définition 1.2. Pour tout valuation $|\cdot| : A \longrightarrow \Gamma \cup \{0\}$ on note avec $\Gamma_{|\cdot|} \subseteq \Gamma$ le sous-groupe engendré par les elements nonnuls de l'image de $|\cdot|$.

On dit *support* de $|\cdot|$, et on le note *supp*$(\cdot)$, l'ensemble des $x \in A$ tels que $|x| = 0$. Il est un ideal premier.

Si on a deux valuations $|\cdot| : A \longrightarrow \Gamma \cup \{0\}$ et $|\cdot|' : A \longrightarrow \Gamma' \cup \{0\}$ on dit qu'elles sont equivalentes s'il existe un isomorphisme de groupes ordonnés $\alpha : \Gamma_{|\cdot|} \longrightarrow \Gamma'_{|\cdot|}$ tel que $|\cdot|' = \alpha \circ |\cdot|$. C'est clairement equivalent á dir que, pour tous $x, y \in A$, $|x| \leq |y|$ si et seulement si $|x|' \leq |y|'$.

Définition 1.3. Un *anneau de valuation* est un anneau integre A tel que pour tout $x \in K \setminus \{0\}$, où K est le corps des fractions de A, soit $x \in A$ soit $x^{-1} \in A$.

Remarque 1.4. On a que on sous-anneau de A de K est un anneau de valuation discrete si et seulement si il est maximale dans l'ensemble $\{C \subseteq K | C \text{ anneau local}\}$, ordonné par la relation de domination.

En fait il y a une correspondence bijective entre les classes d'equivalence des valuations sur un corps K et les anneaux de valuations contenues dans K. À toute valuation $|\cdot|$ on associe l'anneau $\{x \in K | |x| \leq 1\}$. Réciproquement à tout anneau de valuation A dans K on associe la valuation

$$K \longrightarrow K^*/A^* \cup \{0\}.$$

L'ordre sur K^*/A^* est donné par $x \leq y$ si et seulement si il existe $z \in A$ tel que $x = yz$.

Remarque 1.5. Soit A un anneau. Alors il y a une correspondence bijective entre les classes d'equivalence de valuations de A et les couples $(\mathfrak{p}, |\cdot|_{\mathfrak{p}})$, où $\mathfrak{p}$ est un ideal de A et $|\cdot|$ est une valuation sur le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$. Donnée une valuation sur A on pose $\mathfrak{p} = supp(|\cdot|)$ et $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ est la valuation induite sur $A/\mathfrak{p}$. Réciproquement à une couple $(\mathfrak{p}, |\cdot|_{\mathfrak{p}})$ on associe la valuation que on obtient en composant $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ avec la projection naturelle $A \longrightarrow A/\mathfrak{p}$.

Bien sur ces ensemble sont aussi en bijection avec l'ensemble des couple $(\mathfrak{p}, B)$ où B est un anneau de valuation contenu dans le corps de fractions de $A/\mathfrak{p}$.

1.1. **Rang d'une valuation.**

Définition 1.6. Un sous-groupe H d'un groupe abelien totalement ordonné G est dit isolé si les relations $1 \leq y \leq x$ et $x \in H$ entraînent $y \in H$.

Définition 1.7. On appelle *hauteur ou rang* d'une valuation $|\cdot| : A \longrightarrow \Gamma_{|\cdot|}$ le nombre de sous-groupes propres isolés de $\Gamma_{|\cdot|}$.

On peut interpeter l'hauter d'une valuation en terms de la dimension de Krull de son anneau de valuation. Avant de montrer ça on prouve deux lemmas.

Lemme 1.8. *Soit A un anneau de valuation d'un corps K alors l'ensemble des ideaux est totalement ordonné par la relation d'inclusion.*

Démonstration. Soient I et J deux ideaux de A et suppose qu'il existe $x \in I$ tel que $x \notin J$. Alors pour tout $y \in J$ on a $x \notin (y)$, qui est equivalent à $y^{-1}x \notin A$. car A est un anneau de valuation alors $x^{-1}y \in A$ et donc $y \in (x)$, qui implique $J \subseteq I$. □

Lemme 1.9. *Soit A un anneau de valuation dans un corps K. Alours tout sous-anneau de K qui contient A est un anneau de valuation.*

Démonstration. Soit $A \subseteq B \subseteq K$ et soit $x \notin K \setminus B$. Alors, car A est de valuation, $x^{-1} \in A \subseteq B$ et donc B est de valuation aussi. □

Lemme 1.10. *Le noyau d'un morphisme de groupes abeliens totalement ordonnés est un group isolé.*

Démonstration. Soit $f : G_1 \longrightarrow G_2$ tel morphisme. Si $1 \leq x \leq y$ et $f(y) = 1$ alors $1 = f(1) \leq f(x) \leq f(y) = 1$ qui implique que x est dans le noyau. □

Le lemmas precedents permettent de définir les fonctions dans l'enoncé suivant.

Proposition 1.11. *Soit A un anneau de valuation et K son corps de fractions. Soit $\Gamma = K^*/A^*$ le groupe des valuers de la valuation associée à A. Le applications suivants sont bijectives.*

$$\begin{array}{ccccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{ideaux premiers} \\ \textit{de } A \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \textit{sous-anneaux de } K \\ \textit{qui contiennent } A \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \textit{sous-groupes} \\ \textit{isolés de } \Gamma \end{array} \right\} \\ \\ \mathfrak{p} & \longmapsto & A_{\mathfrak{p}} & & \\ \\ & & B & \longmapsto & \ker(K^*/A^* \longrightarrow K^*/B^*). \end{array}$$

La premiere fleche reverse les inclusions et la deuxieme les preserve.

En particulier l'hauteur d'une valuation $|\cdot|$ sur un corps K est tant égale à la dimension de Krull de son anneau de valuation que au nombre des sous-anneaux de K, differents de K, qui le contiennent.

Démonstration. L'inverse de la premier fleche est donné par l'application que à B associe son ideal maximal $\mathfrak{m}_B$. A priori il est un ideal de B, mais si $x \in \mathfrak{m}_B$ alors $x^{-1} \notin B$, en particulier $x^{-1} \notin A$ et donc $x \in A$. Ainsi $\mathfrak{m}_B$ est un ideal premier de A.

Pour montrer que sont l'une l'inverse de l'autre il faut montrer que pour tout ideal premier $\mathfrak{p}$ de A l'ideal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$ est $\mathfrak{p}$. Et que pour tout anneau B qui contient A si $\mathfrak{m}_B = \mathfrak{p}$ alors $B = A_{\mathfrak{p}}$.

On montre la seconde assertion car la premiére est trival. D'abord on observe qu'on a $A_{\mathfrak{p}} \subseteq B$. De plus on a que si $x \in B$ et $x \notin A_{\mathfrak{p}}$ alors $x \notin \mathfrak{p} \subseteq A$ et $x^{-1} \in A_{\mathfrak{p}}$ car $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation dans K. Ma car x est inversible in B on a aussi $x^{-1} \notin \mathfrak{p}$ qui implique que $x \in A_{\mathfrak{p}}$, car $\mathfrak{p}$ est aussi l'ideal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$. Mais ça est en contradiction avec l'assumption que $x \notin A_{\mathfrak{p}}$.

On va considérer maintenant la deuxieme fleche. L'inverse est donné comme suive. Donné un sous groupe isolé H de $\Gamma_{|\cdot|}$ on considére le quotient $\Gamma_{|\cdot|}/H$. Car H est isolé on montre que $\Gamma_{|\cdot|}/H$ est un groupe totalement ordonné, où les eléments ≤ 1 sont donné par l'image des éléments ≤ 1 de Γ. On peut aussi facilement montrer que le quotient $\Gamma_{|\cdot|} \longrightarrow \Gamma_{|\cdot|}/H$ est un morphisme de groupes abeliens ordonnés. La composition

$$|\cdot|_H : K \longrightarrow \Gamma \cup \{0\} \longrightarrow \Gamma/H \cup \{0\}$$

est une valuation. On associe à H l'anneau de valuation B_H de cette valuation, c.à.d. les éléments de valuation ≤ 1. On remarque que $B_H = \{x \in K : |x| \leq 1 \text{ ou } |x| \in H\}$. Pour montrer que les deux applications sont l'une inverse de l'autre il faut montrer que si B contient A alors B est l'anneau de valuation de

$$|\cdot|_B : K \longrightarrow K^*/A^* \cup \{0\} \longrightarrow K^*/B^* \cap \{0\}$$

et que si H est un sous groupe isolé de $\Gamma = K^*/A^*$ alors H est le noyau de $K^*/A^* \longrightarrow K^*/B_H^*$.

La premiere est immediate. Pour la deuxieme on observe que le groupe des valuers de $|\cdot|_{B_H}$ est tant K^*/B_H^* que $(K^*/A^*)/H$ (car $|\cdot|_H$ est equivalent à $|\cdot|_{B_H}$) et donc H est exactement le groupe cherché.

□

Remarque 1.12. Il suive facilement de la Proposition que si on a deux valuations $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ d'un anneau integre A alors le rang de $|\cdot|_1$ est plus grand que le rang de $|\cdot|_2$ si et seulement si l'anneau de valuation de $|\cdot|_1$ est contenu dans l'anneau de valuation de $|\cdot|_2$.

Corollaire 1.13. *Soit K un corps. Un sous-anneau de K est un anneau de valuation de hauter 1 si et seulement si sa dimension de Krull est 1.*

Il y a aussi une autre caracterization des valuation de hauter 1.

Proposition 1.14. *Une valuation $|\cdot|$ est de hauter 1 si et seulement si $\Gamma_{|\cdot|}$ est isomorphe à un sous-groupe non nul de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. On prouve d'abord que $G = \Gamma_{|\cdot|}$ est de hauteur 1 si et seulement si l'axiome d'Archiméde est vrai sur G, c.a.d. si $x > 1$ et $y \geq 1$ alors il existe $n \geq 0$ tel que $x^n \geq y$.

Soit $x \in G$ un élément plus grand que 1. Pour tout $z \in G$ on définit $|z|$ comme $\max\{z, z^{-1}\}$. Soit $H_x = \{z \in G | \text{ existe } n | x^n \geq |z|\}$. On vérifie facilement que il est un sous-groupe isolé de G. De plus, on a clairement que si un sous-groupe isolé contient x alors il contient aussi H_x. Donc G a hauteur 1 si et seulement si $H_x = G$ pour tout x. D'autre part $H_x = G$ pour tout $x \in G$ est équivalent à dire que l'axiome d'Archiméde est vrai sur G.

Il reste à prouver que si l'axiome d'Archiméde est vrai sur G alors G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Maintenant, s'il existe le plus petit élément y de $\{z \in G | z > 1\}$ alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}$. En fait si $z > 1$ alors existe, pour l'axiom d'Archiméde, le plus petit $n \geq 0$ tel que $y^n \geq z$. Si $y^n > z$ alors $z^{-1}y^n > 1$ et donc $z^{-1}y^n \geq y$, qui implique $y^{n-1} \geq z$, contre l'hypothése de minimialité de n. Donc $z = y^n$, qui montre que G est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Et si l'ensemble $\{x \in G | x > 1\}$ n'a pas de minimum alors il existe un morphisme strictement croissante de G dans $\mathbb{R}$ pour [B06, prop. 1, chap. V, §2].

□

2. Espaces spectrals

Définition 2.1. Un espace topologique X est dit *spectral* si satisfie une des suivant conditions equivalents

- X est homéomorphe à $\mathrm{Spec}(A)$ pour quelque anneau A.
- X est la limite inverse des espaces finis T_0
- X est quasi-compact, a une base des ouverts quasi-compacts stable pour intersections finies et il est sobre (c.-à.-d. tout fermé irreductible a un unique point générique).

Remarque 2.2. En particulier un espace sectral est quasi-separé. On remarque que dans la troisieme définition cette condition est impliqué par le fait que la base des ouverts quasi-compacts est stable pour intersections finies.

On utilise d'habitude la dérniere définition. Les autres définitons ne seront pas necessaires dans la suite.

Définition 2.3. Un ensemble d'un espace topologique quasi-compact et quasi-separé est dit *constructible* s'il est une réunion finie de parties de la forme $U_i \cap (X \setminus V_i)$ avec U_i et V_i ouverts quasi-compacts de X. L'intersection des constructibles est dite *pro-constructible.*

Proposition 2.4. *Soit X un espace topologique quasi-compact, T_0 et tel que il a une base d'ouverts quasi-compacts et clos pour intersections finies. Alors les conditions suivants sont equivalents.*

(i) X est spectral.

(ii) X, avec la topologie qui a comme base d'ouverts les ensemble constructibles, est quasi-compact. Cette topologie est dite topologie patch et on note X_{const}, l'espace X doué de cette topologie.

(iii) Toute famille de quasi-compact ouverts d'un sous-espace fermé de X avec la proprieté des intesections finies a une intersection pas vide.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$.

On remarque que les fermés de X_{const} sont engéndrés par les ouverts quasi compacts et les fermés de X (puisque tout fermé de X est l'intersection de complementaires des ouverts quasi-compacts, car X a une base des ouverts quasi-compacts).

Pour montrer que X_{const} est quasi-compact il faut montrer que si une famille des fermés de X_{const} a la propriété de l'intersection finie alors l'intersection des tous ces ensembles n'est pas vide. Ça est equivalent à montrer que toute famille des ensembles fermés et ensemble ouverts quasi-compacts de X qui a la propriété de l'intersection finie a intersection pas vide. On suppose que la famille est maximale pour la proprieté de l'intersection finie. En particulier X appartient à la famille et l'intersection d'un nombre fini des élements appartient à la famille. On observe que l'intersection Z de tous les fermés de la famille n'est pas vide car X est quasi-compact et X appartient à la famille. Pour la maximalité Z appartient à la famille. Supposons que $Z = Z_1 \cup Z_2$ avec Z_i fermés de X. S'ils existent U_1, U_2 ouverts quasi-compacts de la famille tels que $Z_i \cap U_i = \emptyset$ pour $i = 1, 2$, alors $Z \cap U_1 \cap U_2$ est vide. Donc on peut supposer que Z_1 a intersection non vide avec tous les ouvert quasi-compacts de la famille. Alors on a Z_1 a intersection non vide aussi avec un nombre fini des éléments de la famille, pour la maximalité de la famille. Donc encore pour la maximalité on obtient que Z_1 appartient à la famille, et ainsi $Z_1 = Z$. Ce implique que Z est irreductible. Et donc le point génerique de Z est contenu dans tous les ouvert de la famille, car chaque ouvert a intersection non vide avec Z.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Car la topologie constructible de X_{const} est quasi-compact toute famille formée d'un fermé de X_{const} et des ouverts quasi-compacts qui satisfie la propriété de l'intresection finie a intersection non vide. Pour obtenir (iii) il suffit de observer que tout ouvert quasi-compact d'un fermé Z de X_{const} est obtenu comme intersection de Z avec un ouvert quasi-compact de X.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Soit Z un fermé irreductible de X. On considére la famille de tous les ouverts quasi-compacts de Z (qui engéndrent la topologie de Z). Car Z est irreductible cette famille a la propriété de l'intersection finie. Donc par hypothése l'intersection de tous ces ouverts est non vide, et elle est l'ensemble des points génériques de Z. Car X est T_0 il existe un unique point générique. Donc X est spectral. □

Remarque 2.5. On a pour (ii) que un'ensemble pro-constructible (e.g. les ferms et les ouverts quasi-compacts) d'un espace spectral est spectral, car un pro-constructible Z de X est un fermé de X_{constr} et Z_{constr} a la topologie sous-espace de X_{constr}.

Remarque 2.6. Pour tout espace topologique X qui est T_0, quasi-compact, muni d'une base des ouverts quasi-compacts clos pour intersections finies on a que X_{constr} est Hausdorff. En fait car X est T_0 si on a deux points alors il existe un ouvert quasi-compact U de X qui contient un des point mais pas l'autre. Ma alors un point est contenu dans l'ouvert et l'autre dans le complementaire et ces deux ensembles sont deux ouverts dans la topologie constructible.

Proposition 2.7. *Soit X un espace Hausdorff et quasi-compact et soit $\{U_i, i \in I\}$ une famille des ouverts quasi-compacts (c.-à.-d. ouverts fermés car X Hausdorff) de X. Alors X muni de la topologie engéndrée par les ouverts U_i (et on note ce espace X') est spectral si et seulement si il est T_0. Dans ce cas X est l'espace constructible de X' et les U_i engéndrent une base des ouverts quasi-compacts pour la topologie de X. Et tout espace spectral est obtenu comme ça.*

Démonstration. Bien sur si X' est spectral alors il est T_0. Supposons maintenant qu'il est T_0.

On remarque d'abord que l'application naturelle $i : X \longrightarrow X'$ est continue car la topologie de X' est plus faible que la topologie de X. Donc si V est quasi-compact dans la topologie de X il est aussi quasi-compact dans X'. En particulier X' est quasi-compact. Car X est quasi-séparé les U_i engéndrent une base d'ouverts quasi-compacts de X' clos pour intersections finies. Alors par la Proposition 2.4 il suffit de montrer que X'_{constr} est quasi-compact. En fait on montrera que X est la topologie constructible de X'. On voit facilement que la preimage $i^{-1}(V)$ d'un ouvert quasi-compact de X' est quasi-compact dans X. Et donc on a que l'application naturelle $X \longrightarrow X'_{const}$ est continue, car les U_i sont ouverts et fermés dans X. Car X est quasi-compact et ${X'}_{constr}$ est Hausdorff cette application est un homéomorpisme.

La dérniere affirmations de la Proposition est immediates.

□

3. Espaces Adiques

Définition 3.1. Un corps nonarchimedien est un corps topologique (complet) k, dont la topologie est induite par une valuation nontrivial de rang 1.

Définition 3.2. Une algèbre de Tate est une k-algèbre topologique pour laquelle il existe une sous-anneau $A_0 \subseteq R$ tel que les ensemble aA_0, $a \in k^*$, forments une base de voisinages ouverts de zero. On dit que A_0 est un anneau de définition de A.

Définition 3.3. Un sous-ensemble M d'un anneau topologique A est borné si pour tout voisinage ouvert V de 0 il existe un voisinage ouvert U de 0 tel que $mv \in V$ pour tout $m \in M$ et $v \in U$.

Lemme 3.4. *Un sous-ensemble M d'une algèbre de Tate A est borné si et seulement si $M \subseteq aA_0$ pour quelque $a \in k^*$.*

Démonstration. Si $M \subseteq aA_0$ avec $a \in k^*$ alors pour tout $b \in k^*$ et $m \in M$ on a $mbA_0 \in abA_0$ et donc M est borné, Réciproquement si M est borné alors, si on considére $V = A_0$, on a que il existe $a \in k^*$ tel que $maA_0 \subseteq A_0$ pour tout $m \in M$. Et donc $M \subseteq a^{-1}A_0$. □

Lemme 3.5. *Soit A une k-algèbre. Les trois conditions suivants sont equivalents.*

(i) A est une k-algèbre de Tate

(ii) A contient un sous-anneau ouvert A_0 dont la topologie est definié par un ideal principal.

(iii) A contient un sous-anneau A_0 ouvert et borné.

Remarque 3.6. On montrera que un sous-anneau A_0 marche pour une définition si et seulement il marche pour les autres.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$. Soit A une k-algèbre de Tate. Soit ϖ un element non nul de k de valuation strictament plus petite que 1. Alors, pour tout $a \in A$, $a\varpi^n$ tend á zero et donc il existe n tel que $a\varpi^n \in A_0$. À remplacement près de ϖ avec une de ses puissance, on peut supposer que $\varpi \in A_0$ et donc $A = (A_0)_\varpi$. Ça implique aussi que la topologie sur A_0 est induite par les ideaux $\varpi^n A_0$, car pour tout $a \in k^*$ existe n tel que $\varpi^n A_0 \subseteq aA_0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. C'est clair. On n'utilise pas le fait que l'ideal est principal.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Comme dans $(i) \Rightarrow (ii)$ on peut trouver $\varpi \in k^*$ de valuation strictement plus petite que 1 tel que $\varpi \in A_0$ et $A = (A_0)_\varpi$. Car A_0 est borné, pour tout voisinage ouvert V de 0 il existe un voisinage ouvert U de 0 tel que pour tout $u \in U$ on a $uA_0 \subseteq V$. Car ϖ^n tends à 0 alors existe n tel que $\varpi^n \in U$ et donc $\varpi^n A_0 \subseteq V$. Donc les $\varpi^n A_0$ forment une systeme de voisinages ouverts de 0 et donc, en particulier, les aA_0 avec $a \in k^*$ forment un systeme de vosinages ouverts de 0.

□

Remarque 3.7. La Proposition montre que dans le cas de k-algèbres la définition de les k-algèbres de Tate sont des anneaux f-adiques, dans le sens de [Hu93, §1]. La Théorie des espaces adique peut être developpé pour ces anneaux.

Définition 3.8. Un élément x di un anneau topologique A est dit *multiplicativement borné* si $\{x^n | n \in \mathbb{N}\}$ est borné. L'ensemble des éléments multiplicativement bornés est noté par A^o. Et on appelle A^{oo} l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents.

Lemme 3.9. *Soit A une k-algèbre de Tate. Alors A° est un sous-anneau de A et il est l'union des sous-anneaux ouverts et bornés de A (ou equivalentement des anneaux de définition de A).*

Démonstration. On montre d'abord que tout élément x multiplicativement borné est contenu dans un sous-anneau B ouvert et borné de A, et donc A^{circ} est l'union des anneaux de définition de A. Soit A_0 un sous-anneau ouvert et borné de A, alors on prends $B = A_0[x]$. Il est ouvert car il est un groupe et il contient A_0, qui est un voisinage ouvert de 0. De plus il est borné car il est un produit des anneaux bornés, A_0 et $\mathbb{Z}[x]$.

Car le produit de deux sous-anneaux ouverts et bornés de A est encore un sous-anneau ouvert et borné de A on a que la somme et le produit des élément multiplicativament bornés est multiplicativament borné. Donc A° est un sous-anneau de A. □

Définition 3.10. Une *k-algèbre affinoide* est une couple (A, A^+) qui consiste d'une k-algèbre de Tate A et d'un ouvert $A^+ \subseteq A^\circ$ integralement clos dans A. Une algèbre affinoide est dite topologiquement de type fini si A est quotient de

$$k < T_1, \ldots, T_n >= \{ \sum_{i_1,\ldots,i_n \geq 0} x_{i_1,\ldots,i_n} T_1^{i_1} \ldots T_n^{i_n} \in k[T_1, \ldots, T_n] | x_{i_1,\ldots,i_n} \longrightarrow 0\},$$

pour quelque n et $A^+ = A^\circ$.

Un morphisme $(A, A^+) \longrightarrow (B, B^+)$ de k-algèbres affinoide est un morphisme $A \longrightarrow B$ de k-algèbres topologique qui envoie A^+ dans B^+.

Lemme 3.11. *Soit A une k-algèbre de Tate. Si A_0 est un sous-anneau ouvert et borné alors le completion $\hat{A}$ est de Tate, $\hat{A}_0$ est ouvert et borné et*

$$\hat{A} \simeq A \otimes_{A_0} \hat{A}_0.$$

Démonstration. Voir [Hu93, Lemma 1.6]. □

Définition 3.12. Soit (A, A^+) une algèbre affinoide. Soit

$$X = Spa(A, A^+) = \{|\cdot| : A \longrightarrow \Gamma \cup \{0\} \text{ continue } : |f| \leq 1 \text{ pour tout } f \in A^+\}/\simeq .$$

Pour tout $x \in X$ on note $f \mapsto |f(x)|$ la correspondant valuation sur R. On munit X de la topologie qui a comme base d'ouverts les *sous-ensembles rationels*

$$U\big(\frac{f_1, \dots, f_n}{g}\big) = \{x \in X || f_i(x)| \leq |g(x)| \text{ pour tout } i\},$$

où $f_1, \dots, f_n \in A$ engéndrent A comme ideal, et $g \in A$.

Remarque 3.13. La condition sur l'ideal peut être remplacé par l'hypothse que $|g(x)| \neq 0$. En fait soit $c \in k$ tel que $|cg_0(x)| \geq 1$. Il suffit de prendre c comme l'inverse d'une puissance suffisament grande d'un élément topologiquement nilpotent de k^*. Alors dans ce cas là l'ensemble est égal à $U\big(\frac{cf_0, \dots, cf_n, 1}{cg_0}\big)$. Et c'est facil de montrer que si $x \in U\big(\frac{f_1, \dots, f_n}{g}\big)$ alors $|g(x)| \neq 0$.

Si $(A, A^+) \longrightarrow (B, B^+)$ est un morphisme de k-algèbres affinoides alors $Spa(A, A^+) \longrightarrow Spa(B, B^+)$ est continu car les pre-images des ensembles rationels est rationel.

Définition 3.14. Soit $|\cdot|$ una valuation de A alors $c\Gamma_{|\cdot|}$ est le sous-groupe isol de $\Gamma_{|\cdot|}$ engéndré par les $|a| \geq 1$ avec $a \in A$. Il est dit *sous-groupe caracteristique de* $|\cdot|$.

Remarque 3.15. On a que $c\Gamma_{|\cdot|} = \Gamma_{|\cdot|}$ si et seulement si pour tout $\gamma \in \Gamma_{|\cdot|}$ il existe $a \in A$ tel que $|a| \geq \gamma$.

Proposition 3.16. *Pour toute k-algèbre affinoide (A, A^+) l'espace $Spa(A, A^+)$ est spectral. Les sous-ensembles rationels forment une base d'ouverts quasi-compacts stable pour intersection finie.*

Démonstration. On commence en définent l'espace $Spv(A)$ comme l'espace de valuations sur A. La topologie est engéndrée par les ensembles rationels du type $\{x \in Spv(A) : |f_i(x)| \leq |g_0(x)|\}$, avec $f_1, \dots, f_n$ qui engéndrent l'ideal (1).

On prouve d'abord que

$$\begin{aligned} Cont(A) :&= \{\text{valuation continues de } A\} \\ &= \{x \in Spv(A) : |a(x)| < 1 \text{ si } a \in A^{oo} \text{ et } c\Gamma_{|\cdot(x)|} = \Gamma_{|\cdot(x)|}\}. \end{aligned}$$

Nous posons sur $Cont(A)$ la topologie de sous-espace.

Si x est une valuation continue alors pour tout $\gamma \in \Gamma_{|\cdot(x)|}$ et pour tout $a \in A^{oo}$ il existe un entier n tel que $|a(x)|^n < \gamma^{-1}$. En particulier $|a(x)| < 1$. Si je prends $a = \varpi \in k^*$ alors $|\varpi^{-1}(x)| > 1$ et $|\varpi^{-n}(x)| > \gamma^{-1}$, qui implique $c\Gamma_{|\cdot(x)|} = \Gamma_{|\cdot(x)|}$.

Suppose maintenant que $|a(x)| < 1$ pour tout $a \in A^{oo}$ et soit $\gamma \in \Gamma_{|\cdot(x)|}$. Comme $c\Gamma_{|\cdot(x)|} = \Gamma_{|\cdot(x)|}$ il existe $b \in A$ tel que $|b(x)| \geq 1/\gamma$. Or soit ϖA_0, avec $\varpi \in k^*$ topologiquement nilpotent, un ouvert de la base de A. Alors $\varpi^m A_0$, $m \in \mathbb{N}$, est un systeme fundamental de voisinages, en particulier tout élément de ϖA_0 est topologiquement nilpotent. Il existe n tel que $b\varpi^n \in \varpi A_0$ et donc tel que $b\varpi^n$ soit topologiquement nilpotent. Alors $|b\varpi^n(x)| < 1$ qui implique $|\varpi(x)|^n < \gamma$. Donc on a que

$$\varpi^{n+1} A_0 \subseteq \{a \in A : |a(x)| < \gamma\},$$

car si $c \in \varpi^{n+1} A_0$ alors $c = \varpi^n \varpi z$, avec $z \in A_0$ et donc, comme $\varpi z \in A^{oo}$ et $|(\varpi z)(x)| < 1$,

$$|c(x)| = |\varpi(x)|^n |(\varpi z)(x)| < |\varpi(x)|^n < \gamma.$$

Ainsi $|\cdot(x)|$ est continue. On a le lemma suivant.

Lemme 3.17. *On considére les affirmations suivants*

(i) $Spv(A)$ est spectral et les ensembles rationels forment une base des ouverts quasi-compacts.

(ii) $Spv(A, A) = \{x \in Spv(A) | c\Gamma_{|\cdot(x)|} = \Gamma_{|\cdot(x)|}\}$, avec la topologie sous-espace, est spectral. Et les ensembles rationels forment une base des ouverts quasi-compacts.

(iii) $Cont(A)$ est spectral. Et les ensembles rationels forment une base des ouverts quasi-compacts.

(iv) $Spa(A, A^+)$ est spectral. Et les ensembles rationels forment une base des ouverts quasi-compacts.

Alors on a que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $r : Spv(A) \longrightarrow Spv(A, A)$ l'application que à $|\cdot(x)|$ associe la valuation $|\cdot(r(x))|$ telle que

$$|a(r(x))| = |a(x)|$$

si $|a(x)| \in c\Gamma_{|\cdot(x)|}$ et

$$|a(r(x))| = 0$$

sinon. Bien sur r est une retraction. On remarque que $|\cdot(r(x))| \leq |\cdot(x)|$. On va montrer que si $U = U(\frac{f_1,\ldots,f_n}{g}) \cap Spv(A, A)$ est un ensemble rationel de $Spv(A, A)$, alors $r^{-1}(U) = U(\frac{f_1,\ldots,f_n}{g})$. Soit $x \in U(\frac{f_1,\ldots,f_n}{g})$, alors nous montrons que $r(x) \in U$. Il existe surement i_0 tel que $|f_{i_0}(r(x))| \neq 0$, sinon $|1(r(x))| = 0$ qui n'est pas possible. Alors $|f_{i_0}(x)| \in c\Gamma_{|\cdot(x)|}$ et soit $|g(x)| \geq 1$, soit $1 < |g(x)|^{-1} \leq |f_{i_0}|^{-1}$, qui implique que $|g(x)| \in \Gamma_{|\cdot(x)|}$ car le groupe caracteristique est isolé. Ainsi si $x \in U(\frac{f_1,\ldots,f_n}{g})$ alors

$$|f_i(r(x))| \leq |f_i(x)| \leq |g(x)| = |g(r(x))|,$$

et donc $r(x) \in U$. Reciproquement si $x \in r^{-1}(U)$ alors $r(x) \in U \subseteq U(\frac{f_1,\ldots,f_n}{g})$ et donc $|f_i(r(x))| \leq |g(r(x))|$ pour $i = 1, \ldots, n$. On a que $|g(r(x))| \neq 0$ donc $|g(r(x))| = |g(x)| \in c\Gamma_{|\cdot(x)|}$. Si $|f_i(r(x))| = |f_i(x)|$ alors $|f_i(x)| \leq |g(x)|$ pour tout i et donc $x \in U(\frac{f_1,\ldots,f_n}{g})$. Si $|f_i(r(x))| = 0$, pour quelques i, alors $|f_i(x)| \notin c\Gamma_{|\cdot(x)|}$. En particulier $|f_i(x)| < 1$. De plus si $|f_i(x)| > |g(x)|$ alors $|g(x)|^{-1} > |f_i(x)|^{-1} > 1$. Car $\Gamma_{|\cdot(x)|}$ est isolé et $|g(x)| \in c\Gamma_{|\cdot(x)|}$ alors $|f_i(x)| \in c\Gamma_{|\cdot(x)|}$ qui contradit les hypothéses. Donc $r^{-1}(U) = U(\frac{f_1,\ldots,f_n}{g})$

Soit maintenant $\widetilde{Spv(A, A)}$ l'espace $Spv(A, A)$ muni de la topologie engéndrée par les rationels et ses complementaires. Car $Spv(A, A)$ est un sous-espace de $Spv(A)$, qui est T_0, on voit facilement que $\widetilde{Spv(A, A)}$ est un espace de Hausdorff. De plus on vient de montrer que $r : Spv(A)_{const} \longrightarrow \widetilde{Spv(A, A)}$ est continue surjective. Donc $\widetilde{Spv(A, A)}$ est aussi quasi-compact. Ainsi $Spv(A, A)$ est spectral pour la Proposition 2.7 et les rationels forment une base des ouverts quasi-compacts.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). On a que $Cont(A)$ est un ferm de $Spv(A, A)$ car il est intersection des ensembles ferms $\{x : |a(x)| < 1\}$, en faisant varier a parmi les éléments topologiquement nilpotents.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Car $Spa(A, A^+)$ est l'ensemble $\{x \in Cont(A) : |a(x)| \leq 1, \text{ si } a \in A^+ \}$, $Sp(A)$ est intersection des ouverts quasi-compacts de $Cont(A)$ et donc il est pro-construible. Et alors il est spectral. □

Il reste ainsi à montrer que $SpvA$ est spectral. On muni $\{0, 1\}$ de la topologie discréte et l'espace $\{0, 1\}^{A\times A}$ de la topologie produit, qui est donc Hausdorff et quasi-compact. On a une injection d'ensembles $\varphi : Spv(A) \longrightarrow \{0, 1\}^{A\times A}$, car toute valuation $|\cdot(x)|$ induit une relation d'ordre $a \geq b \Leftrightarrow |a| \geq |b|$. On note $Spv(A)'$ l'ensemble $Spv(A)$ tel que $\varphi(Spv(A)')$ ait la topologie sous-espace de $\{0, 1\}^{A\times A}$. On observe que $\varphi(Spv(A)')$ est ferm car il est l'ensemble des relations binaires $|$ tels que, pour tous $a, b, c \in A$

(1) $a|b|$ ou $b|a$.
(2) Si $a|b$ et $b|c$ alors $a|c$.
(3) Si $a|b$ et $a|c$ alors $a|(b + c)$.
(4) Si $a|b$ alors $ab|ac$.
(5) Si $ac|bc$ et $0 \nmid c$ alors $a|b$.
(6) $1|0$.

Donc $Spv(A)'$ est quasi-compact et Hausdorff.

Les ensembles $\{x \in Spv(A)' : |f(x)| \leq |g(x)|\}$ sont ouverts et ferms. Car la topologie de $Spv(A)$ est engéndré par les ensembles rationels alors on a que X est spectral par la Proposition 2.7, car il est T_0. □

Remarque 3.18. Dans la preuve on a montré que

$$Cont(A) = \{x \in Spv(A) : |a(x)| < 1 \text{ si } a \in A^{oo} \text{ et } c\Gamma_{|\cdot(x)|} = \Gamma_{|\cdot(x)|}\}$$

et donc

$$Spa(A, A^+) = \{x \in Spv(A) : |f(x)| < 1 \text{ si } f \in A^{oo},\ |g(x)| \leq 1 \text{ si } g \in A^+ \text{ et } c\Gamma_{|\cdot(x)|} = \Gamma_{|\cdot(x)|}.\}$$

Proposition 3.19. *Soit (A, A^+) une k-algbre affinoid et $(\hat{A}, \hat{A}^+)$ son completion. Alors $Spa(A, A^+)$ est homéomorphe à $Spa(\hat{A}, \hat{A}^+)$, en identifiant les ensembles rationels.*

Démonstration. Voir [Hu93, Proposition 3.9]. □

Proposition 3.20. *Soit A une k-algèbre affinoide et soit $X = Sp(A, A^+)$.*
(i) Si $X = \emptyset$ alors $\hat{A} = 0$.
(ii) Soit $f \in A$ tel que $|f(x)| \neq 0$ pour tout $x \in X$. Si A est complet alors f est inversible.
(iii) Soit $f \in A$ tel que $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in A$. Alors $f \in A^+$.

Démonstration. (i). Voir [Hu93, Proposition 3.6(i)].

(ii) On prouvera que tout ideal maximal $\mathfrak{m}$ est support d'une valuation d'un élément de $Spa(A, A^+)$. Soit $B = A/\mathfrak{m}$ muni de la topologie quotient et soit $B^+ \subseteq B$ la clôture integral de A^+ dans B. Alors (B, B^+) est une k-algèbre affinoide et l'image de l'application naturelle $Spa(B, B^+) \longrightarrow Spa(A, A^+)$ est l'ensemble des points de $Spa(A, A^+)$ qui ont comme support $\mathfrak{m}$. Donc il suffit de montrer que $Spa(B, B^+)$ est non vide. On remarque que l'ensemble A^{oo} des éléments nilpotents est ouvert, car il contient ϖA_0 avec $\varpi \in k$ nilpotent. Dès lors $\mathfrak{m}$ est fermé dans A, car $1 + A^{oo}$ est ouvert et tous ses éléments sont inversibles, étant A complete. Par suite on a que B est Hausdorff et non zero. Et donc son completé n'est pas zero, qui implique, pour (i), que $Sp(B, B^+)$ n'est pas vide.

(iii). Soit $f \in A$ tel que $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in A$ et $f \notin A \setminus A^+$. En particulier f n'est pas nilpotent car A^+ est integralement clos. Soit $A^+[f^{-1}] \subseteq A_f$. Alors $f \notin A^+[f^{-1}]$, sinon $f = \sum_{k=0}^n a_i f^{-i}$ avec $a_i \in A^+$ et donc on voit facilement que f est entier sur sur A^+, qui contradit le fait que A^+ est integralement clos. Par suite il existe un ideal premier $\mathfrak{p}$ de $A^+[f^{-1}]$ qui contient f^{-1}. Soit $\mathfrak{q}$ un ideal minimal de $A^+[f^{-1}]$ contenu dans $\mathfrak{p}$. On considére un anneau de valuation, du corps des fractions de $A^+[f^{-1}]/\mathfrak{q}$, qui domine $(A^+[f^{-1}]/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}$. La valuation $|\cdot|$ sur $A^+[f^{-1}]$ qu'on obtient a les suivants propriétés :
(i) le support est égal à $\mathfrak{q}$,
(ii) $|a| \leq 1$ pour tout $a \in A^+$,
(iii) $|b| < 1$ pour tout $b \in \mathfrak{p}$.
En particulier $|f^{-1}| < 1$. Car $\mathfrak{q}$ est minimal il existe un ideal premier $\mathfrak{q}'$ de A_f qui est dessus de $\mathfrak{q}$. Donc $A^+[f^{-1}]/\mathfrak{q} \subseteq A_f/\mathfrak{q}'$. On prends un anneau local, dans le corps des fractions de $A_f/\mathfrak{q}'$, maximal parmi ces qui dominent l'anneau de valuation de $|\cdot|$. Donc on obtient une valuation sur A_f qui etend $|\cdot|$. On restreint à A et donc on obtient un point $x \in Spv(A)$. On considére $r(x) \in Spv(A, A)$, où r est l'application définie dans la preuve du Lemma 3.17. Bien sur on a que $|f(r(x))| > 1$ et $|a(r(x))| \leq 1$ pour tout $a \in A^+$. Pour le Remarque 3.18, si on montre que $|c(r(x))| < 1$ pour tout c topologiquement nilpotent alors $r(x) \in Spa(A, A^+)$. Et on obtient une contradiction car on avait assumé que $|f(y)| \leq 1$ pour tout $y \in Spa(A, A^+)$.

Nous montrons maintenant que si $c \in A$ est topologiquement nilpotent alors $|c(r(x))| < 1$. Car A^+ est ouvert, il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tel que $c^n f \in A^+$ et $c^m \in A^+$. En particulier $c \in A^+$ car A^+ est integralement clos. Donc dans $A^+[f^{-1}]$ on a la relation $c^n = f^{-1}g$ avec $g \in A^+$. Car $f^{-1} \in \mathfrak{p}$ alors $c \in \mathfrak{p}$ et donc $|c(r(x))| < 1$. □

On peut munir $X = Spa(A, A^+)$ d'une structure de faisceau $\mathcal{O}_X$ que on va définir.

Définition 3.21. Soit (A, A^+) une k-algèbre affinoide et soit $U = U\left(\frac{f_1,\ldots,f_n}{g}\right) \subseteq X = Spa(A, A^+)$ un ensemble rationel. Soit A_0 un anneau de définition de A. On munit la sous-algèbre $A[\frac{f_1}{g}, \ldots, \frac{f_n}{g}]$

de $A[g^{-1}]$ de la topologie dont une base des ouverts est formé par les $aA_0[\frac{f_1}{g}, \ldots, \frac{f_n}{g}]$ avec $a \in k^*$. Soit $B \subseteq A[\frac{f}{g}, \ldots, \frac{f_n}{g_n}]$ la clôture integrale de $A^+[\frac{f_1}{g}, \ldots, \frac{f_n}{g}]$ dans $A[\frac{f_1}{g}, \ldots, \frac{f_n}{g}]$. Alors $(A[\frac{f_1}{g}, \ldots, \frac{f_n}{g}], B)$ est une k-algèbre affinoide et on note $(A < \frac{f_1}{g}, \ldots, \frac{f_n}{g} >, \hat{B})$ son complété.

On remarque que $\varphi : Spa(A < \frac{f_1}{g}, \ldots, \frac{f_n}{g} >, \hat{B}) \longrightarrow Spa(A, A^+)$ factorize par U, car $f_i/g \in B$ pour tout i et donc $|(f_i/g)(\varphi(x))| \leq 1$.

Proposition 3.22. *Soient les notations comme dans la définition. Alors pour tout k-algèbre affinoide complete (B, B^+) avec une morphisme $\varphi : (A, A^+) \longrightarrow (B, B^+)$ tel que l'application induit $\varphi^* : Spa(B, B^+) \longrightarrow Spa(A, A^+)$ factorize par U, il y a un unique morphisme de k-algèbres de Tate*

$$(A < \frac{f_1}{g}, \ldots, \frac{f_n}{g} >, \hat{R}) \longrightarrow (B, B^+)$$

qui factorise φ. En particulier l'algèbre de Tate $(A < \frac{f_1}{g}, \ldots, \frac{f_n}{g} >, \hat{R})$ depend seulement de U.

Démonstration. Car $(f_1, \ldots, f_n) = (1)$, pour tout $x \in Spa(A, A^+)$ il existe i_0 tel que $|f_{i_0}| \neq 0$. Donc en particulier $|g(x)| \neq 0$ pour tout $x \in U$. Car φ factorise par U on a que $|\varphi(g)(y)| = |g(\varphi^*(y))| \neq 0$ pour tout $y \in Spa(B)$. Pour la Proposition 3.20(ii) on a que $\varphi(g)$ est inversible. On a de plus que $|\varphi(f_i)/\varphi(g)(y)| \leq 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et pour tout $y \in Spa(B)$. Donc, pour la Proposition 3.20(iii) $\varphi(f_i)/\varphi(g) \in B^+ \subseteq B^o$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Ça implique que le morphisme naturel

$$\varphi : A < \frac{f_1}{g}, \ldots, \frac{f_n}{g} > \longrightarrow B,$$

qui factorize $A \longrightarrow B$, est continu. En fait car $\varphi_i(f_i/g)$ est multiplicativement borné, pour tout i, il appartient à un sous-ring B_0 qui définit la topologie de B. Soit cB_0 avec $c \in k^*$ et soit a tel que $f_{|A}(aA_0) \subseteq cB_0$, alors $f^{-1}(cB_0)$ contient $aA_0 < \frac{f_1}{g}, \ldots, \frac{f_n}{g} >$. Donc il induit un morphisme de k-algèbres de Tate. ☐

Pour la proposition precedente on peut donner la définition suivante.

Définition 3.23. Pour tout ensemble rationel U de $X = Spa(A, A^+)$ on pose, avec les notations precedents,

$$(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U)) = (A < \frac{f_1}{g}, \ldots, \frac{f_n}{g} >, R^+).$$

En particulier $(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X^+(X)$ est le completion de (A, A^+). Et on définit sur X les prefaisceaux à valeurs dans la catégorie des anneaux topologiques complets

$$\mathcal{O}_X(V) = \varprojlim_{U \subseteq V \text{ rationel}} \mathcal{O}_X(U).$$

et

$$\mathcal{O}_X^+(V) = \varprojlim_{U \subseteq V \text{ rationel}} \mathcal{O}_X^+(U).$$

Remarque 3.24. Si $V \subseteq U$ est une inclusion des ensembles rationels alors il exist un morphisme

$$\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V)$$

tel que le diagram naturel commute.

Remarque 3.25. Si A est complet alors $\mathcal{O}_X(X)$ est isomorphe à A.

Lemme 3.26. *Soit U un ensemble rationel dans $X = Spa(A, A^+)$. Alors le morphisme naturel $g : Y = Spa(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U)) \longrightarrow X$ est un homeomorphism sur U. Et on a une correspondence entre les ensembles rationels de X contenus dans U et les ensembles rationels de $Spa(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U)$*

De plus pour tout rationel V dans U il existe un isomorphisme $r : \mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(g^{-1}(V))$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(U) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_X(V) \arrow[r, "r"] & \mathcal{O}_Y(g^{-1}(V)) \end{tikzcd}$$

Démonstration. Facile, voir [Hu94, Lemma 1.5]. □

Car $\mathcal{O}_X$ est un prefaisceau (pour le Remarque) on peut considérer le germe $\mathcal{O}_{X,x}$ dans un point $x \in X$. Car les ensemble rationels sont une base des ouverts de X alors

$$\mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{U \text{ rationel}} \mathcal{O}_X(U).$$

Ça implique que on pour tout $x \in X$ on peut etendre la valuation qui correspond à x à $\mathcal{O}_{X,x}$, car U est homéomorphe à $Spa(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$.

Proposition 3.27. *Soit $X = Spa(A, A^+)$ une k-algèbre affinoide.*

(i) L'anneaux $\mathcal{O}_{X,x}$ est local et son ideal maximale est le support de la valuation qui correspond à x.

(ii) Pour tout ouvert U de X on a que

$$\mathcal{O}_X^+(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) : |f(x)| \leq 1\}$$

(iii) $\mathcal{O}_{X,x}^+ = \{f \in \mathcal{O}_{X,x} : |f(x)| \leq 1\}$. Il est local et son ideal maximale est $\{f \in \mathcal{O}_{X,x} : |f(x)| < 1\}$.

Démonstration. (i). Soit $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ qui n'est pas dans le support de x. Il existe un ensemble rationel U qui contient x et $f \in \mathcal{O}_X(U)$. On a que $|f(x)| \neq 0$. Car x est continue sur $\mathcal{O}_X(U)$ il existe $\varpi \in k^*$ tel que $|\varpi(x)| \leq |f(x)|$. Donc on considére l'ensemble rationel $U(\frac{\varpi}{f})$ contenu dans $Spa(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$. Alors son image par le morphisme $Spa(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U)) \longrightarrow X$ est un ensemble rationel V contenu dans U. Et si $y \in V$ alors $|f(y)| \neq 0$. Donc on a que f est inversible dans $\mathcal{O}_X(V)$, qui implique f inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$.

(ii) Ça suive de la Proposition 3.20.

(iii). La description explicite suive de (ii) Soit maintenant $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ tel que $|f(x)| = 1$ alors f est inversible in $\mathcal{O}_{X,x}$ (car $|f(x)| \neq 0$) et de plus son inverse a module 1 et donc il est inversible en $\mathcal{O}_{X,x}^+$. □

On remarque que en géneral $\mathcal{O}_X$ n'est pas un faisceau. Voir l'Exemple

Remarque 3.28. Pour la Proposition on a que $\mathcal{O}_X^+$ est un faisceau si le même est vrai pour $\mathcal{O}_X$.

On a des resultats dans des cas.

Théorème 3.29. *Soit (A, A^+) une k-algèbre telle que $A < T_1, \ldots, T_n >$ soit noetherien pour tout $n \geq 0$ (on dit dans ce cas là que A est fortement noetherien). Alors $\mathcal{O}_X$ est un faisceau, où $X = Spa(A, A^+)$.*

Démonstration. Voir [Hu94, Théorème 2.2]. □

Le cas des k algèbre perfectoid très loin de l'être noetherien. Mais le resultat est encore vrai.

Soit (V) la catégorie des triples $(X, \mathcal{O}_X, |\cdot(x)| : x \in X)$ où X est un espace topologique localement annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ avec $\mathcal{O}_X$ faisceau des k-algèbres topologiques completes et, pour tout $x \in X$, une valuation continue $f \mapsto |f(x)|$ sur $\mathcal{O}_{X,x}$. Les morphismes sont donnés par morphismes des espaces localement annelés qui sont morphismes continus de k-algèbres sur $\mathcal{O}_X$ et compatibles avec les valuations.

Définition 3.30. Une k-algèbre affinoide (A, A^+) tel que $\mathcal{O}_X$ soit un faisceau appartient à (V) et elle dite *espace affinoide adique.*

Un objet de (V) qui est localement isomorphe à un espace affinoide adique est dit *espace adique.*

Proposition 3.31. *Pour tout k-algèbre affinoide adique (A, A^+) et tout espace adique Y on a une application naturelle bijective*

$$\gamma : \mathrm{Hom}((A, A^+), (\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_Y^+(Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y, X),$$

où $X = Spa(A, A^+)$. En particulier la catégorie des k-espaces affinoide adiques est equivalent à la catégorie des k-algèbre affinoides completes telles que le prefaisceau de structure soit un faisceau.

Démonstration. On considére le case affinoide $Y = Spa(B, B^+)$. On peut déduir facilement le cas général à partir de celui-là. Soit $\varphi : (A, A^+) \longrightarrow (B, B^+)$ un morphisme de k-algèbres affinoides (pas forcement completes). Le morphisme $Sp(\varphi) : Y = Spa(B, B^+) \longrightarrow X = Spa(A, A^+)$ est continu, de plus si U est rationel dans X alors $\varphi^{-1}(U)$ est rationel dans Y et on a un morphisme naturel

$$\varphi^\# : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \varphi_*\mathcal{O}_Y(U).$$

Car les rationels sont une base des ouverts on obtiens un morphisme de faiceaux. Et le morphisme induit sur les germes est compatible avec les valuations. Donc $(\varphi, \varphi^\#) : X \longrightarrow Y$ est un morphisme d'espaces adiques. Si B est complet alors le morphisme est injective car dans ce cas là on a le diagram commutative (et pareil pour les $+$)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{O}_X(X) \arrow[d, "\varphi^\#"] \\ B \arrow[r, "r"] & \mathcal{O}_Y(Y) \end{tikzcd}$$

avec la fleche orizontal en bas qui est un isomorphisme car B est complet. Donc on a que l'application γ est injective car si on a φ_1 et φ_2 qui induisent le même morphisme d'espace adiques alors $r \circ \varphi_1 = r \circ \varphi_2$ qui implique $\varphi_1 = \varphi_2$.

Soit maintenant $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme des espaces adiques. En particulier on a un morphisme $\mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$. Car B est complet alors B est isomorphe à $\mathcal{O}_Y(Y)$ est donc on voit facilement qu'on a un morphisme $\varphi : A \longrightarrow B$ continu qui fait commuter le diagramme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{O}_X(X) \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "r"] & \mathcal{O}_Y(Y) \end{tikzcd}$$

Car pour tout $x \in X$ on a que $\mathcal{O}_{Y,r(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est compatible avec les valuations, alors $r(x) = Sp(f)(x)$. On remarque que x est donné par la composition de $A \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ avec la valuation sur $\mathcal{O}_{X,x}$.

De plus on a que pour tout rationels $V = U(\frac{f_1,\ldots,f_n}{g})$ de Y, $r^{-1}(V) = Sp(f)^{-1}(V) = U$ est rationel et bien sur on a le diagramme commutative suivant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{O}_X(U) \arrow[d, "\varphi^\#"] \\ B \arrow[r] & \mathcal{O}_Y(V) \end{tikzcd}$$

si la premiere fleche est induite par r ou par $Sp(f)$. Mais car g est invertible dans $\mathcal{O}_X(U)$ alors on a que le diagramme commute aussi en remplacent $\varphi : A \longrightarrow B$ avec $\varphi : A[1/g] \longrightarrow B[1/g]$. Car $A[1/g]$ est dense en $\mathcal{O}_X(U)$ alors le deux morphismes sont egaux.

□

4. Filtres et valuations

Dans cette section on suppose k corps complet et A une k-algèbre affinoide topologiquement de type fini (t.t.f), c.à.d. un quotient de $T_n := k < T_1, \ldots, T_n >$ et $A^+ = A^0$. La topologie est induite par la norme $|| \cdot ||_{Gauss}$ induite par la norme de gauss de T_n. On remarque que A est noetherien et tout k-algèbres homorphismes entre k-algèbre de Tate t.t.f. est continu [FVdP04, Théoréme 3.2.1]. On note par $X' = Max(A)$ l'ensemble des ideaux maximaux de A.

Définition 4.1. Un *filtre* p sur $Max(A)$ est une collection des rationels de $Max(A)$ satisfiant
(p1) $X' \in p$ et $\emptyset \notin p$
(p2) Si $U_1, U_2 \in p$ alors $U_1 \cap U_2 \in p$
(p3) Si $U \in p$
Si de plus p satisfie
(p4) Si $U \in p$ et $U = U_1 \cup U_2$ avec U_i ouverts alors soit $U_1 \in p$ soit $U_2 \in p_2$.
alors on dit que p est un *filtre premier*. On note avec $\mathcal{P}(X')$ l'ensemble des filtres premiers de X' et avec $\mathcal{M}(X')$ l'ensemble des filtres maximaux de X', respect à l'inclusion. On pose sur $\mathcal{P}(X')$ la topologie engéndré par les ensembles $\{p \in \mathcal{P}(X') | U \in p\}$, avec U rationel de $Max(A)$.

Remarque 4.2. Le lemma de Zorn implique que tout filtre premier est inclus dans un filtre maximal.

Lemme 4.3. *Un filtre maximal est premier.*

Démonstration. Soit p un filtre maximal et soit $U = U_1 \cup U_2$. Suppose que $U_1 \notin p$. On considére la collection des ensembles $\mathcal{G}$ formés par les ouverts qui contiennent quelque $W \cap U_1$ avec $W \in p$. Elle satisfait les conditions $(p2)$ et $(p3)$ de la définiton de filtre et contient strictement p, qui est maximal. Donc il existe un élément de p qui a intersection vide avec U_1. Suppose maintenant que aussi U_2 n'appartient pas à p. On applique le même argument à U_2. Donc il existent $W_i \in p$, $i = 1, 2$, tels que $W_1 \cap U_1 = \emptyset$ et $W_2 \cap U_2 = \emptyset$ et donc $W_1 \cap W_2 \cap U = \emptyset$, qui contradit le fait que p est un filtre. □

Ici nous citons, sans preuve, un resultat crucial pour ce qui suit.

Théorème 4.4. *On a une bijection entre les ensembles rationels de $Max(A)$ et les ensembles rationels de $Spa(A, A^o)$.*

Démonstration. Voir [Hu93, Corollaire 4.3]. □

On a une consequence presque immediate. On rappelle que en géometrie rigide-analtyque à une k-algèbre affinoide t.t.f. une topologie de Grothendieck $\mathcal{T}_A$. Les objets de la catégorie $\mathcal{T}_A$ sont les sous-ensembles rationels de $Max(A)$ et les morphismes sonts donnés par les inclusions. Une famille $\{U_i | i \in I\}$ des ensemble rationels de $Max(A)$ est un recouvrement de un ensemble rationel de U s'il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $U = \cup_{i \in I} U_i = \cup_{i \in J} U_i$.

Corollaire 4.5. *La catégorie des faisceaux de la topologie de Grothendieck $\mathcal{T}_A$ est canoniquement isomorphe à la catégorie des faisceaux de l'espace topologique $Spa(A, A^\circ)$.*

Démonstration. On va construire une equivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux de la topologie de Grothendieck $\mathcal{T}_A$ et la catégorie des faisceaux de l'espace topologique $Spa(A, A^\circ)$. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur $\mathcal{T}_A$ on considére le prefaisceau $\tilde{\mathcal{F}}$ sur $Spa(A, A^\circ)$ donné par

$$\tilde{F}(U) = \varprojlim_{V \subseteq U \text{ rationel}} \mathcal{F}(V \cap Max(A)).$$

En fait on voit aisement qu'il est un faisceau en utilisant le fait que les ensembles rationels de $Spa(A, A^\circ)$ sont quasi-compacts (Proposition 3.16).

Le quasi-inverse de ce foncteur est defini comme-ça. Si $\tilde{\mathcal{G}}$ est un faisceau sur $Spa(A, A^\circ)$ on définit le prefaisceau $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{T}_A$ comme

$$\mathcal{G}(U) := \tilde{\mathcal{G}}(\tilde{U})$$

oú $\tilde{U}$ est l'unique ensemble rationel de $Spa(A, A^{circ})$ tel que $\tilde{U} \cap Max(A) = U$, qu'il existe pour le Théorème 4.4. On montre qu'il est un faisceau en utilisant encore le Théorème 4.4. □

On va maintenant a construire une application

$$s : X = Sp(A) \longrightarrow \mathcal{P}(X').$$

Soit $x \in X$, on définit $s(x)$ comme la collection

$$U \cap Max(A) \text{ tel que } U \text{ soit un ouvert rationel de } Sp(A, A^o) \text{ qui contient } x.$$

Théorème 4.6. *L'application $s : X = Spa(A, A^o) \longrightarrow \mathcal{P}(X')$ est un homeomorphisme. De plus les filtres maximaux correspondent à les valuations de rang* 1.

Démonstration. On a que $s(x)$ est premier car les ensembles rationels de $Max(A)$ sont en correspondence bijective avec les ensembles rationels de X.

Soient x, y deux point distinct de X. Car X est T_0 il existe un ensemble rationel qui contient un point mais pas l'autre. Et donc $s(x) \neq s(y)$.

Soit p un filtre premier. On pose $p' = p \cup \{Max(A) \setminus U | U$ rationel de $Max(A)$ et $U \notin p$ $\}$. On a que l'intersection finie des elements de p' est non vide. En fait si les éléments de p' n'appartiens à p, alors avoir une intersection finie vide veut dire que il existe une union finie des rationels pas en p qui recouvrent $Max(A)$. Ça contradit le fait que p est premier. La raisonnement est similaire si on fait l'intersection de ce ensemble avec un élément de p.

Si $V \in p'$ il existe $\tilde{V} \subseteq Spa(A, A^o)$ tel que $\tilde{V} \cap Max(A) = V$. Donc un intersection finie de ces $\tilde{V}$ est non vide et ainsi l'intersection D de tous les $\tilde{V}$ est non vide car X est quasi-compact. On a que $s(x) = p$ pour tout $x \in D$ (qui a posteriori est unique car p est injective).

Finalement on remarque que, si U est un ensemble rationel de X, $s(U) = \{p \in \mathcal{P}(X) | U \in p\}$. En fait on a par définition que $U \cap Max(A) \in s(x)$ si et seulement si $x \in U$. Donc $s(U)$ est ouvert dans $\mathcal{P}(X)$ et ainsi s est un homéomorphisme.

Pour la deuxieme affirmation on a que $s(x) \subseteq s(y)$ si et seulement si y specialize à x. De plus on a le lemma suivant qui montre que les filtres maximaux correspondent à les valuations de rang 1. □

Lemme 4.7. *Dans les notations precedentes on a que y specialize à x si et seulement ils sont le même support et le rang de y est plut petit que celui-là de x.*

Démonstration. On prouve d'abord la *seulement si part.* On remarque que y specialize à x si et seulement si tout ouvert qui contient x contient y. Si $g \notin Supp(x)$ alors il existe $f \in k^*$ tel que $x \in U(\frac{f}{g})$ et donc $y \in U(\frac{f}{g})$. En particulier $|g(y)| \neq 0$, c.-à.-d. $g \notin supp(y)$. Si par contre $g \in supp(x)$, alors pour tout $f \in A$ tel que $|f(x)| \neq 0$, on a $x \in U(\frac{g}{f})$ et donc $y \in U(\frac{g}{f})$. On peut chosir $f \in k^*$ topologiquement nilpotent tel que $|f(y)|$ petit à plaisir, qui implique $|g(y)| = 0$. Donc $g \in supp(y)$. Ainsi $supp(x) = supp(y)$. De plus car $|g(x)| \leq 1$ implique $|g(y)| \leq 1$ alors le rang de x est plus grand que le rang de y (voir Remarque 1.12).

On montre maintenant la *si part.* On se raméne d'abord au cas A en factorisant pour le support des valuations. Et ici on applique encore le Remarque 1.12, car pour tout $f, g \in A$ et tout valuation z, $|f(z)| \leq |g(z)|$ si et seulement si f/g appartiens à l'anneau de valuation de z. □

Remarque 4.8. Un point de X correspond à une valuation de rang 1 si et seulement si il est le point génerique d'un composante irreductible. En fait, comme on a vu, un point x specialize à y si et seulement si $s(y) \subseteq s(x)$. Et donc un point est le point génerique d'une composante irreductible si et seulement si $s(x)$ est maximal. En particulier pour tout filtre premier p il existe un seul filtre maximale qui le contiens.

5. Exemples

Exemple 5.1. Soit n un corps nonarchimedien. On remarque que k° est un anneau de valuation et $k^{\circ\circ}$ son ideal maximal.

Tout valuation $|\cdot|$ sur k est continue. En fait on a que $c\Gamma_{|\cdot|} = \Gamma_{|\cdot|}$ car k est un corps (voir le Remarque 3.15) et en plus $k^{\circ\circ}$ est contenu dans l'ideal maximal de l'anneau de valuation de $|\cdot|$ (voir la Proposition 1.11). Donc, pour le Remarque 3.18, on a que toute valuation sur k est continue. On a aussi, pour le Remarque 1.12, que tout anneau de valuation de k est contenu dans k°, car k° a rang 1.

Soit maintenant k^+ un anneau de valuation contenu dans k^o. Alors on

$$X = Spa(k, k^+) = \{B \text{ anneaux de valuation tel que } k^+ \subseteq B \subseteq k^\circ\}.$$

On dit que (k, k^+) est un *corps affinoide*. On a que la valuation original de k est le point génerique et une ensemble U est rationel si et seulement si la condition suivante est satisfaite

U contient B si et seulement s'il contient tous les anneaux de valuation en k qui contiennent B.

On remarque que les ouverts rationels sont du type $\{x : |f(x)| \leq 1, f \in k\} = \{B \in Spa(k, k^+) | f \in B\}$. En fait, un ensemble rationel $U(\frac{f_1,\dots,f_n}{g})$ est bien sur égal à $U(\frac{f_1/g,\dots,f_n/g}{1})$ qui est l'ensembl cherch. Mais l'ensemble des valuations qui contiennent k^+ et bien ordonn. Soit B_i le plus petit anneau de valuation dans X qui contient f_i/g. On prends le B_{i_0} minimal et donc on a que $U(\frac{f_1,\dots,f_n}{g}) = U(\frac{f_{i_0}/g}{1})$, qui corresponds à les anneaux de valuation qui contiennent B_{i_0}. On remarque finalement, en utilisant à nouveau le Remarque 1.12, qu'on a un homéomorphisme entre X et $\mathrm{Spec}(k^+/(k^{\circ\circ}))$.

Remarque 5.2. Avec l'exemple precedent on voit que il n'est pas vrai en général que la restriction sur k d'un élément de $Spa(A, A^+)$ est équivalent à la valuation originaire sur k. Mais ça est vrai si on a $k^0 = A^+ \cap k$ car, grace à la Proposition 3.20, on a que l'anneau de valuation de l restriction sur k d'une valuation dans $Spa(A, A^\circ)$ est $A^+ \cap k$. Donc, si $k^0 = A^+ \cap k$, on peut supposer que la restriction d'une valuation dans $Spa(A, A^+)$ coincide avec la valuation originaire de k.

Exemple 5.3. Soit k un corps algébriquement clos complet nonarchimedien. On note $|\cdot|_k$ la valuation qui définit la topologie. Soit $A = k < T >$ et $X = Spa(A, A^o)$. On remarque que $A^o = k^o < T >$; de plus $Max(A)$ est en correspondence avec k^0 et dans la suite on utilisera cette correspondence sans le dire explicitement. Pour tout $d \in D = Max(A)$ et $\varrho \in \mathbb{R}$ on pose $D(d, \varrho)$ le disque fermé de rayon $0 < \varrho \leq 1$ et centre d. Pour tout $x \in X$ et $d \in Max(A)$ on pose $\varrho(d) = |(T - d)(x)|$. On remarque que $D(d, \varrho)$ appartient à $s(x)$ si et seulement si $\varrho(d) \leq \varrho$. De plus l'ensemble des diques $D(d, \varrho(d))$ est totalement ordonné. En fait pour tout $d_1, d_2 \in Max(A)$ on a

$$|d_1 - d_2|_k = |((T - d_1) - (T - d_2))(x)| \leq \max\{\varrho(d_1), \varrho(d_2)\}.$$

Dans la prémiere égalité on a utilisé le Remarque 5.2 On pose $E = \cap_{d \in Max(A)} D(d, \varrho(d))$. On a plusiers possibilités.

(1) E est un point a. Alors $s(x)$ est le filtre des rationels qui contiennent a. La valuation est donné par $f \mapsto |f(a)|_k$.

(2) E est un disque de rayon $\varrho_0 \in |k^*|$. La valuation est donnée par $\sum a_n(T - d_0)^n \mapsto \sup |a_n|_k \varrho_0^n$, qui est la norme spectrale $||\cdot||$ sur le disque, car tout les disques qui appartiennent au filtre associé a cette norme contiennent E. Si $\varrho = 1$ on appelle le point associé à cette valuation le *point de Gauss*. On a que $s(x)$ est le filtre premier des rationels qui contiennent des ensembles de la forme $V((a_i), \varrho_0) := \{y \in E : |y - a_i|_k = \varrho_0, i = 1, \dots, n\}$, avec $a_i \in E$. En fait tout rationel de cette forme est dans $s(x)$ car

$|(T-a_i)(x)| = |((T-d)+(d-a_i))(x)| = \varrho_0,$. De plus si un rationel $U = U(\frac{f_1,\dots,f_n}{f_0})$ est contenu dans $s(x)$ alors $||f_i|| \leq ||f_0||$. Soit $b \in k^*$ tel que $|b|_k = \varrho$. Pour le Théoréme de Preparation de Weierstrass on a que, pour $i = 0,\dots,n$,

$$f_i(x) = c_i \prod_{j=1}^{k_i} (\frac{x-a_{ij}}{b}) u_i(\frac{x-d}{\varrho})$$

avec $c_i \in k^0$ tel que $|c_i| = ||f_i||$, $a_{ij} \in D(d_0,\varrho)$ et $u_i(x)$ inversible in $k < x >$. On a donc $V((a_{ij}),\varrho_0) \subseteq U$. On remarque que $V((a_{ij}),\varrho)$ est aussi égal à $D(d_0,\varrho) \setminus (\cup D^o(a_{ij},\varrho))$, où D^o est un disc ouvert.

(3) E est un disque de rayon ϱ_0 pas dans $|k^*|$. On a une description comme avant pour la valuation. Le filtre premier $s(x)$ est fait par les rationels qui contiennent les ensembles du type $V((a_i),\varrho) \cap \{x||x-d_0|_k \leq \varrho_1\}$ avec $\varrho_1 < \varrho_0 < \varrho$, $\varrho, \varrho_1 \in |k^*|$ et $|a_i - d_0| = \varrho$.

On verifie facilement que $s(x)$ contient ces ensembles, car $||x-a_i|| = |d_0 - a_i|_k$. Et de plus que ce filtre est maximal donc il coincide avec $s(x)$.

(4) E est l'ensemble vide. On peut monterr que le filtre associé est l'ensemble des rationels qui contiennent un des diques $D(d,\varrho(d))$. Et x est le borne inferieur des normes spectrals sur les disques, c.-à.d.

$$f \mapsto \inf_i \sup_{x \in D(d_i,\varrho(d_i))} |f(x)|.$$

On a un application

$$r : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(x)$$

qui a un filtre premier p associe un filtre maximal $r(p)$ fait dans la façon suivante. Un rationel $U = U(\frac{f_1,\dots,f_n}{g})$ est dans $r(p)$ si et seulement si pour tout $\varrho \in \sqrt{|k^*|}$, $\varrho > 1$ on a que

$$U_\varrho := \{x : |f_i(x)| \leq \varrho |g(x)|\}$$

On remarque que $U \subseteq U_\varrho$. On a que $r(p)$ est maximal. En fait si $U = U(\frac{f_1,\dots,f_n}{f_0})$ n'est pas dans $r(p)$ alors il existe $\varrho > 1$ tel que U_ϱ n'est pas dans p. Donc si on prends le recouvrement standard de X fait par les $X_i = U(\frac{\varrho f_0, f_1,\dots,\hat{f}_i,\dots,f_n}{f_i})$ alors il existe $X_i \in p \subseteq r(p)$ pour la primalité de p. En particulier si $x \in X_i$ alors $|f_0(x)| < \varrho |f_0(x)| \leq |f_i(x)|$ et donc $X_i \cap U = \emptyset$. Donc $r(p)$ maximal. Et on remarque qu'il est l'unique maximal qui contient p.

On va montrer que les valuations $(1), (3)$ et (4) sont minimaux, c.à.d. leur preimage sous r a un seul point.

On remarque que la valuation de type (1) est minimal, car k ne contient pas des valuations de rang 1 qui contiennent $k^o = A^o \cap k$. On peut montrer ça aussi en verifiant directement que $r^{-1}(s(x)) = s(x)$.

Soit x une valuation de type (3) et soit p un filtre premier tel que $r(p) = s(x)$, alors nous montrons que si $|a_1 - d_0| > \varrho_0$ alors $U_1 = D(a_1,\varrho_1)$, avec $\varrho_1 = |c_1|_k$ et $c_1 \in k^*$, est dans p. En fait soit $U_2 = D(a_1,\varrho_2)$, avec $\varrho_2 = |c_2|_k < \varrho_1$, $c_2 \in k^*$ et $|a_1 - a_2| = \varrho_1$. Il est strictement contenu dans U_1. On a que U_2 est le rationel $U(\frac{(x-a_1),c_1^2}{(x-a_1)c_1})$. Pour tout $\varrho > 1$ on a que $U_{2,\varrho} \in p$. On observe que U_{2,ϱ_2} est un annulus contenu dans $D(a_2,\varrho_2\varrho)$. On peut donc trouver ϱ suffisantement petit tel que $U_{2,\varrho} \subseteq U_1$

Soit x une valuation de type (4). Soit p tel que $r(p) = s(x)$. Nous montrons que tous les disques $D(d,\varrho(d))$ sont en p. En fait soit $D = D(d,\varrho(d)) \in s(x) = r(p)$. Soit $D_1 = D(d_1,\varrho(d_1))$ strictement contenu en D_1. On remarque que $D = D(d_1,\varrho(d))$. On a donc $\varrho(d_1) < \varrho(d)$ Alors $D_{1,\varrho} = \{x||x-d_1| \leq \varrho_{d_1}\varrho\} \in p$ pour tout $\varrho > 1$. Si $\varrho(d_1)\varrho < \varrho(d)$ alors $D_{1,\varrho} \subseteq D$ et donc $D \in p$.

Il y a aussi des valuations de rang 2, qu'on appelle de type (5), dont filtre, comme on vient de voir, est contenu dans un filtre associé à une valuation de type (2). Soit $0 < \varrho \leq 1$. On pose sur

$\Gamma = \mathbb{R}^*_{>}0 \times \gamma^{\mathbb{Z}}$ l'ordre lexicographique où $\gamma^n < \gamma^m$ si $n > m$. On pose

$$\sum_n a_n(T-d_0)^n \mapsto (\max_n |a_n|\varrho^n, \gamma^{\min\{i:|a_i|\varrho^i \text{ est le maximum}\}}).$$

Il ne depend pas de d_0 mais seulement de $\{y \in Max(A) || y - d_0|_k < \varrho\}$.

On peut poser sur Γ aussi la relation d'ordre tel que

$$(\varrho, 1) < (1, \gamma) < (r, 1)$$

pour tout $\varrho < r \leq 1$, qui donne

$$(r, \gamma^n) < (s, \gamma^m)$$

si et seulement si $\varrho^n r < \varrho^m s$ ou $\varrho^n r = \varrho^m s$ et $n < m$. Alors on peut poser

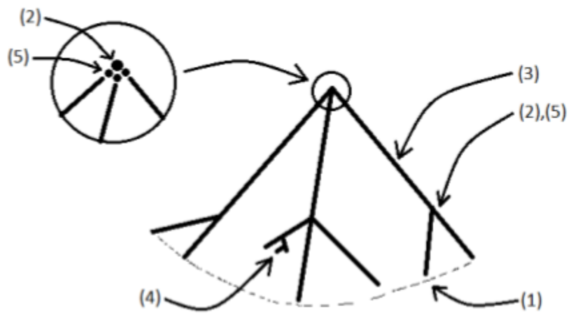
$$\sum_n a_n(T-d_0)^n \mapsto (\max_n |a_n|\varrho^n, \gamma^{-\max\{i:|a_i| \text{ est le maximum}\}}).$$

Elle depende seulement de $D(d_0, \varrho)$.

On remarque que ces valuations ont l'anneau de valuation contenu dans l'anneau de valuation d'une valuation de type (2). Donc il sont dans la clôture topologique de un point de type (2).

Car A^0 a dimension 2 on a que le rang des valuations de A est plus petit que 2. Donc il n'y a pas des autres valuations dans X.

Voici une figure qui represente l' espace adique $X = Spa(k < T >, k^\circ < T >)$. Cette figure a été prise de [S12, Exemple 2.20].



On remarque que la clôture d'un point de type (2) est formée par lui même et les points de type (5) qui sont autour de lui. Soit κ le corps residuel de k, alors cette clôture est homéomorphe à $\mathbb{A}^1_\kappa$, si le point de type (2) est le point de Gauss et à $\mathbb{P}^1_\kappa$ sinon. Dans la figure le point de Gauss est le point situé dans le cercle.

Références

[B06] Bourbaki,N., *Topologie générale*, Springer, 2006.

[FVdP04] Fresnel,J. Van der Put, M., *Rigid Analytic Geometry and its Applications*, Progress in Mathematics, **218** 2004.

[Ho68] Hochster, M., *Prime ideal structure in commutative rings.*, Trans. Am. Math. Soc., 43-60, **142**, 1969.

[Hu93] Huber, R., *Continuos valuations.*, Math. Z., 455-477, **212**, 1993.

[Hu94] Huber,R., *A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties*, Math.Z., 513-551, **217**, 1994.

[S12] Scholtze, P., *Perfectoid spaces.*, Publ. math. de IHÉS, 245–313, **116**, 2012.

[Hu94] Huber,R., *A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties*, Math.Z., 513-551, **217**, 1994.