Année 2011 - 2012

Groupe de Travail
Geométrie Algébrique et Geométrie Arithmétique

Autour de la conjecture de section de Grothendieck[1]

1 Introduction

Soient k un corps parfait, C/k une courbe lisse projective géométrique connexe de genre g. Notons K le corps des fonctions rationnells sur C, qui est donc une extension de k de degré transcendant égal à 1. Fixons une fois pour toute une clôture séparable $\overline{K}$ de K, et notons $\overline{k} \subset \overline{K}$ la clôture séparable du corps k contenue dans $\overline{K}$. On note donc $\overline{k}\cdot K \subset \overline{K}$ composé de k et K. Comme la courbe C est lisse et projective, il existe une correspondance biunivoque entre les places du corps de fonction K et les points fermés de la courbe C. Notons enfin K^{ur} la plus grande sous extension de $\overline{K}/K$ non-ramifiée sur C. On a alors le diagramme commutatif suivant de corps :

$$\begin{tikzcd}
& \overline{K} \arrow[d, dash] & \\
& K^{\mathrm{ur}} \arrow[d, dash] & \\
& \overline{k}\cdot K \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\overline{k} \arrow[dr, dash] & & K \arrow[dl, dash] \\
& k &
\end{tikzcd}$$

On obtient ainsi par définition la suite exacte suivante

$$1 \to \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/\overline{k}\cdot K) \to \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/K) \to \mathrm{Gal}(\overline{k}\cdot K/K) \to 1. \tag{1}$$

D'autre part, par définition, le groupe fondamental arithmétique $\pi_1(X)$ (resp. le groupe fondamental géométrique $\pi_1(\overline{X})$) de C/k est le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/K)$ (resp. le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/\overline{k}K)$). De plus, comme la courbe C/k est lisse, le corps k est séparable clos dans K. Il en résulte que $\overline{k} \cap K = k$. Par suite, le morphisme canonique de groupes

$$\mathrm{Gal}(\overline{k}\cdot K/K) \to \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) =: \Gamma_k$$

est un isomorphisme. On obtient ainsi *la suite exacte courte fondamentale* de la courbe C/k :

$$1 \longrightarrow \pi_1(\overline{X}) \longrightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{s} \Gamma_k \longrightarrow 1\ . \tag{2}$$

Soit maintenant $x \in C$ un point fermé de C, qui correspond donc une valuation ν_x du corps K. Notons $\overline{\nu_x}$ une place de K^{ur} au-dessus de ν_x, et $D_{\overline{\nu_x}}$ le sous-groupe de décomposition de $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/K) = \pi_1(X)$ correspondant à $\overline{\nu_x}$. Alors, le morphisme $s : \pi_1(X) \to \Gamma_k$ induit un morphisme injectif

$$s|_{D_{\overline{\nu_x}}} : D_{\overline{\nu_x}} \to \Gamma_k.$$

1. Programme pour le groupe de travail GAGA année 2011-2012, et il sera mis à jour au fur et à mesure

dont l'image est $\Gamma_{k'} \subset \Gamma_k$ avec $k' \subset \overline{k}$ le corps résiduel de ν_x. Lorsque $x \in C$ est un point *rationnel*, le corps résiduel de la valuation ν_x est isomorphe à k, et par suite le morphisme $s|_{D_{\overline{\nu_x}}}$ ci-dessus est un isomorphisme. En particulier, le sous-groupe D_x nous donne une section du morphisme $s : \pi_1(X) \to \Gamma_k$ en inversant le morphisme $s|_{D_{\overline{\nu_x}}}$, et la suite (2) est scindée. Bien sûr, comme le sous groupe de décomposition dépond du choix d'une place au-dessus de ν_x, la section ainsi obtenue est uniquement déterminée, à une conjugaison par un élément de $\pi_1(\overline{X})$ près. Notons ensuite $S_{C/k}$ l'ensemble des sections du morphisme $s : \pi_1(X) \to \Gamma_k$, et on appelle deux sections $\alpha, \beta : \Gamma_k \to \pi_1(X)$ sont équivalentes, notées $\alpha \sim \beta$, si elles sont conjuguées par un élément de $\pi_1(\overline{X})$. Posons enfin

$$\mathfrak{S}_{C/k} = S_{C/k}/\sim = \{\text{sections de } s\}/\sim$$

l'ensemble des classes d'équivalences. La discussion ci-dessus nous fournit alors une flèche canonique suivante :

$$\theta : C(k) \to \mathfrak{S}_{C/k}, \qquad x \mapsto \text{ classe de la section } \left(s|_{D_{\overline{\nu_x}}}\right)^{-1}$$

On a alors la conjecture suivante, énoncée la première fois dans une lettre de Grothendieck adressée à Faltings en 1983 [8] :

Conjecture (de section de Grothendieck). *Soient k un corps de type fini sur $\mathbb{Q}$, et C/k une courbe lisse projective géométriquement connexe de genre $g \geq 2$. Alors, le morphisme θ défini ci-dessus est une bijection.*

Cette conjecture est l'un des sujets principaux en géométrie anabélienne, un programme vaste initié encore par Grothendieck. Elle établit des liens profonds entre la théorie des groupes profinis, géométrie arithmétique, et géométrie Diophantienne. Bien que la conjecture de section de Grothendieck reste encore ouverte jusqu'à présent, on a eu pas mal de progressions vers une résolution de cette conjecture (voir par exemple [23]). L'objectif de ce groupe de travail est alors d'apprendre certains résutats (ou des méthodes) connus (classiques ou récents) autour de cette conjecture.

2 Proposition d'exposés

1. Présentation générale.
   (a) Énoncé de la conjecture des sections de Grothendieck ;
   (b) Quelques évidents de cette conjecture (énoncés de quelques résultats connus) ;
   (c) Présentation de l'organisation de ce GdT.
2. Généralités sur π_1. On pourra rappeler ici :
   (a) Définition du groupe fondamental de Grothendieck ([2]).
   (b) La suite exacte fondamentale (2).
   (c) Quelques propriétés de sections
3. Énoncé de la conjecture des sections ([23]).
   (a) Énoncé de la conjecture
   (b) version faible $\Longleftrightarrow$ version forte
   (c) injectivité de cette conjecture
   (d) Variante abélienne, birationnelle, pro-Σ de cette conjecture.
   (e) très gros π_1.
   (f) Variante ouverte, la version faible pour une courbe de genre 0.

4. Variante abélienne de la conjecture des sections (d'après Harari-Szamuely [10])
5. Variante birationnelle abélienne de la conejecture (d'après Esnault-Wittenberg [5])
6. Variante birationnelle de la conjecture (d'après Koenigsmann [14])
7. Problème indice-période (d'après Stix [22])
8. Classe de cyles (d'après Esnault-Hai, Esnault-Wittenberg [5])
9. Contre exemple de Hoshi ([12]).
10. D'autres résultats connus.....
11. Phénomène local-global. Obstruction. A détaller plus tard.

Références

[1] G. Anderson and Y. Ihara, *Pro-ℓ branched coverings of* $\mathbf{P}^1$ *and higer circular ℓ-units*, Annals of Math., **128**, 271-293, 1988

[2] A. Cadoret, *Galois Categories*, preprint, 2010. Available at http ://www.math.polytechnique.fr/˜cadoret/

[3] P. Dèbes, *Arithmétique des revêtements de la droite*, preprint, available at http ://math.univ-lille1.fr/˜pde/ens.html

[4] H. Esnault and O. Wittenberg, *Remarks on cycle classes of sections of the fundamental group*, Mosc. Math. J. 9 (2009), no. 3, 451-467.

[5] H. Esnault and O. Wittenberg, *On abelian birational sections*, Journal of American Mathematical Society, **23** (2010), 713-724.

[6] Michael D. Fried and M. Jarden, *Field arithmetic*, third edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. **11**, Springer, 2008.

[7] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental - S.G.A.1*, L.N.M. **224**, Springer-Verlag, 1971.

[8] A. Grothendieck, *Brief an G. Faltings*, letter to G. Falting in 1983.

[9] D. Harari, J. Stix, *Descent obstruction and fundamental exact sequence*, to appear in J. Stix (editor) : The Arithmetic of Fundamental Groups - PIA 2010, Contributions in Mathematical and Computational Sciences, Vol. 2, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

[10] D. Harari and T. Szamuely, with an appendice by V. Flynn, *Galois section for abelianized fundamental groups*, Math. Annalen, **344**, no 4, 779-800, 2009.

[11] Y. Hoshi, *Monodromically full hyperbolic curves of genus* 0, preprint, 2010.

[12] Y. Hoshi, *Existence of nongeometric pro-p Galois sections of hyperbolic curves*,Publ. Res. Inst. Math. Sci. **46**, 2010.

[13] Y. Hoshi and S. Mochizuki, *On the combinatorial anabelian geometry of nodally nondegenerate outer representations*, to appear in Hiroshima Math. J.

[14] J. Koenigsmann, *On the Section Conjecture in anabelian geometry*, J. reine angew. Math. **588**, 2005.

[15] M. Matsumoto, *Galois representations on profinite braid groups on curves*, J. Reine Angew. Math. **474**, 1996.

[16] S. Mochizuki, *The local pro-p anabelian geometry of curves*, Invent. Math. **138**, 1999.

[17] S. Mochizuki, *Topics surrounding the anabelian geometry of hyperbolic curves*, in Galois groups and fundamental groups, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **41**, Cambridge Univ. Press, 2003.

[18] F. Pop, it On the birational p-adic section conjectrue, Compos. Math. 146 (2010), no. 3, 621-637.

[19] F. Pop, J. Stix *Arithmetic in the fundamental group of a p-adic curve. On the p-adic section conjecture for curves*, preprint.

[20] M. Saïdi, it Good sections of arithmetical fundamental groups, preprints available in Arxiv.

[21] J. Stix, *On the geometry of higher dimensional anabelian varieties*, in : Arithmetic and Differential Galois Groups, Oberwolfach report **4**, 2007.

[22] J. Stix *On the period-index problem in light of the section conjecture*, American Journal of Mathematics 132 (2010), no. 1, 157-180.

[23] J. Stix *Evidence for the section conjecture in the theory of arithmetic fundamental groups*, Habilitationsschrift, School of Mathematics and Computer Science at the Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Januar 2011, x+190 pages.

[24] M. Stoll, *Finite descent obstructions and rational points on curves*, Algebra and Number Theory **1**, 2007.

[25] T. Szamuely, *Galois Groups and Fundamental Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mahtematics **117**, Cambridge University Press, 2009.

[26] T. Szamuely, *Heidelberg lectures on fundamental groups*, preprint, available at http ://www.renyi.hu/˜szamuely/pia.pdf