Math. Ann. (2007) 338:405–420
DOI 10.1007/s00208-007-0080-8

Mathematische Annalen

Application d'Albanese pour les courbes et contractions

Jilong Tong

Received: 4 April 2006 /
Published online: 1 February 2007

Abstract This article studies curves with singularities of "coordinate axes type". As an application, we generalize a result of Deninger and Werner (Ann Sci École Norm Sup 38(4): 553–597, 2005), which is proved in the case of good reduction, to the case where the curve has semi-stable reduction.

Résumé Cet article porte sur l'étude des courbes à singularité du type "axes de coordonnées" (TAC). Comme application, on généralise un énoncé de Deninger and Werner (Ann Sci École Norm Sup 38(4) : 553–597, 2005), prouvé dans le cas de bonne réduction, au cas où la courbe a réduction semi-stable.

Introduction

Depuis [3], on connaît les courbes semi-stables, qui sont des courbes sur un corps k, géométriquement réduites, avec pour seules singularités des points doubles ordinaires. Ces courbes jouent un grand rôle en géométrie algébrique. Toutefois, elles sont mal adaptées aux opérations de contraction. Partant d'une courbe semi-stable sur un corps k, si l'on contracte en des points, de façon minimale, certaines des composantes irréductibles, on obtient des courbes possédant des singularités plus générales que les points doubles ordinaires, que nous appelons singularités TAC (du type axes de coordonnées) définies avec précision dans 1.1.

Considérons maintenant un anneau de valuation discrète complet R de corps de fractions K, de corps résiduel k. Soit $\mathcal{X}$ une courbe semi-stable sur R de genre $g \geq 1$ à fibre générique $\mathcal{X}_K$ lisse. Soient J_K la jacobienne de $\mathcal{X}_K$ et

J. Tong (✉)
Département de Mathématiques, Université Paris-Sud Bât. 425, Université Paris Sud, Orsay, 91405 Paris, France
e-mail: jilong.tong@math.u-psud.fr

$\mathcal{N}$ le R−modèle de Néron de J_K qui est donc semi-abelien. Le choix d'un point rationnel sur $\mathcal{X}_K$ définit une immersion $a_K : \mathcal{X}_K \to J_K$ qui s'étend en une R−application rationnelle $a : \mathcal{X} \dashrightarrow \mathcal{N}$. Alors a est définie sur le lieu lisse de $\mathcal{X}$, mais n'est pas nécessairement définie aux points doubles et peut contracter en des points certaines composantes irréductibles de $\mathcal{X}_k$. On montre que si l'on effectue de façon minimale les contractions de $\mathcal{X}$ des composantes de $\mathcal{X}_k$ contractées par a, on obtient un morphisme $\mathcal{X} \to \mathcal{X}_{\min}$, où $\mathcal{X}_{\min}$ a une fibre spéciale TAC (1.12). De plus, l'application d'Albanese a se factorise en une application rationnelle $a_{\min} : \mathcal{X}_{\min} \dashrightarrow \mathcal{N}$ qui est définie sur le lieu lisse, et qui est une immersion sur chaque composante irréductible du lieu lisse de $\mathcal{X}_{\min,k}$ (1.12).

Supposons maintenant que R soit d'inégale caractéristique, de caractéristique résiduelle $p > 0$. En utilisant l'application $a_{\min}$, on montre qu'étant donné un entier positif n, le revêtement fini étale $\mathcal{Y}_K \to \mathcal{X}_K$ induit par a_K à partir de la multiplication par p^n dans J_K s'étend, après une extension finie R' de R, à un modèle propre semi-stable $\mathcal{Y}'$ sur R', et l'application $\mathcal{Y}_K \to \mathcal{X}_K$ s'étend en une R'−application $\mathcal{Y}' \to \mathcal{X}_{\min} \times_R R'$, qui, sur la fibre spéciale, se factorise à travers le n-ieme itéré du Frobenius de $\mathcal{X}_{\min} \times k$ (2.1). Comme application, on étend au cas de réduction semi-stable, l'énoncé de [4], prouvé dans le cas de bonne réduction (2.4). Nous obtenons également une démonstration simplifiée du résultat principal de [4] en éliminant les revêtements ramifiés de la fibre générique (2.7).

Je suis très reconnaissant à M. Raynaud, qui m'a proposé ce sujet. Je remercie aussi le(a) referee pour sa lecture attentive et ses remarques.

1 Généralités sur les courbes TAC

Dans cet article, une courbe sur un corps k est un schéma de type fini sur k tel que chaque composante irréductible soit de dimension 1. Si S est un schéma et x est un point de S, on note $k(x)$ le corps résiduel de S en x.

1.1 Singularité du type axes de coordonnées sur un corps algébriquement clos

Dans ce numéro, k est un corps algébriquement clos.

Définition 1.1 Soit X une courbe sur k,

(1) Si $x \in X$ est un point rationnel de X, on dit que X a une singularité du type axes de coordonnées (TAC) en x, si X est réduite au voisinage de x, et si la condition suivante est réalisée : notons $\widetilde{X}$ la normalisée de X, $\widetilde{x}_i$ ($i \in I$) les points de $\widetilde{X}$ (un nombre fini) au-dessus de x, $\widetilde{A}$ l'anneau semi-local, localisé de $\widetilde{X}$ en les $\widetilde{x}_i$, alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est le sous-anneau de $\tilde{A}$ formé des éléments $\tilde{f}$ de $\widetilde{A}$ qui prennent la même valeur dans k en chacun des $\widetilde{x}_i$.

(2) On dit que X est une courbe TAC si ses seules singularités sont du type axes de coordonnées.

Remarque 1.2 (1) Soit n un entier positif, dans l'espace affine $\mathbf{A}_k^n = \mathrm{Spec}\, k[X_1, \ldots, X_n]$, la réunion C_n des axes de coordonnées, d'équation $X_i X_j = 0$ (pour tout $i \neq j$), a une singularité du type axes de coordonnées à l'origine.

(2) Soit x une singularité TAC d'une courbe X. On lui associe un entier n, le nombre de branches en x, égal au nombre de points de la normalisée $\widetilde{X}$ de X au-dessus de x, égal aussi au nombre de composantes irréductibles de l'hensélisé $\mathcal{O}_{X,x}^h$ de $\mathcal{O}_{X,x}$. Il existe alors un diagrame de morphismes étales :

$$X \xleftarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} C_n \ .$$

Autrement dit, une singularité TAC à n branches est, localement pour la topologie étale, isomorphe à C_n. Lorsque les n composantes irréductibles de $\mathcal{O}_{X,x}^h$ apparaissent déjà dans X, on peut trouver un morphisme étale $X \to C_n$. En particulier, on en déduit que le completé $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ est k-isomorphe à $k[[X_1, \ldots, X_n]]/(X_i X_j : i \neq j)$.

(3) Soit x une singularité TAC à n branches. Si $n = 2$, x est un point double ordinaire. si $n \geq 3$, X n'est ni intersection complète, ni Gorenstein en x.

À partir de la définition, on a

Proposition 1.3 *Soient X une courbe TAC sur un corps k algébriquement clos, et $\pi : \widetilde{X} \to X$ le morphisme de normalisation. Soit Y un k-schéma. Alors un k-morphisme $f : \widetilde{X} \to Y$ se factorise à travers π si et seulement si $f(k) : \widetilde{X}(k) \to Y(k)$ se factorise à travers $\pi(k) : \widetilde{X}(k) \to X(k)$.*

1.2 Singularités TAC sur un corps quelconque

Dans ce numéro, k est un corps quelconque.

Définition 1.4 (1) Soit X une courbe sur k. On dit que X est une courbe TAC si pour une extension k'/k de k avec k' algébriquement clos (et donc pour toute extension algébriquement close k' de k), $X \times_k k'$ est une courbe TAC au sens de 1.1.

(2) Soient S un schéma, $\mathcal{X}$ un schéma de présentation finie et plat sur S, on dit que $\mathcal{X}/S$ est une courbe (relative) TAC si les fibres géométriques de $\mathcal{X}/S$ sont des courbes TAC.

Proposition 1.5 *Soit X une courbe sur k, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) *X est une courbe TAC*;

(2) *X possède les propriétés suivantes*:

 (i) *X est réduite, et sa normalisée $\widetilde{X}$ est lisse sur k*;

 (ii) *Si $x \in X$ est un point singulier, $\widetilde{x}_i$ ($1 \leq i \leq n$) les points de $\widetilde{X}$ au-dessus de x, alors les corps résiduels $k(\widetilde{x}_i)$ sont étales sur k.*

(iii) *Notons* $\widetilde{A}$ *l'anneau semi-local de* $\widetilde{X}$ *en les points* $\widetilde{x}_i$*, alors tout élément de* $\widetilde{A}$ *qui s'annule dans les* $k(\widetilde{x}_i)$ *est dans* $\mathcal{O}_{X,x}$*.*
Sous ces conditions, on dit que X *est obtenue en identifiant les points* $\widetilde{x}_i$ *de* $\widetilde{X}$*.*

Preuve Les conditions (i), (ii), (iii) se comportent bien par extension étale de k, on peut donc supposer que k est séparablement clos et que $X = \mathrm{Spec}(R)$ est affine et présente un seul point singulier x. Il est alors clair que (2) entraîne (1). Montrons que (1) implique (2). Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Si X est TAC, X est réduite et même géométriquement réduite. Soient $\pi : \widetilde{X} = \mathrm{Spec}(\widetilde{R}) \to X$ le morphisme de normalisation de X, $Y = \mathrm{Spec}(A)$ la normalisée de $X \times_k \overline{k} = \mathrm{Spec}(R \otimes_k \overline{k})$. La flèche $Y \to X \times_k \overline{k}$ se factorise en $Y \to \widetilde{X} \times_k \overline{k} \to X \times_k \overline{k}$. J'affirme que la première flèche $\alpha : Y \to \widetilde{X} \times_k \overline{k}$ est un homéomorphisme. Il suffit de traiter le cas où k est de caractéristique $p > 0$. Comme chaque composante irréductible de X est géométriquement intègre, si l'on note K l'anneau de fractions de R, $K \otimes_k \overline{k}$ est l'anneau de fractions de $R \otimes_k \overline{k}$. Soit maintenant b un élément de A, il existe donc un polynôme $f(T) = T^n + \tilde{a}_{n-1}T^{n-1} + \cdots + \tilde{a}_1 T + \tilde{a}_0 \in (R \otimes_k \overline{k})[T]$ tel que $f(b) = 0$. Or k est séparablement clos, il existe un entier positif N tel que $f(T)^{p^N} \in R[T]$ et $b^{p^N} \in K$ (ici, on identifie R (resp. K) à un sous-anneau de $R \otimes_k \overline{k}$ (resp. $K \otimes_k \overline{k}$)). Cela entraîne que $b^{p^N} \in \widetilde{R} \subset \widetilde{R} \otimes_k \overline{k}$. En particulier, on en déduit que $\alpha : Y \to \widetilde{X} \times_k \overline{k}$ est un homéomorphisme. La condition TAC entraîne que $Y \simeq \widetilde{X} \times_k \overline{k}$, d'où (i). Pour prouver (ii), soit $Q = \widetilde{R}/R$ le quotient du $k-$espace vectoriel $\widetilde{R}$ par le sous-espace R. Comme $Y \to \widetilde{X} \times_k \overline{k}$ est un homéomorphisme, le nombre de branches de $X \times_k \overline{k}$ au point au-dessus de x est aussi le nombre des $\widetilde{x}_i$. Compte tenu de (i), le normalisé de $R \otimes_k \overline{k}$ est $\widetilde{R} \otimes_k \overline{k}$. On en déduit que $\dim_{\overline{k}}((\widetilde{R} \otimes_k \overline{k})/(R \otimes_k \overline{k})) = n - 1$. Il s'ensuit que $\dim_k(\widetilde{R}/R) = n - 1$. Or on a un morphisme surjectif $\widetilde{R}/R \to (\oplus_{i=1}^n k(\widetilde{x}_i))/k(x)$, par suite on obtient que

$$n - 1 = \dim_k(\widetilde{R}/R) \geq \dim_k(k(x)) \times \left(-1 + \sum_i^n \dim_{k(x)}(k(\widetilde{x}_i))\right) \geq n - 1,$$

donc $k(x) \simeq k(\widetilde{x}_i) \simeq k$, d'où (ii). Pour (iii), soit $\tilde{a} \in \widetilde{A}$ qui s'annule en tous les x_i, quitte à remplacer X par un voisinage ouvert de x, on peut supposer que $\tilde{a} \in \widetilde{R}$. Le fait que X est une courbe TAC implique que $\tilde{a} \in R \otimes_k \overline{k} \subset \widetilde{R} \otimes_k \overline{k}$. Par descente, il s'ensuit que $\tilde{a} \in R$, d'où (iii).

1.3 Courbe TAC et contraction sur un corps

Soient X une courbe propre connexe sur un corps k ayant au moins 2 composantes irréductibles, E une composante irréductible de X. Soit $D > 0$ un diviseur de Cartier effectif de X qui rencontre chaque composante irréductible autre que E. Le morphisme naturel $\phi : X \to Y = \mathrm{Proj}(S)$ (où $S = \oplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(nD))$, cf. proposition 2 de [8]) possède les propriétés suivantes : (i) ϕ est un morphisme propre et $\phi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$, (ii) E est contractée par ϕ en un point $y \in Y$, et (iii) ϕ induit un isomorphisme $X - E \simeq Y - \{y\}$.

Proposition 1.6 *Gardons les notations ci-dessus, et supposons de plus que X est une courbe TAC, alors Y est aussi une courbe TAC.*

Preuve Comme la formation de $\phi : X \to \mathrm{Proj}\left(\oplus_{n=0}^{\infty}\Gamma(X, \mathcal{O}_X(nD))\right)$ commute aux changements de base plats, on peut supposer k algébriquement clos. Il suffit de montrer que $y \in Y$ est un point du type axes de coordonnées. Si Y n'est pas lisse en y, soit V un ouvert de Y tel que y soit le seul point singulier de Y dans V, $U = \phi^{-1}(U)$. Alors la restriction de ϕ à $U : \phi_U : U \to V$ est propre, et on a encore $(\phi_U)_*(\mathcal{O}_U) = \mathcal{O}_V$. D'après EGA II 8.11.1 [5], on sait que pour tout k-schéma W, $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ s'identifie au sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_k(U, W)$ formé des morphismes $f : U \to W$ tels que f soit constant sur $\phi_U^{-1}(y)$ comme application d'ensembles. Donc $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ s'identifie au sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_k(U \cap X', W)$ formé des morphismes $f : U \cap X' \to W$ tels que f soit constant sur $E \cap X'$ comme application d'ensembles (ici, on note X' la réunion des composantes irréductibles de X autres que E), d'où le résultat grâce au fait que X est une courbe TAC.

En d'autres termes, soient $\widetilde{X}$ la normalisée de X, $\widetilde{x_i}$ les points de $\widetilde{X}$ au-dessus des points de E, alors la singularité y de Y qui apparaît par contraction de E, est obtenue en identifiant les points $\widetilde{x_i}$.

Corollaire 1.7 *Soient X une courbe propre TAC sur un corps k quelconque, $f : X \to Y$ un morphisme propre de $k-$schémas, et $f : X \to Z \to Y$ la factorisation de Stein. Alors une composante connexe de Z est, ou bien un point, ou bien une courbe TAC.*

Preuve Comme la factorisation de Stein est compatible avec le changement de base plat, on peut supposer k algébriquement clos. En outre, quitte à remplacer X par une composante connexe de X, on peut supposer que X est connexe. Si X est contractée en un point par $X \to Y$, le corollaire est trivial. On peut donc supposer que X n'est pas contractée en un point par f. S'il existe des composantes irréductibles de X qui sont contractées, $X \to Z$ se factorise à travers la courbe TAC déduite de X par contraction (proposition 1.6). On peut donc supposer $X \to Y$ fini, et alors $Z = X$, d'où le résultat.

1.4 Courbe TAC et contraction sur un trait

Rappelons qu'un trait désigne un schéma $S = \mathrm{Spec}(R)$ avec R un anneau de valuation discrète. On note s le point fermé de S, et $\eta \in S$ le point générique de S.

Soit $f : \mathcal{X} \to S$ une courbe propre plate normale sur un trait hensélien S à fibres géométriquement connexes. Supposons que $\mathcal{X}_s$ a au moins deux composantes irréductibles. Soit P une composante irréductible de $\mathcal{X}_s$. Comme S est hensélien, on peut trouver un diviseur de Cartier relatif effectif $D > 0$ qui rencontre les composantes irréductibles de $\mathcal{X}_s$ autres que P (pp. 169, 6.7/4 de [2]). D'où un S-morphisme propre canonique

$$\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} := \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{m=0}^{\infty} \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(mD)) \right).$$

On voit que (i) $\mathcal{Y}$ est une courbe propre plate normale sur S ; (ii) l'image $\phi(P)$ est un point $y \in \mathcal{Y}$, et (iii) ϕ définit un isomorphisme $\mathcal{X} - P \simeq \mathcal{Y} - \{y\}$. De plus, ϕ est le seul morphisme ayant les propriétés ci-dessus (pp. 167, 6.7/1 de [2]).

Le passage de $\mathcal{X}$ à $\mathcal{Y}$ peut introduire de méchantes singularités sur la fibre spéciale. L'énoncé ci-après fournit un cas où, partant d'une fibre $\mathcal{X}_s$ TAC, la fibre $\mathcal{Y}_s$ est encore TAC.

Proposition 1.8 *Gardons les notations ci-dessus et supposons de plus S strictement hensélien. Soit $f : \mathcal{X} \to S$ une courbe propre plate TAC à fibres géométriquement connexes telle que $\mathcal{X}_\eta$ soit une courbe lisse sur $k(\eta)$. Supposons que $\mathcal{X}_s$ a au moins deux composantes irréductibles. Soit P une composante irréductible de $\mathcal{X}_s$ telle que $P \simeq \mathrm{P}^1_{k(s)}$. Soit C la réunion des composantes irréductibles de $\mathcal{X}_s$ autres que P. On suppose que toute composante connexe de C rencontre P en un seul point* (*rationnel sur $k(s)$ d'après 1.5*). *Alors la S-courbe $\mathcal{Y}$ obtenue par contraction de P est encore une courbe TAC.*

Preuve Procédons comme plus haut avec un diviseur de Cartier relatif effectif $D > 0$ de $\mathcal{X}$. En vertu de la proposition 1.6, il suffit de montrer que quitte à remplacer $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D)$ par une puissance convenable, le morphisme de changement de base

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \otimes_R k(s) \to \Gamma(\mathcal{X}_s, \mathcal{L}_s^{\otimes n})$$

est un isomorphisme pour tout $n \geq 0$.

Supposons d'abord $n > 0$. Soit ϖ une uniformisante de R, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\varpi} \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s} \longrightarrow 0,$$

d'où une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}^{\otimes n} \xrightarrow{\varpi} \mathcal{L}^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{L}_s^{\otimes n} \longrightarrow 0.$$

Il s'ensuit que l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \otimes_R k \longrightarrow H^0(\mathcal{X}_s, \mathcal{L}_s^{\otimes n}) \longrightarrow H^1(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \xrightarrow{\varpi} H^1(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n}).$$

Il suffit donc de montrer que $H^1(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0$. Or comme $H^1(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$ est un R-module de type fini et que la formation de $R^1 f_* \mathcal{L}^{\otimes n}$ commute aux changements de base, il suffit de montrer $H^1(\mathcal{X}_s, \mathcal{L}_s^{\otimes n}) = 0$. Soient $\tilde{C} = P \sqcup C$, et

$\pi : \tilde{C} \to \mathcal{X}_s$ le morphisme naturel. Quitte à remplacer $\mathcal{L}$ par une puissance convenable, on peut supposer que $\mathcal{L}_s$ est très ample sur toutes les composantes irréductibles de $\mathcal{X}_s$ autres que P et que $H^1(C, \mathcal{L}_s^{\otimes n}) = 0$ pour $n > 0$. Compte tenu du fait que P est la droite projective et que $\mathcal{L}_s$ est trivial sur P, $H^1(\tilde{C}, \pi^*(\mathcal{L}_s^{\otimes n})) = 0$ pour $n \geq 1$. On a de plus une suite exacte:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s} \to \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} \to Q \to 0,$$

où Q est un faiseau concentré en les points singuliers de $\mathcal{X}_s$ dans P. D'où une suite exacte

$$0 \to \mathcal{L}_s^{\otimes n} \to \pi_*(\pi^*\mathcal{L}_s^{\otimes n}) \to Q \to 0$$

Comme $\mathcal{L}_s$ est le faiseau associé à un diviseur effectif à support en dehors des points singuliers de $\mathcal{X}_s$, on a une inclusion naturelle $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_s} \subset \mathcal{L}_s^{\otimes n}$, d'où un diagramme commutatif à lignes exactes ($n \geq 1$)

$$\begin{tikzcd}
H^0(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & H^0(\mathcal{X}_s, Q) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & H^1(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{X_s}) \arrow[d] & \\
H^0(\tilde{C}, \pi^*(\mathcal{L}_s^{\otimes n})) \arrow[r] & H^0(\mathcal{X}_s, Q) \arrow[r] & H^1(\mathcal{X}_s, \mathcal{L}_s^{\otimes n}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

Donc pour montrer que $H^1(\mathcal{X}_s, \mathcal{L}_s^{\otimes n}) = 0$ pour tout $n \geq 1$, il suffit de remarquer que α est surjectif. En effet, soit d le nombre de composantes connexes de C, comme $\tilde{C}$ est réduite, on a $H^0(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}) \simeq k(s)^{d+1}$. Comme $\mathcal{X}_s$ est une courbe TAC et chaque composante connexe de C rencontre P en un seul point qui est rationnel sur $k(s)$ (cf. 1.5), on en déduit que $H^0(\mathcal{X}_s, Q) \simeq k(s)^d$. D'où une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}) \longrightarrow H^0(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}) \xrightarrow{\alpha} H^0(\mathcal{X}_s, Q) \longrightarrow 0\,.$$

Ainsi $\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) \otimes_R k(s) \simeq \Gamma(X_s, \mathcal{L}_s^{\otimes n})$ pour $n \geq 1$.

Il reste à traiter le cas où $n = 0$. Puisque X/R est plate, propre, à fibres géométriques connexes et réduites, $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$ et la formation de $f_*\mathcal{O}_X$ commute aux changements de base quelconques, d'où le résultat.

1.5 Courbe TAC sur un trait et modèle de Néron

Dans ce numéro, $S = \mathrm{Spec}(R) = \{\eta, s\}$ désigne un trait strictement hensélien. Soit $f : \mathcal{X} \to S$ une courbe plate propre à fibres géométriquement connexes et géométriquement réduites telle que sa fibre générique soit lisse.

Lemme 1.9 *Le foncteur de Picard* $\underline{\mathrm{Pic}}_{\mathcal{X}/S}$ *de* $\mathcal{X}/S$ *est représentable par un schéma en groupe* $\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}$ *lisse sur* S (*non nécessairement séparé*).

Preuve D'après 9.4/2 (pp. 259) de [2] et proposition 4.16 de [7], le sous-foncteur ouvert $\underline{\mathrm{Pic}}^{\circ}_{\mathcal{X}/S}$ de $\underline{\mathrm{Pic}}_{\mathcal{X}/S}$ est représenté par un schéma en groupe $\mathrm{Pic}^{\circ}_{\mathcal{X}/S}$ séparé lisse sur S. Soient X_i ($1 \leq i \leq n$) les composantes irréductibles de $\mathcal{X}_s$, $\gamma = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbf{Z}^n$. Soit $\underline{\mathrm{Pic}}^{\gamma}_{\mathcal{X}/S}$ le sous-foncteur ouvert de $\underline{\mathrm{Pic}}_{\mathcal{X}/S}$ formé des faiseaux inversibles dont la fibre spéciale a d_i pour degré partiel sur X_i ($1 \leq i \leq n$). Alors $\underline{\mathrm{Pic}}^{\gamma}_{\mathcal{X}/S}$ est un torseur sous $\underline{\mathrm{Pic}}^{\circ}_{\mathcal{X}/S}$. Comme S est strictement hensélien, $\underline{\mathrm{Pic}}^{\gamma}_{\mathcal{X}/S}(S) \neq \emptyset$, d'où la représentabilité de $\underline{\mathrm{Pic}}^{\gamma}_{\mathcal{X}/S}$. Il s'ensuit que $\underline{\mathrm{Pic}}_{\mathcal{X}/S}$ est représentable par un S-schéma lisse sur S (car $\underline{\mathrm{Pic}}_{\mathcal{X}/S} = \bigcup_{\gamma \in \mathbf{Z}^n} \underline{\mathrm{Pic}}^{\gamma}_{\mathcal{X}/S}$).

Supposons maintenant, en outre, que $\mathcal{X}/S$ est une courbe TAC. On note $\mathcal{U}$ l'ouvert de lissité de $\mathcal{X}$. D'après le lemme 1.9, le foncteur de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}_{\mathcal{X}/S}$ est représentable par un schéma en groupe $\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}$ lisse sur S. Sa composante neutre $J = \mathrm{Pic}^{\circ}_{\mathcal{X}/S}$ est représentée par un schéma semi-abélien (pp. 182, 7.4/3 de [2]), et J_η est la jacobienne de $\mathcal{X}_\eta$. Soit $\mathcal{P}$ l'adhérence schématique de J_η dans $\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}$. Alors $\mathcal{P}$ représente le foncteur de Picard des faiseaux inversibles de degré total 0 sur $\mathcal{X}/S$. Soient $\mathcal{N}$ le modèle de Néron de J_η sur S, $h : \mathcal{P} \to \mathcal{N}$ le morphisme canonique. Son noyau est l'adhérence schématique de la section unité dans $\mathcal{P}$. En particulier, h induit un isomorphisme sur les composantes neutres $J = \mathcal{P}^{\circ} \simeq \mathcal{N}^0$.

Soit ε une section de $\mathcal{U}$ sur S, d'où une application d'Albanese $a_\eta : \mathcal{X}_\eta \to J_\eta$ qui envoie $\varepsilon(\eta)$ sur $0 \in J_\eta$. D'après la propriété des modèles de Néron, a_η s'étend uniquement en un S-morphisme $a : \mathcal{U} \to \mathcal{N}$. On peut décrire a de la façon suivante : tout point de $\mathcal{U}$ à valeur dans un schéma T définit un diviseur effectif D de $\mathcal{X} \times_S T$, d'où un S-morphisme $\mathcal{U} \to \mathcal{P}$ donné par $D \mapsto$ classe de $\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times_S T}(D - \varepsilon \times_S T)$. Si l'on compose avec h, on obtient le morphisme $a : \mathcal{U} \to \mathcal{N}$. On voit que changer de section ε revient à changer a par une translation dans $\mathcal{N}$.

Proposition 1.10 *Notations comme plus haut. Supposons en outre que $\mathcal{X}/S$ est une courbe à fibre spéciale TAC, et que $\mathcal{X}_s$ a au moins deux composantes irréductibles. Supposons que $\varepsilon(s) \in \mathcal{U}$. Soient E une composante irréductible de $\mathcal{X}_s$, C la réunion des composantes irréductibles de $\mathcal{X}_s$ autres que E, $E' = E \cap \mathcal{U}$.*

(i) *Pour que $a|_{E'}$ contracte E' en un point de $\mathcal{N}$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées*:

1. *$E \simeq \mathbf{P}^1_{k(s)}$ est la droite projective sur $k(s)$*;
2. *Chaque composante connexe de C rencontre E en un seul point.*

(ii) *Si a ne contracte pas E, la restriction de a à E' est une immersion dans $\mathcal{N}_s$.*

Preuve Remarquons d'abord que, quitte à changer ε, on peut supposer que $\varepsilon(s) \in E'$. Pour montrer la proposition, on distingue trois cas:

(1) Le genre arithmétique de E est ≥ 1 (c'est-à-dire $\dim_{k(s)} H^1(E, \mathcal{O}_E) \geq 1$). À l'inclusion $E \hookrightarrow \mathcal{X}_s$ correspond morphisme $\alpha : \mathcal{N}^{\circ}_s = \mathrm{Pic}^{\circ}_{\mathcal{X}_s/k(s)} \to \mathrm{Pic}^{\circ}_{E/k(s)}$ et $\alpha \circ a|_{E'}$ est l'application $x \in E' \mapsto \mathcal{O}_E(x - \varepsilon(s))$. Il suffit donc d'appliquer le lemme 1.11 ci-dessous qui résulte du théorème 8.8 de [1].

Lemme 1.11 *Soient k un corps, E une courbe propre géométriquement intègre de genre arithmétique* ≥ 1. *Soient E' l'ouvert de lissité de E, o un point de $E'(k)$. Alors l'application $x \in E' \mapsto \mathcal{O}_E(x-o)$ induit une immersion de E' dans* $\mathrm{Pic}^\circ_{E/k}$.

On suppose désormais que E est de genre arithmétique 0, donc isomorphe à la droite projective $\mathbf{P}^1_{k(s)}$.

(2) Supposons d'abord qu'il y a une composante connexe D de C rencontrant E en 2 points au moins. Notons $Y = E \cup D$ et $\tilde{Y} = E \sqcup D$. On obtient un morphisme a'_s en composant la restriction de a_s à E' avec le morphisme naturel $\mathrm{Pic}^\circ_{\mathcal{X}_s/k(s)} \to \mathrm{Pic}^\circ_{Y/k(s)}$, il s'agit de montrer que a'_s est une immersion. Soient x_i $(1 \leq i \leq n)$ les points singuliers de Y appartenant à $E, \pi : \tilde{Y} \to Y$ le morphisme naturel. On a une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}^*_Y \to \pi_*(\mathcal{O}^*_{\tilde{Y}}) \to Q \to 0,$$

où Q est un faiseau sur Y concentré en les x_i. Si l'on note f'_s le morphisme structural de $Y/k(s)$, on obtient une suite exacte de cohomologie :

$$0 \to (f'_s)_*(\mathcal{O}^*_Y) \to (f'_s\pi)_*(\mathcal{O}^*_{\tilde{Y}}) \to (f'_s)_*(Q) \to \mathrm{Pic}^\circ_{Y/k(s)} \to \mathrm{Pic}^\circ_{\tilde{Y}/k(s)} = \mathrm{Pic}^\circ_{D/k(s)}.$$

Soient y_i (resp z_i) $(1 \leq i \leq n)$ les points de E (resp. de D) au-dessus de $x_i \in Y$, on a alors $f'_{s*}(Q) \simeq \oplus_{i=1}^n ((k(y_i)^* \oplus (k(z_i))^*)/k(x_i)^*)$ où $(k(y_i)^* \oplus (k(z_i))^*)/k(x_i)^*$ est le conoyau du morphisme de groupes $k(x_i)^* \to k(y_i)^* \oplus k(z_i)^*$ donné par $a \mapsto (a, a)$. On sait que a'_s se factorise par $K = \mathrm{Ker}(\mathrm{Pic}^\circ_{Y/k(s)} \to \mathrm{Pic}^\circ_{\tilde{Y}/k(s)}) \hookrightarrow \mathrm{Pic}^\circ_{Y/k(s)}$. D'après la suite exacte ci-dessus, on a $K \simeq \oplus_{i=2}^n ((k(y_i)^* \oplus k(z_i)^*)/k(x_i)^*) \simeq (k(s)^*)^{n-1}$. Comme E est la droite projective, le diviseur $x - \varepsilon(s)$ est principal, et il existe donc une fonction méromorphe à variable $T : h(T) = \lambda(T-x)/(T-\varepsilon(s))$ avec $\lambda \in k(s)$ telle que $h(y_1) = 1$ et que le diviseur associé soit $x - \varepsilon(s)$. On peut donc exprimer le morphisme a'_s explictement de la façon suivante : on suppose que $E(\simeq \mathbf{P}^1_{k(s)}) = \mathbf{A}^1_{k(s)} \cup \{y_1\}$, alors a'_s est donné par $x \in E' = \mathbf{A}^1_{k(s)} - \{y_i \mid 1 \leq i \leq n\} \mapsto \left(\frac{(y_i-x)(y_1-\varepsilon(s))}{(y_i-\varepsilon(s))(y_1-x)}\right)_{i=2}^n \in (k(s)^*)^{n-1} \simeq K$. D'où le résultat.

(3) Il reste à traiter le cas où chaque composante connexe de C rencontre E en un seul point. Dans ce cas-là, on a encore que la restriction de a_s à E' se factorise par $\mathrm{Pic}^\circ_{\mathcal{X}_s/k(s)} = \mathcal{N}^\circ_s \subset \mathcal{N}_s$, et elle est donnée par $x \mapsto$ classe de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}(x - \varepsilon(s))$. Il suffit de montrer que pour tout $x \in E'$, on a $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}(x - \varepsilon(s)) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}$. On peut supposer que $x \neq \varepsilon(s)$. Comme E est la droite projective, il existe une fonction méromorphe h de E dont diviseur est $x - \varepsilon(s)$. Comme chaque composante connexe de C rencontre E en un seul point, h s'étend sans difficulté en une function méromorphe de $\mathcal{X}_s$ ayant $x - \varepsilon(s)$ comme diviseur. En particulier, $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}(x - \varepsilon(s))$ est trivial.

Cela finit la démonstration.

Corollaire 1.12 *Gardons les notations ci-dessus. Supposons que $\mathcal{X}/S$ est une courbe TAC de genre arithmétique* ≥ 1.

(1) *L'application* $a : \mathcal{U} \to \mathcal{N}$ *ne contracte pas toutes les composantes irréductibles de* $\mathcal{U}_s$;

(2) *Si* $\mathcal{X}_{\min}$ *désigne la courbe sur* R *déduite de* $\mathcal{X}$ *en contractant les composantes qui sont contractées par* $a : \mathcal{U} \to \mathcal{N}$*, alors* $\mathcal{X}_{\min}$ *est une courbe TAC. Et si* $\mathcal{V}$ *désigne l'ouvert de lissité de* $\mathcal{X}_{\min}$*, et* $a_{\min} : \mathcal{V} \to \mathcal{N}$ *le morphisme naturel, alors pour toute composante irréductible* Y_j *de* $\mathcal{X}_{\min,s}$*, la restriction de* $a_{\min}$ *à* $Y_j \cap \mathcal{V}$ *est une immersion.*

Preuve Supposons que a contracte toutes les composantes irréductibles de $\mathcal{U}_s$. Alors, d'après proposition 1.10, $\mathcal{X}_s$ n'est pas irréductible et chaque composante irréductible de $\mathcal{X}_s$ est isomorphe à la droite projective sur $k(s)$. Contractons les composantes irréductibles une par une, ce qui, d'après 1.10 et 1.8, conserve le caractère TAC et le genre arithmétique (égal au genre arithmétique de la fibre générique). Quand on arrive à une courbe propre TAC $\mathcal{X}'/S$ de genre arithmétique $g \geq 1$ obtenue par contraction telle que sa fibre spéciale soit la droite projective, on obtient une contradiction. D'où (1). Pour (2), il suffit d'appliquer 1.10, 1.8 et (1) ci-dessus.

Remarque 1.13 Même si l'on part avec une courbe semi-stable $\mathcal{X}/R$, $\mathcal{X}_{\min,s}$ sera seulement à singularités TAC.

2 Applications

Dans cette section, pour un schéma X sur un corps de caractéristique $p > 0$ et $N \in \mathbf{N}$ un entier positif, on note $F_X : X \to X$ le Frobenius absolu de X, $X^{(N)}$ le produit fibré de X avec F_k^N sur k, $F_X^{(N)} : X \to X^{(N)}$ le Frobenius relatif (itéré). Lorque k est parfait, on note $X^{(-N)}$ le produit fibré de X avec le $(F_k^{-1})^N$. Si $\mathcal{G}$ est un schéma en groupe commutatif sur un schéma S, pour un entier $n \in \mathbf{Z}$, on note $[n] : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ le morphisme de multiplication par n dans $\mathcal{G}$.

2.1 Application à la factorisation par Frobenius

On se place d'abord sur un trait hensélien $S = \{\eta, s\}$ d'inégale caractéristique de corps de fractions K, et de corps résiduel k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$.

Soit $\mathcal{X} \to S$ une courbe (relative) propre TAC de genre arithmétique ≥ 1 à fibres géométriquement connexes telle que sa fibre générique soit lisse. Soient $\mathcal{U}$ l'ouvert de lissité de $\mathcal{X}/S$, $\mathcal{N}$ le modèle de Néron de la jacobienne J_η de la fibre générique de $\mathcal{X}/S$. Soient $\varepsilon : S \to \mathcal{U}$ une section de $\mathcal{U}$, $a : \mathcal{U} \to \mathcal{N}$ le morphisme naturel déduit de ε.

Théoréme 2.1 *On suppose que a ne contracte aucune composante de* $\mathcal{U}_s$*. Soit N un entier positif. Considérons le carré cartésien suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y}_\eta \arrow[r] \arrow[d, "f_\eta"'] & J_\eta \arrow[d, "{[p^N]}"] \\ \mathcal{X}_\eta \arrow[r, "a_\eta"] & J_\eta \end{tikzcd} .$$

Alors il existe une extension finie de trait $S' = \{\eta', s'\} \to S$ telle que:

(1) $f_{\eta'}$ *se prolonge en un S'-morphisme $f : \mathcal{Y}' \to \mathcal{X} \times_S S'$ avec $\mathcal{Y}'$ une courbe semi-stable sur S'*

(2) $f_{s'}$ *se factorise à travers $F = F^{(N)} : \mathcal{X}_s^{(-N)} \to \mathcal{X}_s$.*

Preuve On remarque d'abord que le morphisme naturel $[p^N] : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ n'est pas nécessairement fini ni surjectif en général (par contre, il est quasi-fini et plat comme $\mathcal{N}$ est semi-abélien, cf. [2] 7.3/2, pp.179), donc $a(\mathcal{U})$ n'est pas forcément contenu dans le sous-schéma en groupes ouvert image du morphisme $[p^N] : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$. Soit $S_1 = \{\eta_1, s_1\}$ un trait fini sur S, et notons $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X} \times_S S_1$, $\mathcal{N}_1$ le S_1-modèle de Néron de la jacobienne de $\mathcal{X}_{\eta_1}$. D'après la propriété de Néron, on a un morphisme naturel $\mathcal{N} \times_S S_1 \to \mathcal{N}_1$ qui est une immersion ouverte (car $\mathcal{N}^\circ$ est semi-abélien). J'affirme qu'il existe un trait S_1 fini (éventuellement ramifiée) sur S et un sous-schéma en groupe ouvert $\mathcal{N}_2$ de $\mathcal{N}_1$ tels que $[p^N] : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_1$ induise un morphisme fini surjectif $\mathcal{N}_2 \to \mathcal{N} \times_S S_1 \subset \mathcal{N}_1$. En effet, comme $\mathcal{N}$ est lisse sur S, d'après le lemme d'Hensel, le morphisme naturel $\phi : J_\eta(K) \to \pi_0(\mathcal{N}_s)(k)$ est surjectif. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in J_\eta(K)$ tels que $\phi(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}) = \pi_0(\mathcal{N}_s)(k)$ ($\pi_0(\mathcal{N}_s)(k)$ est fini). Puisque J_η est une variété abélienne, elle est p^N-divisible, donc il existe une extension finie K_1 de K telle que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ soient p^N-divisibles dans $J_\eta(K_1)$. Et, quitte à agrandir K_1 (en ajoutant un nombre fini d'éléments qui sont algébriques sur K_1), on peut supposer en outre que les p^N-points de torsion de J_η sont rationnels sur K_1. Soit maintenant S_1 le trait fermeture intégrale de S dans K_1, à partir du diagramme commutatif ci-dessous avec les morphismes verticaux surjectifs

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N}_1(K_1) \arrow[r, "{[p^N]}"] \arrow[d] & \mathcal{N}_1(K_1) \arrow[d] \\ \pi_0(\mathcal{N}_{1,s_1})(k) \arrow[r, "{[p^N]}"] & \pi_0(\mathcal{N}_{1,s_1})(k) \end{tikzcd} ,$$

et le fait que $\pi_0(\mathcal{N}_s)(k)$ est contenu dans l'image $[p^N] : \pi_0(\mathcal{N}_{1,s_1})(k) \to \pi_0(\mathcal{N}_{1,s_1})$ (k), on obtient que le sous-schéma ouvert $\mathcal{N} \times_S S_1$ de $\mathcal{N}_1$ est contenu dans l'image du morphisme $[p^N] : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_1$. Posons $\mathcal{N}_2 = [p^N]^{-1}(\mathcal{N} \times_S S_1)$, et montrons que le morphisme $[p^N] : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_1$ induit un morphisme fini surjectif $\widetilde{[p^N]} : \mathcal{N}_2 \to \mathcal{N} \times_S S_1$. Il suffit de vérifier que cette flèche $\widetilde{[p^N]} : \mathcal{N}_2 \to \mathcal{N} \times_S S_1$ est finie. D'après la descente fidèle plate quasi-compacte et le fait que la flèche $\widetilde{[p^N]} : \mathcal{N}_2 \to \mathcal{N} \times_S S_1$ est fidèlement plate quasi-compacte, on voit qu'il suffit de montrer que le noyau $\mathcal{K} = \ker(\widetilde{[p^N]} : \mathcal{N}_2 \to \mathcal{N} \times_S S_1)$ est fini. $\mathcal{K}$ est quasi-fini et plat sur S_1, a ses points rationnels sur K_1 qui se prolongent en des points entiers sur S_1, est donc fini sur S_1. Alors $\widetilde{[p^N]}$ est fini et identifie $\mathcal{N} \times_S S_1$ au quotient fppf de $\mathcal{N}_2$ par $\mathcal{K}$.

On note $\mathcal{V}_2$ le produit fibré de $a : \mathcal{U} \times_S S_1 \to \mathcal{N} \times_S S_1$ et $\widetilde{[p^N]} : \mathcal{N}_2 \to \mathcal{N} \times_S S_1$, et d'après ce que l'on a montré, le morphisme $\widetilde{[p^N]} : \mathcal{N}_2 \to \mathcal{N} \times_S S_1$ est fini surjectif. On en déduit que le morphisme $\mathcal{V}_2 \to \mathcal{U} \times_S S_1$ est fini surjectif. Puisque $[p^N]_{\mathcal{N}_{1,s}}$ se factorise en $F \circ V$ où $V : \mathcal{N}_{1,s} \to \mathcal{N}_{1,s}^{(-N)}$ est la puissance N-ième du Verschiebung (cf. [6], Exposé VII$_\mathrm{A}$ 4.3.2), on obtient que $\widetilde{[p^N]}$ se factorise à travers $F : \mathcal{N}_s^{(-N)} \to \mathcal{N}_s$. D'où un diagramme commutatif (où $\mathcal{V}_{1,s}$ désigne le produit fibré de F et a) :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{U}_s^{(-N)} \arrow[d] \arrow[dr, "F"] & \\
\mathcal{V}_{2,s} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{V}_{1,s} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{U}_s \arrow[d, "a"] \\
\mathcal{N}_{2,s} \arrow[r] & \mathcal{N}_s^{(-N)} \arrow[r, "F"] & \mathcal{N}_s
\end{tikzcd}\quad .$$

Comme la restriction de a à chaque composante connexe est une immersion et que $\mathcal{U}_s$ est réduit, il résulte du lemme immédiat ci-après que $\mathcal{U}_s^{(-N)} = (\mathcal{V}_{1,s})_{\mathrm{red}}$.

Lemme 2.2 (lemme 19 de [4]) *Soient T et S deux schémas sur un corps k parfait. Soient N un entier positif, $F : T^{(-N)} \to T$ le $N-$ième itéré du Frobenius relatif. Soit $\tau : S \to T$ une immersion de T. Considérons le diagramme commutatif à carré cartésien ci-dessous*:

$$\begin{tikzcd}
S^{(-N)} \arrow[dr] \arrow[drr, "F"] \arrow[ddr, "\tau^{(-N)}"'] & & \\
 & S' \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d, "\tau"] \\
 & T^{(-N)} \arrow[r, "F"] & T
\end{tikzcd}\quad ,$$

et supposons en outre que S est réduit. Alors on a $S^{(-N)} = S'_{\mathrm{red}}$

Ceci étant, notons $\mathcal{Y}_2$ la fermeture intégrale de $\mathcal{X} \times_S S_1$ dans $\mathcal{V}_2$, on a donc un morphisme fini $\mathcal{Y}_2 \to \mathcal{X} \times_S S_1$ (comme $\mathcal{V}_2 \to \mathcal{U} \times_S S_1$ est fini) et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{U} \times_S S_1 \arrow[d] \\ \mathcal{Y}_2 \arrow[r] & \mathcal{X} \times_S S_1 \end{tikzcd} .$$

$\mathcal{Y}_2$ est une courbe propre sur S_1, mais $\mathcal{Y}_2$ peut avoir une fibre spéciale "méchante" (en particulier, non réduite). D'après le théorème de réduction semi-stable pour les courbes (corollaire 2.7 de [3]), il existe une extension finie de trait $S' \to S_1$, telle que l'on puisse dominer $\mathcal{Y}_2 \times_{S_1} S'$ par un S'-morphisme propre $f : \mathcal{Y}' \to \mathcal{Y}_2 \times_{S_1} S'$ avec $\mathcal{Y}'/S'$ une courbe semi-stable, qui prolonge $\mathcal{Y}_{\eta'}$. Il reste à prouver que $f_{s'}$ se factorise à travers $F : \mathcal{X}_s^{(-N)} \to \mathcal{X}_s$. Formons maintenant les carrés cartésiens suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{V}_2 \times_{S_1} S' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{U} \times_S S' \arrow[d] \\ \mathcal{Y}' \arrow[r] & \mathcal{Y}_2 \times_{S_1} S' \arrow[r] & \mathcal{X} \times_S S' \end{tikzcd} .$$

Comme $\mathcal{V}'$ a une fibre spéciale réduite, $\mathcal{V}'_s \to \mathcal{U}_s$ se factorise à travers $F : \mathcal{U}_s^{(-N)} \to \mathcal{U}_s$. Soit $\mathcal{Y}'_s \to Z \to \mathcal{X}_s$ la factorisation de Stein de $\mathcal{Y}'_s \to \mathcal{X}_s$, il s'agit de montrer que le morphisme $Z \to \mathcal{X}_s$ se factorise à travers $F : \mathcal{X}_s^{(-N)} \to \mathcal{X}_s$. D'après le corollaire 1.7, une composante connexe de Z est ou bien une courbe TAC, ou bien un point. De plus, comme $Z \to \mathcal{X}_s$ est fini, dans chaque composante conexe de Z qui est une courbe TAC, il existe un ouvert dense sur lequel le morphisme $Z \to \mathcal{X}_s$ se factorise à travers $F : \mathcal{X}_s^{(-N)} \to \mathcal{X}_s$. La conclusion résulte donc du lemme 2.3 ci-dessous.

Cela finit la démonstration.

Lemme 2.3 *Soient Z une courbe TAC sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, N un entier positif. Soient X un k-schéma, $f : Z \to X$ un k-morphisme. Supposons qu'il existe un ouvert U dense de Z tel que $f|_U$ se factorise à travers $F = F^{(N)}_{X^{(-N)}} : X^{(-N)} \to X$. Alors f se factorise à travers F.*

Preuve Soit $\pi : \widetilde{Z} \to Z$ la normalisée de Z. Comme π est un morphisme fini, il existe un ouvert dense de $\widetilde{Z}$ sur lequel $f\pi$ est factorisé à travers $F : X^{(-N)} \to X$. D'après le critère valuatif, $f\pi$ se factorise également à travers F :

$$\begin{tikzcd} & & X^{(-N)} \arrow[d, "F"] \\ \widetilde{Z} \arrow[urr, "\beta"] \arrow[r, "\pi"] & Z \arrow[ur] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Puisque F est un homéomorphisme comme application continue, pour chaque point singulier $z \in Z$, tous les points de $\widetilde{Z}$ au-dessus de z sont envoyés en le même point dans $X^{(-N)}$ par β, donc par 1.3, β se factorise à travers π. Et comme π est schématiquement dominant, on a donc que $f : Z \to X$ se factorise à travers $F : X^{(-N)} \to X$. D'où le résultat.

2.2 Applications aux fibrés fortement semi-stables

Nous allons maintenant considérer des traits d'inégale caractéristique de corps résiduel $\overline{\mathbf{F}_p}$ et généraliser le théorème 20 de [4], prouvé dans le cas de bonne réduction, en l'étendant au cas de réduction semi-stable.

Rappelons qu'un fibré vectoriel E sur une courbe propre lisse X sur un corps k de caractéristique $p > 0$ est dit *fortement semi-stable de degré zéro* si $(F_X^n)^*(E)$ est un fibré vectoriel semi-stable de degré 0 pour tout entier $n \geq 0$, où $F_X : X \to X$ désigne le Frobenius sur X. Plus généralement, pour une courbe X propre sur un corps k algébriquement clos, un fibré vectoriel E sur X est dit *fortement semi-stable de degré* 0 si π^*E est fortement semi-stable de degré 0 sur chaque composante irréductible de $\tilde{X}$, où $\pi : \tilde{X} \to X$ est le normalisé de X_{red}.

Soit R un anneau de valuation discrète complet d'inégale caractéristique, de corps des fractions K et de corps résiduel $k = \overline{\mathbf{F}_p}$. Notons $\mathbf{C}_p = \widehat{\overline{K}}$ le completé d'une clôture algébrique de K et $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers. Soit $\mathcal{X}$ une R-courbe propre plate de genre $g \geq 1$, à fibre générique géométriquement connexe et lisse, à fibre spéciale connexe et réduite. Soient $\mathcal{U}$ l'ouvert de lissité de $\mathcal{X}/S$ et $\mathcal{N}$ le modèle de Néron de la jacobienne J_η de la fibre générique de $\mathcal{X}/S$. Soient $\varepsilon : S \to \mathcal{U}$ une section de $\mathcal{U}$, $a : \mathcal{U} \to \mathcal{N}$ le morphisme naturel déduit de ε.

Théoréme 2.4 *Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur $\mathcal{X} \times_R \mathcal{O}$ dont la fibre spéciale est fortement semi-stable de degré* 0*. Alors il existe un trait R' fini sur R, un morphisme propre surjectif $f' : \mathcal{Z}' \to \mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_R R'$ à fibre générique finie étale tel que la fibre spéciale $f_s'^*(\mathcal{E}_s)$ soit triviale.*

Preuve En vertu du théorème de réduction semi-stable pour les courbes (corollaire 2.7 de [3]), on peut supposer que $\mathcal{X}$ a une fibre spéciale semi-stable. Comme $\mathcal{E}_s$ est un fibré fortement semi-stable de degré 0, il existe un revêtement étale de $\mathcal{X}_s$ sur lequel $\mathcal{E}_s$ devient trivial par un itéré du Frobenius (cf. théorème 18 de [4]). En procédant comme dans la preuve du théorème 17 de [4], on peut donc supposer que E_s' est trivialisé par $F_{\mathcal{X}_s}^{(N)} : \mathcal{X}_s^{(-N)} \to \mathcal{X}_s$ pour un entier N positif. Soit $\mathcal{X}_{\min}$ la courbe obtenue en contractant les composantes irréductibles de $\mathcal{X}_s$ contractées par l'application d'Albanese a. D'après 2.1, il existe un trait S' fini sur S, et un S'-morphisme $\alpha : \mathcal{Y}' \to \mathcal{X}_{\min} \times_S S'$ avec $\mathcal{Y}'$ une courbe semi-stable sur S' tels que α_s se factorise à travers $F_{\mathcal{X}_{\min,s}}^{(N)} : \mathcal{X}_{\min,s}^{(-N)} \to \mathcal{X}_{\min,s}$. Soit $\mathcal{Z}'$ la S'-courbe définie par le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \times_S S' \arrow[r] & \mathcal{X}_{\min} \times_S S' \\ \mathcal{Z}' \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{Y}' \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd}.$$

Il suffit de montrer que l'image reciproque de $\mathcal{E}_s$ sur $\mathcal{Z}'_s$ est triviale. Or, on passe de $\mathcal{X}_s$ à $\mathcal{X}_{\min,s}$ par une suite de contractions de droites projectives, et un fibré semi-stable de degré 0 sur la droite projective $\mathbf{P}^1$ est trivial. D'après le lemme ci-après, $\mathcal{E}_s$ est l'image reciproque d'un fibré $\widetilde{\mathcal{E}_s}$ sur $\mathcal{X}_{\min,s}$, et celui-ci est encore trivialisé par $F^{(N)}_{\mathcal{X}_{\min,s}} : \mathcal{X}^{(-N)}_{\min,s} \to \mathcal{X}_{\min,s}$. Cela achève la démonstration.

Lemme 2.5 *Soient X une courbe propre réduite connexe sur un corps k, ayant au moins deux composantes irréductibles, Z l'une de ses composantes irréductibles. Soit $\pi : X \to Y$ un morphisme propre tel que* (1) *Z soit contractée par π en un point de $y \in Y$;* (2) *π induise un isomorphisme $X-Z \simeq Y-\{y\}$; et $\pi_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$. Soit E un fibré vectoriel sur X tel que $E|_Z$ soit un fibré trivial. Alors $\pi_*(E) = \widetilde{E}$ est un fibré vectoriel et $\pi^*\widetilde{E} = E$.*

Preuve Comme $\pi_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$, il suffit de montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de $y \in Y$ tel que $E|_{\pi^{-1}(V)}$ soit trivial. Comme π est propre, il suffit de montrer qu'il existe un voisinage U de Z dans X tel que $E|_U$ soit trivial. Soit $\{s_1, \ldots, s_r\}$ une base de $E|_Z$. Nous allons montrer que l'on peut l'étendre en une base de E dans un voisinage ouvert de Z dans X. Comme X est une courbe, et Z est une composante irréductible de X, l'intersection (comme ensemble) de Z avec les réunion des composantes irréductibles de X autres que Z est un ensemble fini de points $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de X. Soit A l'anneau semi-local de X localisé en les points $x_1, \ldots, x_n$. Comme E est un fibré de rang constant sur X, $E|_{\mathrm{Spec}(A)}$ est libre de rang fini. On peut donc relever les $s_1, \ldots, s_r$ en des sections de E sur $\mathrm{Spec}(A)$ qui forment une base de $E|_{\mathrm{Spec}(A)}$. On en déduit que la base $\{s_1, \ldots, s_r\}$ de $E|_Z$, peut être étendue en une base de E dans un voisinage ouvert de Z dans X. Cela finit la démonstration.

Corollaire 2.6 *Sous les hyphothèses de 2.4. Procédant comme le lemme 21 et le théorème 22 de [4], on peut associer à $\mathcal{E}$ une représentation continue de $\pi_1(\mathcal{X}_{\mathbf{C}_p})$ dans $\mathcal{O}^n$, où n est le rang de $\mathcal{E}$.*

Remarque 2.7 Le théorème 2.4 ci-dessus permet de simplifier la démonstration du théorème principal mentionné dans l'introduction de [4]. Soient X_K une courbe propre connexe lisse sur K de genre arithmétique $g \geq 1$, E_K un fibré vectoriel sur X_K. Rappelons d'abord que E_K est dit *a réduction fortement semi-stable de degré* 0 si E_K peut s'étendre en un fibré $\mathcal{E}$ sur un certain modèle (propre, plat) $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{O}$ de $X_K \times_K \mathbf{C}_p$ tel que la fibre spéciale de $\mathcal{E}$ soit fortement semi-stable de degré 0. Plus généralement, on dit que E_K *a réduction potentiellement fortement semi-stable de degré* 0 s'il existe un revêtement fini étale $\alpha : Y_K \to X_K$ tel que $\alpha^*(E_K)$ ait réduction fortement semi-stable de degré 0 sur Y_K. Lorsque l'on part d'un revêtement fini étale $Y_K \to X_K$ et d'un fibré $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{Y}$ ayant une fibre spéciale fortement semi-stable de degré 0 (où $\mathcal{Y}$ désigne un certain modèle propre plat de Y_K), il résulte de 2.6 et des méthodes générales de [4] que l'on peut lui associer une représentation du groupe fondamental $\pi_1(X_K \times_K \mathbf{C}_p)$. Dans [4], les auteurs considèrent le même problème, mais avec un $Y_K \to X_K$ qui peut être ramifié et lui associent une représentation de $\pi_1(U_K)$ (où U_K est un certain ouvert de X_K). On peut donc effectuer le "transport parallèle" (au sens de [4]) directement, et simplifier la preuve du théorème principal de [4]. Toutefois, il n'est pas clair qu'en considérant des revêtements ramifiés $Y_K \to X_K$, on n'atteint pas une classe strictement plus large de fibrés que ceux associés à des revêtements finis étales.

Références

1. Altman, A., Kleiman, S.: Compactifying the Picard scheme. Adv. Math. **35**, 50–112 (1980)
2. Bosch, S., Lütkebohmert, W., Raynaud, M. : Néron models. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **3**. Folge, Band 21. Springer, Heidelberg (1990)
3. Deligne, P., Mumford, D.: The irreducibility of the space of curves of given genus. Inst. Hautes ÉTudes Sci. Publ. Math. **34**, 75–110 (1969)
4. Deninger, C., Werner, A.: Vector bundles on p-adic curves and parallel transport. Ann. Sci. ÉCole Norm. Sup. **38**(4), 553–597 (2005)
5. Grothendieck, A.: Eléments de géométrie algébrique II, III, IV. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **8, 11, 17, 20, 24, 28, 32** (1961–1967)
6. Grothendieck, A.: Schémas en groupes I. In : Lecture Notes in Mathematics, vol. 151. Springer, Berlin (1970)
7. Kleiman, S.: The Picard scheme. arXiv :/math.AG/0504020
8. Piene, R.: Courbes sur un trait et morphismes de contraction. Math. Scand. **35**, 5–15 (1974)