Structure du π_1 d'une courbe lisse sur un corps algébriquement clos

Jilong Tong

Le but de ces notes est de présenter les résultats, classiques ou plus récents, sur la structure du π_1 d'une courbe algébrique lisse sur un corps algébriquement clos. Ici, le mot "courbe" sur un corps k désignera toujours un k-schéma séparé de type fini, géométriquement connexe de dimension 1. Pour p un premier, la notion p' signifie toujours "premier à p". Pour simplifier la présentation, on ignorera systèmatiquement le choix du point base dans la suite.

Première partie

Résultats classiques

1. Rappels : groupe profini topologiquement de type fini

Un groupe profini est dit *topologiquement de type fini*, s'il existe un nombre fini d'éléments $g_1, g_2, \cdots g_n$ tel que le plus petit sous groupe *fermé* engendré par $g_1, \cdots, g_n$ soit égal à G. Dans ce numéro, on va rappeler quelques énoncés concernant les groupes profinis topologiquement de type fini, qui seront très utiles pour la suite de ces notes.

Proposition 1.1 ([3] proposition 16.10.6) *Soient G un groupe profini topologiquement de type fini, $f : G \to G$ un endomorphisme surjectif de groupes profinis. Alors f est un isomorphisme.*

Définition 1.2 ([3] page 330) *Soit G un groupe profini, notons $\mathrm{Im}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de groupes finis Γ qui peuvent se réaliser comme quotients (continus) finis de G.*

Avec cette définition, pour $\phi : G \to H$ un *épimorphisme* de groupes profinis, il induit alors une inclusion $\mathrm{Im}(H) \subset \mathrm{Im}(G)$. On a une réciproque de cette observation lorsque le groupe G est topologiquement de type fini :

Proposition 1.3 ([3] proposition 16.10.7) *Soient G, H deux groupes profinis, avec G topologiquement de type fini.*

i) *Si $\mathrm{Im}(H) \subset \mathrm{Im}(G)$, alors H est un quotient de G.*
ii) *Si $\mathrm{Im}(H) = \mathrm{Im}(G)$, alors $H \simeq G$.*

En combinant 1.1 et 1.3, on a

Corollaire 1.4 *Soit $f : G \to H$ un morphisme surjectif de groupes profinis, avec H topologiquement de type fini. Supposons que f induit une égalité $\mathrm{Im}(H) = \mathrm{Im}(G)$, alors f est un isomorphisme.*

Pour une application de la proposition précédente à l'étude de π_1, prouvons d'abord le lemme suivant :

2000 Mathematics Subject Classification

Lemme 1.5 *Soient k un corps algébriquement clos, X/k un schéma connexe de type fini. Soit $k \subset K$ une extension de corps algébriquement clos. Alors le morphisme surjectif $\pi_1(X_K) \to \pi_1(X)$ induit une égalité d'ensembles* $\mathrm{Im}(\pi_1(X)) = \mathrm{Im}(\pi_1(X_K))$.

Démonstration. Soit $\pi_1(X_K) \to G$ un quotient fini qui correspond au revêtement $Z \to X_K$ de X_K, galoisien de groupe G. Il suffit donc de démontrer qu'il existe un revêtement $Y \to X$ fini galoisien de groupe isomorphe à G. Comme le schéma X_K/K est de présentation finie, et $Z \to X_K$ est fini, il existe donc un une extension de type fini k' de k contenue dans K, et un revêtement étale galoisien Z' de $X_{k'} = X \otimes_k k'$, tel que le carré suitvant soit cartésien :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[d] \\ X_K \arrow[r] & X_{k'} \end{tikzcd}$$

Comme k'/k de type fini, il existe un k-schéma de type fini intègre S dont le corps de fractions est isomorphe à k'. Notons $X_S = X \times_k S$. Quitte à diminuer S, on peut supposer que le revêtement fini galoisien $Z' \to X_{k'}$ de groupe G au-dessus du point générique de S peut s'étendre en un revêtement fini galoisien $\mathcal{Z}' \to X_S$ de groupe G. Finalement, soit $s \in S(k)$ un point *rationnel* de S (c'est possible car S de type fini sur $k = \overline{k}$), on obtient ainsi un revêtement fini étale $Y = \mathcal{Z}_s \to X$, qui est galoisien de groupe G. D'où le résultat. $\square$

Corollaire 1.6 *Soient k un corps algébriquement clos, X/k un k-schéma connexe de type fini. Notons $\pi_1(X)$ son groupe fondamental. Soit $k \subset K$ une extension algébriquement clos de corps. Alors si $\pi_1(X)$ est topologiquement de type fini, le morphisme (automatiquement surjectif) de changement de base $\pi_1(X_K) \to \pi_1(X)$ est alors un isomorphisme.*

Démonstration. Compte tenu de l'hypothèse, ceci résulte de 1.4 et de 1.5. $\square$

Remarque 1.7 On verra plus tard que, pour X/k une courbe propre lisse définie sur un corps algébriquement clos, son groupe fondamental $\pi_1(X)$ est topologiquement de type fini. Par conséquent, pour une courbe propre, l'ensemble $\mathrm{Im}(\pi_1(X))$ contient autant d'informations que $\pi_1(X)$. Mais pour une courbe affine X/k en positive caractéristique, son $\pi_1(X)$ n'est plus topologiquement de type fini (3.2.2 (ii)). Donc la connaissance de $\mathrm{Im}(\pi_1(X))$ est insuffisante pour déterminer la structure du groupe profini $\pi_1(X)$: par exemple, on sait que l'ensemble $\mathrm{Im}(\pi_1(X))$ est invariant par extensions de corps algébriquement clos (1.5), mais on verra dans la suite que la structure de $\pi_1(X)$, pour X une courbe affine, dépend du corps de base k (3.2.2).

2. Le quotient $\pi_1^{(p')}$

Soit X/k une courbe. On note par $\pi_1(X)$ le groupe fondamental de X/k, et par $\pi_1^{(p')}(X)$ le plus grand quotient d'ordre premier à p de $\pi_1(X)$. Ce dernier groupe profini classifie donc les revêtements finis étales d'ordre premier à p de X. Comme X/k est une courbe, il est alors classique que X peut être compactifiée en une k-courbe lisse connexe projective $\overline{X}$. Notons $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\} = \overline{X} - X$, et $g = g(\overline{X})$ le genre de X/k. Les deux entiers g et n sont alors indépendants du choix de compactification lisse $\overline{X}/k$ de X.

2.1 Cas de caractéristique nulle

a) Cas où $k = \mathbb{C}$.

Notons $\mathfrak{X} = X(\mathbb{C})$ l'ensemble des $\mathbb{C}$-points rationnels de X, qui est muni de manière canonique une structure complexe, de sorte que $\mathfrak{X}$ devient une surface de Riemann connexe (appelée l'analytification de X, notée X^{an}), obtenue comme complémentaire de n points distincts $y_1, y_2, \cdots, y_n$ d'une surface de Riemann compacte connexe de genre g. Concernant le groupe fondamental topologique d'une telle surface de Riemann, on a le résultat suivant :

Théorème 2.1.1 *Soit $\mathfrak{S}$ une surface de Riemann, obtenue comme le complémentaire de n points distincts $z_1, z_2, \cdots, z_n$ d'une surface de Riemann compacte connexe de genre g, alors son groupe de groupe fondamental topologique $\pi_1^{\mathrm{top}}(\mathfrak{S})$ est un group (non commutatif en général) de type fini, engendré par $2g+n$ éléments $\alpha_1, \cdots, \alpha_g$, $\beta_1, \cdots, \beta_g$, $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$, qui vérifient la seulement relation suivante :*

$$\left(\prod_{i=1}^{g}[\alpha_i, \beta_i]\right) \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \cdots \cdot \gamma_n = 1.$$

Pour déterminer la structure de $\pi_1(X)$, il nous faut encore le principe de GAGA de Serre, qui s'énonce de la façon suivante :

Théorème 2.1.2 (GAGA, [4] exposé XII) *Le foncteur de "analytification" induit une équivalence de catégories entre la catégorie des revêtements finis étales de X, et la catégorie des revêtements topologiques de degré fini de $\mathfrak{X} = X^{\mathrm{an}}$.*

Définition 2.1.3 *Notons $\Pi_{g,n}$ le groupe engendré par $2g+n$ éléments $\alpha_1, \cdots, \alpha_g$, $\beta_1, \cdots, \beta_g$, $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ par rapport à la seule relation suivante :*

$$\left(\prod_{i=1}^{g}[\alpha_i, \beta_i]\right) \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \cdots \cdot \gamma_n = 1.$$

Par définition de $\pi_1(X)$, ce groupe profini classifie les revêtements finis étales algébriques de X. Or vu l'équivalence entre la catégorie des revêtements finis étales algébriques et la catégorie des revêtements topologiques de degré fini de $X(\mathbb{C}) = \mathfrak{X}$, et que cette dernière catégorie est en fait classifiée par le complété profini de $\pi_1^{\mathrm{top}}(\mathfrak{X})$, on a donc :

$$\pi_1(X) \simeq \widehat{\pi_1^{\mathrm{top}}(\mathfrak{X})} \simeq \widehat{\Pi_{g,n}}.$$

On obtient ainsi le résultat suivant :

Corollaire 2.1.4 *Gardons les notations précédentes. On a alors $\pi_1(X) \simeq \widehat{\Pi_{g,n}}$. En particulier, $\pi_1(X)$ est topologiquement de type fini, et il est même libre de rang $2g+n-1$ dès que $n \geq 1$ (c'est-à-dire, lorsque la courbe $X/\mathbb{C}$ est affine).*

b) Cas où $k = \overline{k}$ algébriquement clos de caractéristique nulle

Donc $k = \overline{k}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Comme la courbe X/k est de présentation finie, il existe un sous-corps k_0 de k qui est de type fini sur $\mathbb{Q}$, et un k_0-schéma X_0, tels que $X = X_0 \otimes_{k_0} k$. Notons $\overline{k_0} \subset k$ la clôture algébrique de k_0 dans k, et fixons un plongement $\overline{k_0} \hookrightarrow \mathbb{C}$ (c'est possible car $k_0/\mathbb{Q}$ est de type fini). On a alors le diagramme commutatif suivant, dont les carrés sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
X_{0,\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] & X_{0,\overline{k_0}} \arrow[d] & X \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(\overline{k_0}) & \mathrm{Spec}(k) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

où $X_{0,\overline{k_0}}$ s'obtient par changement de base de X_0/k_0. On en déduit les deux morphisimes surjectifs suivants :

$$\pi_1(X_0, \mathbb{C}) \xrightarrow{\alpha} \pi_1(X_{0,\overline{k_0}}) \xleftarrow{\beta} \pi_1(X) \ .$$

D'après 2.1.4, $\pi_1(X_{0,\mathbb{C}})$ est topologiquement de type fini. Il en est donc de même de $\pi_1(X_{0,\overline{k_0}})$ vu la surjectivité de α. On applique ensuite le corollaire 1.6, on trouve que les deux morphismes α et β sont des isomorphismes. En particulier, $\pi_1(X)$ est topologiquement de type fini.

Proposition 2.1.5 *Soient $k = \overline{k}$ un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, X/k une courbe séparée lisse connexe, obtenue comme le complémentaire de n points rationnels d'une courbe propre lisse de genre g sur k. Alors*

i) *son groupe fondamental $\pi_1(X)$ est topologiquement de type fini, et isomorphe à $\widehat{\Pi_{g,n}}$.*
ii) *soit $k \subset K$ une extension de corps algébriquement clos, alors le morphisme de changement de base*
$$\pi_1(X_K) \to \pi_1(X)$$
est un isomorphisme.

Démonstration. La deuxième assertion résulte de 1.6 et de la finitude de $\pi_1(X)$. □

b) Cas général : descente galoisienne.

Donc, le corps k est un corps de caractéristique nulle, qui n'est pas forcément algébriquement clos. Commençons par un lemme général.

Lemme 2.1.6 (Lemme de descente, [1] théorème 4.1.2) *Considérons une suite exacte de groupes profinis scindée,*
$$0 \longrightarrow \pi' \longrightarrow \pi \xrightarrow{\alpha} \Gamma \longrightarrow 0$$
avec $s : \Gamma \to \pi$ un morphisme de groupes profinis tel que $\alpha \circ s = \mathrm{id}_\Gamma$. Soit $\phi : \pi' \to G$ un morphisme de groupes profinis. Pour que ce morphisme ϕ puisse s'étendre en un morphisme $\Phi : \pi \to G$, il faut et il suffit qu'il existe un morphisme $\varphi : \Gamma \to G$ tel que
$$\phi(x^{s(\tau)}) = \varphi(\tau)\phi(x)\varphi(\tau)^{-1}, \qquad \forall \tau \in \Gamma \quad \forall x \in \pi',$$
où $x^{s(\tau)} := s(\tau)xs(\tau)^{-1}$.

La preuve de ce lemme est immédiate. On applique ce lemme dans la situation suivante : soit X/k un schéma de type fini géométriquement connexe, *muni d'un point rationnel $x \in X(k)$*. Notons $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(k^s/k)$ le groupe de Galois absolu du corps k. On a alors la première suite exacte fondamentale
$$1 \to \pi_1(X_{\overline{k}}) \to \pi_1(X) \to \Gamma_k \to 1.$$
Le point rationnel $x \in X(k)$ nous permet de définir une section $s = s_x : \Gamma_k \to \pi_1(X)$. Avec ces notations, le lemme ci-dessus peut se traduire de la façon suivante : pour qu'un revêtement étale fini galoisien Y de $X_{\overline{k}}$ puisse se désendre en un revêtement étale *galoisien* de X, il faut et il suffit que l'on peut munir une action de Γ_k sur Y, *et* sur $\mathrm{Aut}(Y/X_{\overline{k}})$ de façon compactible avec celle de Γ_k sur $X_{\overline{k}}$. Avec ce lemme de descente, on peut par exemple vérifier que le groupe symétrique S_n peut être réalisé comme quotient fini de $\mathbb{P}^1_k - \{0, 1, \infty\}$. On renvoie à [1] (chapitre 4) pour plus de détails.

2.2 Cas de caractéristique positive

Dans ce numéro, le corps k est algébriquement clos *de caractéristique p positive*. Le but est d'esquisser la preuve du fait que le groupe $\pi_1^{(p')}(X)$ est isomorphe à $\widehat{\Pi_{g,n}}^{(p')}$. En particulier, $\pi_1^{(p')}(X)$ est un groupe profini de type fini, engendré par $2g+n-1$ éléments. La stratégie est d'essayer d'utiliser le fait correspondant en caractéristique nulle par la théorie de spécialisation de Grothendieck. Pour simplifier un peu la notation, on va utiliser les notations suivantes : soit U/k une courbe lisse, avec X/k une compactification lisse fixée.

a) Relèvement de courbes à la caractéristique nulle

L'outil principal ici est donc la théorie de déformation, comme décrite dans SGA 1. Citons d'abord le résultat suivant :

Théorème 2.2.1 ([4], exposé III, théorème 7.3) *Soit A un anneau noetherien local complet, de corps résiduel k. Notons $S = \mathrm{Spec}(A)$ le spetre de A, et on désigne par $s \in S$ son point fermé. Soit X_0/s un schéma lisse projectif, tel que*

$$\mathrm{H}^2(X_0, T_{X_0/s}) = 0,$$

avec $T_{X_0/k} := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X_0/s}, \mathcal{O}_{X_0})$ son faisceau tangent. Il existe alors un schéma formel lisse propre $\mathfrak{X}$ sur $\hat{S} = \mathrm{Spf}(A)$ relevant X_0/s. Si on a de plus

$$\mathrm{H}^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = 0,$$

on peut même trouver un S-schéma lisse projectif sur S tel que $X_s = X_0$.

Posons $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt, et $S = \mathrm{Spec}(W)$. D'après le théorème 2.2.1, il existe un S-schéma projectif lisse $\mathcal{X}/S$ tel que $\mathcal{X}_s$ est la courbe X. Notons $\{y_1, \cdots, y_n\}$ le complémentaire de U dans X, et comme $\mathcal{X}/S$ est lisse, et que S est strictement hensélien, les points rationnels y_i peuvent se relever en un point à valeurs dans S, noté par $\alpha_i \in \mathcal{X}(S)$. Posons

$$\mathcal{U} = \mathcal{X} - \bigcup_i \alpha_i(S), \qquad D := \bigcup_i \alpha_i(S).$$

Le schéma D/S est donc est un diviseur de Cartier de $\mathcal{X}$, fini et étale sur S.

b) Théorie de spéclisation de Grothendieck.

Gardons les notations précédentes. Pour Z/K une courbe lisse connexe sur un corps K algébriquement clos, avec $\overline{Z}$ une compactification lisse de Z/K, on désigne par $\pi_1^t(Z)$ le groupe fondamental modéré, de Z, qui classifie les revêtements finis étales de Z, modérément ramifié le long du diviseur à l'infini $\overline{Z} - Z$. Pour les π_1^t, on dispose de la théroie de spécialisation suivante :

Théorème 2.2.2 (Grothendieck, [4] Exposé XIII, ou [7] théorème 4.4) *Notons $\eta \in S$ le point générique. Il existe alors un morphisme surjectif de groupes profinis*

$$\mathrm{sp} : \pi_1^t(\mathcal{U}_{\bar{\eta}}) \to \pi_1^t(\mathcal{U}_s),$$

qui induit un isomorphisme sur les plus grands quotients premiers à p :

$$\mathrm{sp} : \pi_1^{t,(p')}(\mathcal{U}_{\bar{\eta}}) \to \pi_1^{t,(p')}(\mathcal{U}_s).$$

c) Conclusion.

Remarquons qu'un revêtement fini étale sur une courbe lisse d'ordre premier à p est automatiquement modérément ramifié le long du diviseur à l'infini, il en résulte que le morphisme surjectif canonique $\pi_1 \to \pi_1^t$ induit un isomorphisme sur les plus grands quotients premiers à p :

$$\pi_1^{(p')} \simeq \pi_1^{t,(p')}.$$

On obtient donc une flèche de spécialisation (grâce à 2.2.2)

$$\mathrm{sp} : \pi_1^{(p')}(\mathcal{U}_{\bar{\eta}}) \to \pi_1^{(p')}(\mathcal{U}_s).$$

qui est un isomorphisme. Or par construction, $\mathcal{U}_{\bar{\eta}}$ est le complémentaire de n points rationnels d'une courbe lisse projective connexe de genre g sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. En vertu de la proposition 2.1.5, il existe un isomorphisme de groupes profinis :

$$\pi_1^{(p')}(U) \simeq \pi_1^{(p')}(\mathcal{U}_{\bar{\eta}}) \simeq \widehat{\Pi_{g,n}}^{(p')}.$$

En particulier, $\pi_1^{(p')}(U)$ est topologiquement de type fini, engendré par $2g+n$ éléments. Pour résumé, on a

Proposition 2.2.3 *Soit X/k une courbe séparé lisse conexe sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$. Alors*

i) *Le groupe $\pi_1^{(p')}(X)$ est isomorphe à $\widehat{\Pi_{g,n}}^{(p')}$. En particulier, il est topologiquement de type fini, engendré par $2g+n$ éléments.*

ii) *Si la courbe X/k est projective, le groupe $\pi_1(X)$ est topologiquement de type fini, isomorphe à un quotient de $\widehat{\Pi_{g,0}}$.*

3. Le quotient $\pi_1^{(p)}$.

On s'intéresse ici le plus grand quotient pro-p $\pi_1^{(p)}$ de π_1. Dans ce §, le corps k est supposé algébriquement clos de caractéristique $p > 0$.

3.1 Cas projectif.

Supposons d'abord que X/k est une courbe lisse *projective* de genre $g \geq 0$. Si $g = 0$, $X = \mathbb{P}_k^1$ est la droite projective. D'après la formule d'Hurwitz, X est simplement connexe, c'est-à-dire, $\pi_1(X)$ est trivial. Pour cette raison, on va supposer dans la suite que $g \geq 1$. Notons J sa jacobienne, qui est une variété abélienne sur k, de dimension g.

a) p-rang d'une courbe.

Rappelons d'abord la définition classique suivante :

Définition 3.1.1 *On appelle le p-rang $\gamma = \gamma_X$ de la courbe X/k la dimension sur $\mathbb{F}_p$ du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel*

$$\ker(p : J(k) \to J(k)).$$

Alors γ_X est un entier, compris entre 0 et g, qui est aussi la dimension du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X)^F$, où $F : \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X)$ est l'application semi-linéaire induite par le Frobenius absolu de X.

b) Un critère de la théorie de groupes

Pour I un ensemble, on note par $F(I)$ le pro-p-groupe libre, engendré par une base indexée par l'ensemble I.

Proposition 3.1.2 ([12], chap. I, § 4.2 et § 4.3) *Soit G un pro-p-groupe.*

i) *G est isomorphe à un quotient de $F(I)$ si et seulement si le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $\mathrm{H}^1(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ admet une base sur $\mathbb{F}_p$ de cardinal $\leq \sharp I$.*

ii) *Le pro-p-groupe G est libre si et seulement si $\mathrm{H}^2(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$.*

Donc, pour étudier $\pi_1^{(p)}$, il faut calculer les groupes de cohomologie. $\mathrm{H}^i(\pi_1^{(p)}(X), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ pour $i = 1, 2$. Pour cela, on va d'abord calculer les groupes $\mathrm{H}^i(\pi_1(X), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ en utilisant les cohomologies étales.

c) Calculs cohomologiques

D'une manière générale, pour Z un schéma, on note Z_{et} (resp. Z_{fet}) le petit site étale de Z (resp. le petit site des revêtements finis étales de Z). Il existe alors un morphisme canonique de topos

$$\epsilon : Z_{\text{et}}^{\sim} \to Z_{\text{fét}}^{\sim}.$$

D'où un morphisme induit sur les cohomologies :

$$\mathrm{H}^1(\pi_1(Z,\bar{z}),\mathcal{F}_{\bar{z}}) \simeq \mathrm{H}^i(Z_{\mathrm{fet}},\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(Z,\mathcal{F}).$$

avec $\overline{z}$ un point géométrique de Z, et $\mathcal{F}$ un faisceau étale fini localement constant sur Z.

Proposition 3.1.3 *Soit Z/k une courbe lisse (pas forcément projective) sur k. Le morphisme canonique*

$$\mathrm{H}^i(Z_{\mathrm{fet}},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(Z,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Démonstration. Il existe une suite spectrale :

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p\left(Z_{\mathrm{fet}},\mathrm{R}^q\epsilon_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(Z_{\mathrm{et}},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

avec $\mathrm{R}^q\epsilon_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le faisceau étale sur le site $Z_{\mathrm{fét}}$ associé au préfaisceau donné par

$$Z_{\mathrm{fet}} \ni Z' \mapsto \mathrm{H}^q(Z'_{\mathrm{et}},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

Donc, pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que $\mathrm{R}^q\epsilon_*\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right) = 0$ dès que $q \geq 1$. Autrement dit, quelque soit Z' un schéma fini étale sur Z, et quelque soit $\alpha \in \mathrm{H}^q(Z'_{\mathrm{ét}},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, il existe un schéma Z'' *fini* étale sur Z', tel que l'image de α par l'application canonique ci-dessous est nulle.

$$\mathrm{H}^q(Z'_{\mathrm{ét}},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^q(Z''_{\mathrm{ét}},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

Le cas où $q \geq 2$ est clair, puisque Z' est en effet union disjointe de courbes lisse connexes, donc d'après les calculs ci-après de cohomologies étales (qui n'utilise pas cette proposition), on a $\mathrm{H}^2(Z'_{\mathrm{et}},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$. Pour le cas où $q = 1$, rappelons que $\mathrm{H}^1(Z'_{\mathrm{et}},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ classifie les torseurs étales sur Z' sous $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Or le faisceau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est fini constant sur Z', un tel torseur devient trivial après un revêtement *fini* étale de Z', d'où l'annulation de $\mathrm{R}^1\epsilon_*\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)$, et donc $\mathrm{R}^q\epsilon_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 0$ pour tout $q > 0$. Par conséquent, la suite spectrale ci-dessus est dégénérée, et que le morphisme canonique (qui est juste le morphisme canonique de l'énoncé de cette proposition)

$$E_2^{i,0} = \mathrm{H}^i(Z_{\mathrm{fet}},\epsilon_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathrm{H}^i(Z_{\mathrm{fet}},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^i(Z_{\mathrm{et}},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{Z}$. $\square$

Donc, les calculs de $\mathrm{H}^1(\pi_1(X),\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ sont amenés aux calculs de groupes cohomologiques étales. Partons de la suite exacte d'Artin-Schreier sur X,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,X} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{G}_{a,X} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{P} : \mathbb{G}_{a,X} \to \mathbb{G}_{a,X}$ est donné par $t \mapsto t^p - t$, on en déduit

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^2_{\mathrm{ét}}(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) & = & \mathrm{coker}(\mathcal{P} : \mathrm{H}^1(X,\mathcal{O}_X) \to \mathrm{H}^1(X,\mathcal{O}_X)) \\ \mathrm{H}^i_{\mathrm{ét}}(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) & = & 0 \quad \text{lorsque} \quad i \geq 3. \end{array}$$

compte tenu du fait que $\mathrm{H}^i_{\mathrm{ét}}(X,\mathbb{G}_{a,X}) \simeq \mathrm{H}^i(X,\mathcal{O}_X)$ pour tout $i \geq 0$.

Lemme 3.1.4 *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Notons $\sigma : k \to k$ le morphisme de Frobenius. Soient V un k-espace vectoriel de dimension finie, $f : V \to V$ une application σ-semi-linéaire. Alors l'application*

$$\mathrm{id}_V - f : V \to V$$

est surjectif.

Démonstration. Notons
$$V_n := \bigcup_i \ker(f^i : V \to V),$$
c'est un sous-espace vectoriel de V sur k tel que $f(V_n) \subset V_n$. Posons $V_s = V/V_n$, l'application f induit alors une application $f_s : V_s \to V_s$ qui est encore σ-semi-linéaire. On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes (dans la catégorie des groupes abéliens) :
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_n \arrow[r] \arrow[d, "1-f"] & V \arrow[r] \arrow[d, "1-f"] & V_s \arrow[r] \arrow[d, "1-f_s"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & V_n \arrow[r] & V \arrow[r] & V_s \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
Donc il suffit de montrer que les deux applications $1-f : V_n \to V_n$ et $1-f_s : V_s \to V_s$ sont surjectifs. Donc, quitte à remplacer V par V_n ou par V_s, on peut supposer que f satisfait à l'une des deux conditions suivantes : (i) $f : V \to V$ est nilpotient ; (ii) $f : V \to V$ est injectif. Traitons d'abord le cas où f est nilpotent. Donc, quelque soit $x \in V$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, tel que $f^n(x) = 0$. Donc si l'on pose
$$y = \left(\sum_{i=0}^{\infty} f^i\right)(x) = \sum_{i=0}^{n} f^i(x) \in V,$$
on a $(1-f)(y) = x$, en particulier, l'application $1-f : V \to V$ est surjective. Ensuite, on traite le cas où $f : V \to V$ est injectif. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une k-base de V, et posons A la matrice de type (n,n) telle que $f(e_1, \cdots, e_n) = (e_1, \cdots, e_n) \cdot A$. Soit $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ une autre k-base de V, et supposons $(e'_1, \cdots, e'_n) = (e_1, \cdots, e_n)Q$. Alors on a
$$f(e'_1, \cdots, e'_n) = f\left((e_1, \cdots, e_n) \cdot Q\right) = f(e_1, \cdots, e_n)Q^{(p)} = (e'_1, \cdots, e'_n)Q^{-1}AQ^{(p)}.[1]$$
Or en vertu du lemme ci-après, il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP^{(p)} = I_n$. Posons $(e'_1, \cdots, e'_n) = (e_1, \cdots, e_n)P$, d'après le calcul précédent, on a $f(e'_i) = e'_i$ pour tout i. Donc, pour tout $x = \sum_i \lambda_i e'_i \in V$, on a
$$(1-f)(x) = \sum_{i=1}^{n} (1-f)(\lambda_i e'_i) = \sum_{i}^{n} (\lambda_i - \lambda_i^p) e'_i.$$
Par conséquent, comme le corps k est algébriquement clos, l'application
$$1 - f : V \to V$$
est donc surjectif. Ceci achève la preuve. □

Lemme 3.1.5 (SGA 7, [2] exposé XXII, corollaire 1.1.2) *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, et A une matrice inversible de type (n,n) à coefficients dans k. Il existe alors une matrice P inversible, telle que $P^{-1}AP^{(p)} = I_n$.*

Démonstration. On considère l'action de $\mathbf{GL}_{n,k}$ sur $X := \mathbf{GL}_{n,k}$:
$$\mathbf{GL}_{n,k} \times_k X \to X, \qquad (Q, B) \mapsto Q^{-1}BQ^{(p)}.$$
Alors pour chaque $B \in X(k)$, l'orbite de B sous cette action est ouverte : en effet, le morphisme suivant
$$\phi : \mathbf{GL}_{n,k} \to X, \qquad Q \mapsto Q^{-1}BQ^{(p)}.$$

1. Si $Q = (x_{i,j})$, alors $Q^{(p)} = \left(x_{i,j}^p\right)$

est étale. [2] Par suite, comme le schéma X est irréductible, il n'y a qu'une orbite ouverte. D'où le fait que l'application

$$\mathbf{GL}_{n,k} \to X = \mathbf{GL}_{n,k}. \qquad Q \mapsto Q^{-1}AQ^{(p)}$$

est un épimorphisme. Or $k = \overline{k}$ algébriquement clos, ceci implique que l'application

$$\mathbf{GL}_n(k) \to X(k) = \mathbf{GL}_n(k). \qquad Q \mapsto Q^{-1}AQ^{(p)}$$

est surjectif. Il existe donc une matrice P telle que $P^{-1}AP^{(p)} = I_n$, d'où la conclusion. □

Comme corollaire du lemme 3.1.4, on a donc $\mathrm{H}^i(\pi_1(X), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{H}^i(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ dès $i \geq 2$.

Corollaire 3.1.6 *On a* $\mathrm{H}^i(\pi_1^{(p)}(X), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ *pour* $i \geq 2$.

Démonstration. Remarquons d'abord que pour $U \subset \pi_1(X)$ un sous-groupe *ouvert* de $\pi_1(X)$, on a $\mathrm{H}^i(U, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ pour $i \geq 2$. En effet, soit $Y \to X$ le revêtement fini étale qui correspond à $U \subset \pi_1(X)$, on a alors $\pi_1(Y) = U$. Donc les calculs précédents appliqués à Y nous montrent que

$$\mathrm{H}^i(U, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{H}^i(Y_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0 \qquad \forall \ i \geq 2$$

Notons N le sous groupe de π_1, noyau du morphisme canonique $\pi_1(X) \to \pi_1^{(p)}(X)$, et écrivons N comme l'intersection des sous-groupes *ouverts* U de $\pi_1(X)$ contenant N, on a ([12] chap. I, § 2, proposition 8) :

$$\mathrm{H}^i(N, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \varinjlim_{N \subset U \subset \pi_1(X)} \mathrm{H}^i(U, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

Donc $\mathrm{H}^i(N, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ pour $i \geq 2$. Mais, vu la définition de N, il n'y pas de quotient d'ordre une puissance de p pour le groupe N, ceci implique $\mathrm{H}^1(N, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$. On a ainsi

$$\mathrm{H}^i(N, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0 \qquad \forall \ i \geq 1.$$

Considérons ensuite la suite spectrale suivante :

$$E_2^{i,j} = \mathrm{H}^i\left(\pi_1^{(p)}(X), \mathrm{H}^j(N, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\right) \Rightarrow \mathrm{H}^{i+j}(\pi_1(X), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

On a $E_2^{p,q} = 0$ dès que $q \geq 1$. Par conséquent, cette suite spectrale est dégénérée, et on trouve

$$\mathrm{H}^i(\pi_1^{(p)}(X), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{H}^i(\pi_1(X), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \quad \forall \ i \geq 0$$

d'où le résultat. □

Donc, en vertu du lemme 3.1.2 (ii), $\pi_1^{(p)}(X)$ est une pro-p-groupe libre. Pour déterminer son rang, compte tenue du lemme 3.1.2 (i), il nous reste de calculer la dimension du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel

$$\mathrm{H}^1(\pi_1^{(p)}(X), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{H}^1(\pi_1(X), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{H}^1\left(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right) \simeq \left(\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X)\right)^F,$$

qui est donc le p-rang de la courbe X/k. On a ainsi que le plus grand quotient pro-p $\pi_1^{(p)}(X)$ est un pro-p groupe libre de rang égal au p-rang de X.

3.2 Cas affine

Soit maintenant $X = \mathrm{Spec}(A)$ une courbe affine lisse sur k. La suite d'Artin-Schreier nous permet d'établir les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) &= \mathrm{coker}(\mathcal{P} : \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X)) \\ \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) &= 0 \quad \text{lorsque} \ \ i \geq 2. \end{aligned}$$

En particulier, le groupe $\pi_1^{(p)}(X)$ est pro-p libre. Pour connaître son rang, on a

2. Par exemple, on peut vérifier que ce morphisme est formellement étale au sens de Grothendieck.

Proposition 3.2.1 *Soit $X = \mathrm{Spec}(A)/k$ une courbe affine sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Alors $\pi_1^{(p)}(X)$ est un pro-p-groupe libre, de rang égal au cardinal du corps k.*

Démonstration. Il nous reste à vérifier l'assertion concernent le rang. En vertu du lemme 3.1.2 (i), et les calculs de cohomologies, il suffit de montrer que la dimension du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $\mathrm{coker}(1 - F : A \to A)$ est égale au cardinal du corps k. D'après le théorème de normalisation de Noether, il existe un morphisme fini injectif de k-algèbre $k[T] \hookrightarrow A$. Si l'on désigne par C son conoyau, C est un k-espace vectoriel de dimension *finie*. Or le morphisme de Frobenius induit alors un carré commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} k[T] \arrow[r] \arrow[d, "F"] & A \arrow[d, "F"] \\ k[T] \arrow[r] & A \end{tikzcd} .$$

Donc $F : A \to A$ induit un morphisme σ-semi-linéaire sur C (encore noté par F). On obtient donc un diagramme commutatif à lignes exactes de groupes abéliens :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & k[T] \arrow[r] \arrow[d, "1-F"] & A \arrow[r] \arrow[d, "1-F"] & C \arrow[r] \arrow[d, "1-F"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & k[T] \arrow[r] & A \arrow[r] & C \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Comme corollaire de la preuve du lemme 3.1.4, on sait que $1 - F : C \to C$ est surjectif, de noyau de dimension finie sur $\mathbb{F}_p$. Donc en vertu du lemme 3.1.2 (i) et du lemme de serpent, il suffit de montrer que $\mathrm{coker}(1 - F : k[T] \to k[T])$ est de dimension sur $\mathbb{F}_p$ égale au cardinal du corps k. Posons C' le conoyau du morphisme de groupes $1 - F : k[T] \to k[T]$. Le groupe C' n'est pas muni d'une structure de k-espace vectoriel, on dispose toutefois des représentants privilégiés : on considère le sous-groupe $\mathcal{A}$ de $k[T]$ donné par

$$\mathcal{A} := \left\{ \sum_{n>0,(n,p)=1} a_n T^n \mid a_n \in k \right\},$$

alors la projectiion $k[T] \to C'$ induit un isomorphisme de groupes (ou encore de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels) $\mathcal{A} \simeq C'$. D'où le résultat. □

On obtient donc

Proposition 3.2.2 *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, X/k une courbe lisse connexe. Alors*

i) *si X/k est projective, le groupe $\pi_1^{(p)}(X)$ est un pro-p-groupe libre de rang égal au p-rang de la courbe X/k.*

ii) *si X/k est affine, le groupe $\pi_1^{(p)}(X)$ est un pro-p-groupe libre de rang égal au cardinal du corps k. En particulier, le groupe fondamental $\pi_1(X)$ de la courbe X/k n'est pas topologiquement de type fini, et sa structure n'est pas invariant par extensions de corps algébriquement clos.*

4. Le quotient π_1^{ab}

On s'intéresse ici donc au plus grand quotient abélien π_1^{ab} de π_1. Dans ce §, le corps k est supposé algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$ quelconque.

4.1 Cas projectif

Soit X/k une courbe projective connexe, de genre $g \geq 1$, et de jacobienne J. On s'intéresse ici à la structure de $\pi_1^{ab}(X)$. En vertu de 2.2.3 et de 3.2.2, on a

$$\pi_1^{ab}(X) \simeq \mathbb{Z}_p^{\gamma} \times \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell^{2g}$$

avec γ le p-rang de X. D'autre part, il est bien connu qu'on a également un isomorphisme de groupes profinis

$$\pi_1^{ab}(J) \simeq \mathbb{Z}_p^{\gamma} \times \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell^{2g}.$$

Par conséquent, les groupes profinis $\pi_1^{ab}(X)$ et $\pi_1(J)$ sont isomorphes. En effet, on a un résultat plus précise suivant : soient $o \in X(k)$ un point rationnel fixé de X, et

$$\sigma : X \hookrightarrow J, \qquad x \mapsto \mathcal{O}_X(x - o)$$

le plongement d'Albanese associé au point o. Ceci induit un morphisme sur les groupes fondamentaux :

$$\sigma : \pi_1(X, \bar{o}) \to \pi_1(J, \bar{o}).$$

Proposition 4.1.1 *Le morphisme ci-dessus induit un isomorphisme, encore noté par σ*

$$\sigma : \pi_1^{ab}(X) \to \pi_1(J).$$

Pour la preuve, il nous faut le résultat important suivant :

Proposition 4.1.2 ([6]) *Considérons l'application d'Albanese $\sigma : X \hookrightarrow J$ ci-dessus.*

i) *Le morphisme σ induit un isomorphisme de k-schémas en groupes*

$$\mathrm{Pic}^\circ_{J/k} \to \mathrm{Pic}^\circ_{X/k} = J.$$

ii) *Le morphisme σ induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules*

$$\mathrm{H}^1(J, \mathcal{O}_J) \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X),$$

Démonstration de 4.1.1. Comme

$$\pi_1^{\mathrm{ab}}(X) \simeq \prod_{\ell} \pi_1^{\mathrm{ab},(\ell)}(X), \quad \text{et} \quad \pi_1(J) \simeq \prod_{\ell} \pi_1^{(\ell)}(J)$$

Il suffit donc de démontrer que le morphisme $\sigma_\ell : \pi_1^{\mathrm{ab},(\ell)}(X) \to \pi_1^{(\ell)}(J)$ est un isomorphisme pour tout premier ℓ. Or en vertu de 2.2.3 et de 3.2.2, les $\mathbb{Z}_\ell$ module $\pi_1^{\mathrm{ab},(\ell)}(X)$ et $\pi_1^{(\ell)}(J)$ sont isomorphes, il suffit donc de prouver que σ induit un isomorphisme

$$\sigma_\ell^* : \mathrm{Hom}(\pi_1^{(\ell)}(J), \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(\pi_1^{\mathrm{ab},(\ell)}(X), \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}).$$

On distingue donc deux cas, le cas où $\ell \neq p$, et le cas où $\ell = p$. Traitons d'abord le cas où $\ell \neq p$. Partons du diagramme commutatif à lignes exactes de faisceaux étales sur J :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mu_{\ell,J} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{G}_{m,J} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{G}_{m,J} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \sigma_*\mu_{\ell,X} \arrow[r] & \sigma_*\mathbf{G}_{m,X} \arrow[r] & \sigma_*\mathbf{G}_{m,X} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

on en déduit le diagramme commutatif à lignes exactes de groupes ordinaires :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{H}^1(J, \mu_{\ell,J}) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma^*"] & \mathrm{Pic}(J) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma^*"] & \mathrm{Pic(J)} \arrow[d, "\sigma^*"] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{H}^1(X, \mu_{\ell,X}) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(X), \end{tikzcd}$$

ou encore

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^1(J, \mu_{\ell,J}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\sigma^*"] & \ker\left(n : \mathrm{Pic}^\circ(J) \to \mathrm{Pic}^\circ(J)\right) \arrow[d, "\sigma^*"] \\ \mathrm{H}^1(X, \mu_{\ell,X}) \arrow[r, "\simeq"] & \ker\left(n : \mathrm{Pic}^\circ(X) \to \mathrm{Pic}^\circ(X)\right). \end{tikzcd}$$

D'après 4.1.2 (i), la seconde flèche verticale ci-dessus est un isomorphisme, il en est donc de même de la première flèche verticale :

$$\sigma^* : \mathrm{H}^1(J, \mu_{\ell,J}) \simeq \mathrm{H}^1(X, \mu_{\ell,X}).$$

C'est-à-dire, le morphisme canonique $\mathrm{Hom}(\pi_1(J), \mu_\ell) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(X), \mu_\ell)$ est un isomorphisme. Or k est algébriquement clos, en choisissant un isomorphisme $\mu_\ell \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, on obtient aussitôt que σ_ℓ^* ci-dessus est un isomorphisme. D'où le cas où $\ell \neq p$. Le cas où $\ell = p$ peut se traiter de façon similaire, en utilisant la théorie d'Artin-Schreier et la proposition 4.1.2 (ii) pour conclure. Ceci achève la preuve de la proposition. □

Remarque 4.1.3 Voici une preuve "géométrique" du fait que le morphisme induit sur les groupes fondamentaux $\sigma : \pi_1(X) \to \pi_J$ est surjectif. En fait, pour ceci, en utilisant les raisonnements utilisés dans le début de la preuve de 4.1.1 ci-dessus, il suffit de prouver l'assertion suivante : quelque soit ℓ un premier, et $\alpha : A \to J$ une isogénie étale (compte tenu de Serre-Lang !) de degré ℓ, le schéma $Y := X \times_J A$ est connexe. On raisonne par l'absurde. Supposons que Y ne soit pas connexe. Comme ℓ est premier, Y serait la réunion disjointe de ℓ copies de X. On en déduit donc une immersion fermée $\tau : X \hookrightarrow A$ telle que $\alpha \circ \tau = \sigma$. Quitte à modifier τ par une translation par un élément appartenant à $\ker(\alpha)$, on peut supposer que $\tau(o) = 0 \in A$. D'après la propriété universelle (d'Albanese) de $\sigma : X \hookrightarrow J$, il existe un morphisme de variétés abéliennes $\beta : J \to A$ tel que $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_J$. Par suite $A \simeq J \times \ker(\alpha)$ avec $\ker(\alpha)$ étale de degré ℓ, en particulier, A ne serait pas connexe. D'où une contradiction.

4.2 Cas affine

Le résultat analogue de 4.1.1 pour une courbe affine fait l'objet principal de la "théorie de corps de classes abélien géométrique", qui est bien exposée par Serre dans [10] (on peut aussi consulter [11] pour une version locale de cette théorie). La situation pour une courbe affine est plus compliquée, puisque dans ce cas ouvert, il faut tenir compte des ramifications sauvages introduites par le diviseur à l'infini. On renvoie le lecteur intéressé à [10] et [11] pour cette jolie théorie.

Deuxième partie

Quelques résultats plus récents en caractéristique positive

On va supposer jusqu'à la fin de cet exposé que k est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Il n'y aura pas de preuve dans cette partie, et on se contentera juste de donner les énoncés précis.

5. Cas propre

Soit X/k une courbe propre lisse de genre $g \geq 1$. D'après 2.2.3, et 3.2.2, les structures de $\pi_1^{(p')}$ et $\pi_1^{(p)}(X)$ sont connues à l'aide de certaines invariants numériques de X/k. Mais la structure de π_1 reste très mystèrieuse pour une courbe de genre $g \geq 2$. On ne dispose d'aucun exemple de courbe de genre $g \geq 2$ où on peut déterminer la structure de π_1.

Pour avoir une idée de la complexité de π_1, on considère la situation suivante : notons $\mathfrak{M}_g/k$ l'espace de modules de courbes projectives de genre $g \geq 2$. Soit $\bar{x} \to \mathfrak{M}_g$ un point géométrique localisé en un point x de $\mathfrak{M}_g$, notons $C_{\bar{x}}$ la courbe projective de genre g correspondante, et on désigne par $\pi_1(x)$ le groupe fondamental de $C_{\bar{x}}$ (rappelons que π_1 d'une courbe propre est invariant par extension algébriquement clos). En plus, soit $y \in \mathfrak{M}_g$ une générisation de x [3], on dispose d'une flèche de spécialisation

$$\mathrm{Sp}_{y,x} : \pi_1(y) \to \pi_1(x)$$

qui est toujours surjective. Mais en général, ce n'est pas un isomorphisme. Par exemple, on peut prendre $y = \eta$ le point générique de $\mathfrak{M}_g$, et $x \in \mathfrak{M}_g$ tel que $C_{\bar{x}}$ soit de p-rang nul. Puisque la courbe générique est forcément ordinaire, le morphisme de spécialisation $\mathrm{Sp}_{\eta,x}$ n'est pas un isomorphisme. Vu cette observation, on peut se poser la question suivante :

Question 5.1 *Soit $y \in \mathfrak{M}_g$ une générisation d'un point fermé $x \in \mathfrak{M}_g$ tel que $x \neq y$. Est-ce que le morphisme de spécialisation peut être un isomorphisme ?*

On peut se poser une autre question liée suivante :

Question 5.2 *Soit Γ une groupe profini topologiquement de type fini. Est-ce qu'il n'existe qu'un nombre fini de points fermés $x \in \mathfrak{M}_g$ tel que $\pi_1(x) \simeq \Gamma$?*

Remarque 5.3 Soit π une classe d'isomorphisme de $\pi_1(x)$, l'ensemble

$$S_\pi := \{x' \in \mathfrak{M}_g \mid \text{il existe un épimorpshime } \pi \to \pi_1(x')\}$$

est un fermé dans $\mathfrak{M}_g$. [4] Donc, une réponse négative à la première question donnera une réponse positive à la seconde.

Pour ces deux questions, les résultats les plus frappants sont les deux théorèmes suivants dus à Tamagawa.

Théorème 5.4 ([15]) *Soient k_0 une clôture algébrique du corps fini $\mathbb{F}_p$, $R = k_0[[T]]$ l'anneau de séries formelles à coefficients dans k_0. Notons $S = \mathrm{Spec}(R) = \{\eta, s\}$. Soit $\mathcal{X}/S$ une courbe propre*

3. ceci signifie que $x \in \overline{\{y\}} \subset \mathfrak{M}_g$.
4. Pour le vérifier, on peut utiliser le même raisonnement utilisé dans la preuve de 1.5

lisse à fibres géométriques connexes, de genre $g \geq 2$. Supposons que le morphisme de spécialisation de Grothendieck

$$\mathrm{Sp} : \pi_1(\mathcal{X}_{\bar{\eta}}) \to \pi_1(\mathcal{X}_s)$$

est un isomorphisme. Alors la courbe X/S est constante.

Théorème 5.5 ([15]) *Soit Γ un groupe profini topologiquement de type fini. Il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de k_0-courbe projective de genre ≥ 2, ayant Γ comme son groupe fondamental.*

Remarque 5.6 Avant les résultats de Tamagawa, Raynaud et Pop-Saïdi ont établi des résultats analogues, mais sous des hypothèses restrictives.

6. Cas affine

6.1 Quotients finis de π_1 : conjecture d'Abhyankar

En 1957, S. Abhyankar a émis la conjecture suivante, qui est maintenant un théorème :

Théorème 6.1.1 (Conjecture d'Abhyankar) *Soit p un premier, et soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p. Soit G un groupe fini. Notons $p(G)$ le sous groupe de G, engendré par ses p-sous groupes de Sylow de G, de sorte que $G/p(G)$ est le plus grand quotient de G d'ordre premier à p. Soit X une courbe propre lisse connexe de genre g sur k, et $U \subset X$ la courbe affine complémentaire de r points, avec $r \geq 1$. Alors il existe un revêtement étale connexe galoisien de U de groupe G si et seulement si $G/p(G)$ est engendré par $2g + r - 1$ éléments.*

Remarque 6.1.2

i) La nécessité de cette condition est claire, d'après la théorie de spécialisation de Grothendieck (2.2.3).

ii) La conjecture d'Abhyankar a été démontrée par Raynaud ([9]) dans le cas de la droite affine, et par Harbater ([5]) dans le cas général. Pop ([8]) a donné aussi une preuve de la conjecture dans le cas général, qui repose également sur le résultat de Raynaud sur une droite affine.

iii) La connaissance sur l'ensemble $\mathrm{Im}(\pi_1(X))$ est insuffisant pour déterminer la structure de ce groupe profini $\pi_1(X)$, puisque $\pi_1(X)$ n'est pas topologiquement de type fini (3.2.2 (i)). Par exemple, on a vu dans la preuve de 1.6 que l'ensemble $\mathrm{Im}(\pi_1(X))$ est invariant par extensions de corps algébriquement clos, mais la structure de $\pi_1(X)$ dépend vraiment du corps de base k (3.2.2 (ii)).

6.2 Caractérisation de certaines invariants à partir de π_1

Le groupe fondamental $\pi_1(U)$ nous donne un invariant très fin. Par exemple, ceci nous permet de retrouver pas mal d'invariants de la courbe U. Pour énoncer ces résultat, introduisons d'abord la définition suivante :

Définition 6.2.1 ([13]) *Soit $\mathcal{F}(U)$ un invariant de courbe U sur un corps algébriquement clos, qui ne dépend que de la classe d'isomorphismes en tant que schéma de U. On dit que l'invariant $\mathcal{F}(U)$ peut être retrouvé par la théorie de groupes à partir du groupe $\pi_1(U)$ si quelques soient U_1/k_1 U_2/k_2 deux courbes sur des corps algébriquement clos, telles que $\pi_1(U_1) \simeq \pi_1(U_2)$, on a alors $\mathcal{F}(U_1) = \mathcal{F}(U_2)$.*

Proposition 6.2.2 ([13]) *On peut retrouver les invariants suivants à partir de $\pi_1(U)$:*

i) *La caractéristique du corps de base k, sauf le cas où $(g, n) = (0, 0)$ (auquel cas, $\pi_1(U)$ est en fait trivial) ;*

ii) *La propriété d'être affine ou propre de X/k ;*

iii) *La caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi := 2 - 2g - n$;*

iv) *Son groupe fondamental modéré comme quotient de $\pi_1(U)$;*

v) *Le p-rang de la courbe compactifiée lisse de U ;*

vi) *Le couple (g, n) ;*

vii) *Le groupe fondamental $\pi_1(X)$.*

6.3 Groupe fondamental modéré

Soit U/k une courbe lisse affine. On considère ici $\pi_1^t = \pi_1^t(U)$ le groupe fondamental modéré de U. On fixe une fois pour toute une compatification lisse X/k de U/k. On note g le genre de la courbe X, et n le degré du diviseur à l'infini $X - U \hookrightarrow X$. Comme dans le cas propre, il résulte de la théorie de spécialisation de Grothendieck (2.2.2) et du résultat analogue en caractéristique nulle, que $\pi_1^t(U)$ est un groupe profini topologiquement de type fini engendré par $2g+n-1$ éléments. Donc la structure de $\pi_1^t(U)$ est déterminée par l'ensemble $\mathrm{Im}(\pi_1^t(U))$. Mais, comme dans le cas propre, la structure de $\pi_1^t(U)$ est encore très mystérieuse pour une courbe hyperbolique, c'est-à-dire une courbe vérifiant la condition $2 - 2g - n < 0$.

6.3.1 *Structure de $\pi_1^{t,(p')}$ et $\pi_1^{t,(p)}$.* Comme un revêtement fini étale de U d'ordre premier à p est automatiquement modérément ramifié, on déduit de 2.2.3 les isomorphismes suivants :

$$\pi_1^{t,(p')}(U) \simeq \pi_1^{(p')}(U) \simeq \widehat{\Pi_{g,n}}.$$

Quand au plus grand quotient pro-p $\pi_1^{t,(p)}$ de π_1^t, il résulte de la définition de la notion "ramification modérée" que'un revêtement fini étale sur U de degré une puissance de p, modérément ramifié à l'infini est automatiquement étale sur X tout entier, l'épimorphisme canonique $\pi_1^t(U) \to \pi_1(X)$ induit un isomorphisme sur les plus grands quotients pro-p :

$$\pi_1^{t,(p)}(U) \simeq \pi_1^{(p)}(X).$$

En particulier, $\pi_1^{t,(p)}$ est un pro-p groupe libre de rang égal au p-rang de la courbe X.

6.3.2 *Quelques résultats de Tamagawa.* Le groupe $\pi_1^t(U)$ contient des informations très riches sur la courbe. Par exemple, on a les résultats suivants, tous dus à Tamagawa.

Théorème 6.3.3 ([14]) *La classe d'isomorphismes du groupe profini $\pi_1^t(U)$ détermine la paire (g, n), sauf dans les cas où $(g, n) = (0, 0)$ ou $(0, 1)$.*

Théorème 6.3.4 ([14]) *Supposons $g = 0$, et $n > 1$ un entier. Supposons de plus l'une des deux conditions suivantes soient remplies : (i) $k = \overline{\mathbb{F}_p}$, (ii) $n \geq 4$. Alors la classe d'isomorphisme de groupes profinis $\pi_1^t(U)$ détermine completement la classe d'isomorphisme du schéma U.*

On a aussi des versions modérées des résultats mentionnés dans le cas propre ci-dessus

Théorème 6.3.5 ([15]) *Soit $R = k_0[[t]]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans $k_0 = \overline{F}_p$. Notons $S = \mathrm{Spec}(R) = \{\eta, s\}$. Soient $\mathcal{X}/S$ une courbe lisse projective de genre g, et $D \hookrightarrow X$ un diviseur effectif étale de degré r sur S. Posons $\mathcal{U} = \mathcal{X} - D$. Suppsons enfin $2 - 2g - r < 0$ et que la flèche de spécialisation de Grothendieck*

$$\mathrm{Sp}^t : \pi_1^t(U_{\bar{\eta}}) \to \pi_1^t(U_s)$$

est un isomorphisme. Alors la courbe $\mathcal{X}/S$ est constante.

Théorème 6.3.6 ([15]) *Soient $g, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, tel que $2 - 2g - r < 0$. Soit Π un groupe profini. Il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de k_0-courbe lisse de type (g, r) ayant Π comme son groupe fondamental.*

RÉFÉRENCES

1 P. DÈBES, *Arithmétique des revêtements de la droite*, preprint, available at http ://math.univ-lille1.fr/~pde/ens.html

2 P. DELIGNE, N. KATZ, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967-1969. LNM. **340**.

3 Michael D. FRIED and M. JARDEN, *Field arithmetic*, third edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. **11**, Springer, 2008.

4 A. GROTHENDIECK, *Revêtements étales et groupe fondamental - S.G.A.1*, L.N.M. **224**, Springer-Verlag, 1971.

5 D. HARBATER, *Abhyankar's conjecture on Galois groups over curves*, Invent. Math. **117**, 1994.

6 J. MILNE, *Jacobian varieties*, in *Arithmetic Geometry*, G.Cornell and J.H. Silverman ed., Springer Verlag, 1986.

7 F. ORGOGOZO, I. VIDAL, *Le théorème de spécialisation du groupe fondamental* in J.-B. Bost et al., Courbes semi- stables et groupe fondamental en géométrie algébrique, Progress in Mathematics, vol. 187, Birkhauser, 2000.

8 F. POP, *Étale covers of affine smooth curves. The geometric case of a conjecture of Shafarevich. On Abhyankar's conjecture*, Invent. Math. **119** 1995, p. 555-578.

9 M. RAYNAUD, *Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar*, Invent. Math. **116**, 1994.

10 J.P. SERRE, *Groupes algébriques et corps de classes*, Herman, 1959.

11 J.P. SERRE, *Corps locaux à corps résiduel algébriquement clos*, Bull. Soc. Math. France, t. **89**, 1961, p. 205-154.

12 J.P. SERRE, *Galois cohomology*, Transl. from the French by Patrick ION. Corr. 2. printing. Springer monographs in mathematics, Springer 2002.

13 A. TAMAGAWA, *On the fundamental groups of curves over algebrically closed fields of characteristic* > 0, International Mathematics Research Notices, **16**, 1999

14 A. TAMAGAWA, *On the tame fundamental groups of curves over algebraically closed fields of characteristic* > 0, in Galois Groups and Fundamental Groups, MSRI Publications, Volume **41**, 2003.

15 A. TAMAGAWA, *Finiteness of isomorphism classes of curves in positive characteristic with prescribed fundamental groups*, J. Algebraic Geom. **13**, 675-724, 2004.

Jilong Tong jilong.tong@math.u-bordeaux1.fr