AGRÉGATION : L'ÉPREUVE ORALE DE MODÉLISATION

KARIM BELABAS

1. La forme de l'épreuve

Ce qui suit est valable pour les trois options : A (probas/stats), B (calcul scientifique, non préparée à Bordeaux) et C (calcul formel).

- Le candidat tire au sort 2 textes, prépare l'un d'entre eux pendant 4h, puis le présente dans la foulée pendant une heure à un jury de 4 personnes. Comme toutes les épreuves orales, l'épreuve est publique : un public restreint (de l'ordre de 6 personnes) et silencieux peut assister à l'épreuve (autres candidats, préparateurs...).
- Pendant la préparation, le candidat a accès à tous les livres de la bibliothèque d'agrégation, dont une partie au format numérique (+ la malle + les siens) ainsi qu'à un ordinateur équipé de logiciels applicatifs, dont GeoGebra classic, Python 3, Octave, R, Sage (version Jupyter), Scilab, wxMaxima. La liste est mise à jour tous les ans[1].
- Pendant la présentation, le candidat dispose d'un ordinateur analogue, ainsi que des fichiers qu'il a préparé, de ses notes de préparation dont il use librement. Un vidéoprojecteur reproduit ce qu'il y a sur votre écran, ce qui permet au jury de suivre. (Alternativement : les membres du jury disposent d'écrans de contrôle reproduisant l'écran du candidat.)

Le jury connaît le texte, et l'a sous les yeux, mais il faut le présenter comme si votre public n'en avait pas connaissance. Le texte est court, de l'ordre de 5 pages, et se termine par une liste de suggestions *indicatives*, mais qui sont autant de points d'entrée dans la problématique du texte.

1.1. Il présente la plupart du temps un problème «réel» (optimisation d'un réseau de communication, comportement d'une colonie de fourmis, compression du contenu d'un disque dur), plus rarement un méta-problème directement mathématique (comment trouver une formule close pour une somme d'origine combinatoire, e.g. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$)

1.2. Il en fait la modélisation, c'est-à-dire le ramène à un problème purement mathématique, plus ou moins proche du problème d'origine, qui l'a motivé. Cette partie est en général précise (des définitions sont données), mais peu motivée.

1.3. Il étudie des pistes de résolutions mathématiques (énoncés de théorèmes, ébauches de démonstrations)

Date: 01/09/2025.

[1] `https://agreg.org/?id=modelisation`

1.4. Il donne fréquemment des pistes d'expérimentations numériques. Il est très rare qu'il propose un algorithme complet de résolution numérique ; plutôt des fragments à assembler soi-même.

2. L'esprit de l'épreuve

Le Programme de l'agrégation (2024) présente ainsi l'esprit de l'épreuve : «À l'aide d'un ou plusieurs logiciels fournis, les candidats devront montrer leur capacité à

- mettre en oeuvre avec précision et rigueur les concepts et outils mathématiques au programme,
- distinguer les représentations exactes ou approchées des objets mathématiques,
- estimer le coût et les limitations d'algorithmes simples : complexité, précision,
- analyser la pertinence des modèles.»

L'épreuve est moins formattée que les autres épreuves d'oral. Lire les rapports des deux dernières années, pour voir ce à quoi s'attend le jury[2]. Il faut quand même introduire le texte (il doit être présenté comme si le jury ne l'avait jamais vu), donner un plan rapide de sa présentation au tableau, et faire tenir le tout (tableau + illustrations informatiques) en environ 35 minutes. Le jury intervient peu pendant cette partie, sauf en cas de difficultés majeures, et pose ses questions pendant les 25 dernières minutes. Quelques points importants :

2.1. Modélisation. Cruciale, beaucoup de points à prendre ! Éviter la paraphrase, trouver quelque chose de personnel à apporter en rapport avec le texte : variante du modèle, étude numérique, cas limites / problématiques. Bien expliquer le problème qui motive le tout et le passage à la formalisation mathématique : l'expliquer ou la critiquer. Être le plus précis et clair possible avec des notations adaptées, donner un exemple frappant, faire un dessin / schéma... Utiliser la liberté que vous donne l'épreuve pour avoir une valeur ajoutée par rapport au contenu strict du texte.

Donner des ordres de grandeurs numériques : on considère par exemple que $2^{80} \approx 10^{25}$ opérations élémentaires sont aux frontières extrèmes des possibilités de calcul actuelles, pour un budget démesuré[3].

Critiquer le modèle, le simplifier, le complexifier (pour en dire quelque chose d'intéressant). S'attendre à des questions du genre «en pratique, on fait comment ?» ou «que recommandez-vous ?». On ne vous demande pas d'être un expert de la problématique du

[2] `http://www.math.u-bordeaux.fr/~kbelabas/teach/Agreg/` contient entre autres des liens sur ces rapports, par ailleurs disponibles depuis le site officiel `http://agreg.org`.

[3] Par exemple, on peut imaginer un super calculateur de 10^8 cœurs de calcul cadencés à 10GHz ($\approx 10^{10}$ opérations par seconde ; c'est l'ordre de grandeur du record grand public, en pratique c'est 3 fois moins). Ce qui permet 10^{18} opérations par seconde ou 1 *exaflop* ; monopolisé pendant 10^7 secondes soit entre 3 et 4 mois. Le plus gros super-calculateur du monde (Frontier aux USA depuis 2022) atteint effectivement entre 1 et 2 exaflops, pour un budget de 600 millions de $ (puissance de crête $\approx$ 22MW, une petite centrale nucléaire). Le plus gros super-calculateur français (Jean Zay) approche les 126 petaflops, soit un peu plus de 10^{17} operations par seconde.

texte, juste de faire preuve de bon sens et de *proposer* des explications raisonnables. Tant pis si ce n'est pas «la bonne» explication, ni «la meilleure» méthode.

2.2. Illustration informatique.

- On ne demande pas de prodiges de programmation. Budgéter de l'ordre de 1h de travail sur machine pendant la préparation : avoir au moins un programme simple, voire une illustration simpliste, qui marche vraiment.
- Le jury peut demander à voir votre code, mais ne le fera pas systématiquement. Il peut demander une explication sur le fonctionnement d'une «boite noire» (il faut au moins avoir une idée d'une méthode simple, même si moins efficace que celle du système, qui produirait les mêmes résultats).
- Les programmes doivent être clairs et bien présentés (petites fonctions, noms de variables significatifs, commentaires utiles). Idéalement, on comprend ce qu'ils doivent faire du premier coup d'oeil. L'aspect pédagogique est important : le jury veut évaluer si vous sauriez mener à bien une séquence pédagogique dans une vraie classe !
- Idem pour la sortie des programmes : une représentation graphique est plus parlante que plusieurs écrans de chiffres.
- Pas si grave si un programme ne marche pas : mais il faut être capable de commenter / expliquer les problèmes : instabilité numérique, débordement de capacité, boucle infinie... S'il y a un problème de syntaxe, c'est de votre faute et le jury ne la corrigera normalement pas : il faut arriver à un programme qui s'exécute !
- Éventuellement, écrire un rapide test qui mette en évidence le bon (ou mauvais) comportement du programme. Du point de vue de la correction ou de la complexité algorithmique. Par exemple, si on attend une complexité quadratique, doubler la taille du problème doit en gros multiplier le temps d'exécution par 4.

2.3. Organisation.

- Présentation ordonnée, vivante : vous avez un public. On vout demande une synthèse, pas une paraphrase. Il n'est pas possible de traiter l'intégralité du texte dans le temps imparti, vous êtes libres du choix des parties traitées et du degré de détail : se mettre en valeur et mettre en valeur vos connaissances et votre savoir-faire. Pensez que vous avez 35 minutes : pas la peine de faire 3 fois la même chose ou de détailler des calculs sans intérêt particulier pendant 20 minutes. Pour les calculs, vous avez des logiciels, y compris de calcul formel : vous en servir à bon escient dans une démonstration sera très valorisé.
- Il faut annoncer un plan et s'y tenir (il est conseillé de l'écrire dans un coin du tableau en début de présentation), pas nécessairement celui du texte. Préférer des énoncés précis, surtout si le texte est vague : ne pas critiquer le texte, encore moins son auteur, faire juste apprécier vos capacités de synthèse ou d'abstraction.

- Utiliser le tableau (couleurs, dessins, écrire lisiblement), bien intégrer l'utilisation des logiciels dans le discours et le plan. L'exposé n'est pas censé tenir sur le tableau, effacer à bon escient en demandant toujours l'autorisation au jury (qui peut demander de conserver une partie pour la discussion ultérieure).
- Penser à dégager clairement un problème, et à conclure. Le problème est-il résolu de manière satisfaisante ?

2.4. Faire des maths. Essayer de démontrer les assertions du texte. Les preuves sont ébauchées quand il ne s'agit pas de résultats du programme, mais souvent trop rapides : il y a des trous.

- Essayer d'avoir au mois *une* démonstration correcte et parfaitement exposée. Contrairement aux autres épreuves d'oral, les démonstrations peuvent être heuristiques (c'est mieux si c'est complet et rigoureux, bien sûr), mais il faut signaler où se situent les trous dans votre preuve. Si le texte n'est localement pas rigoureux, il le signale normalement, mais faites le aussi et expliquer les problèmes qui se posent.
- [Option A] Penser à accompager les termes vagues «peu plausible», «probable», «efficace» d'une quantification : estimateur judicieux, test statistique pertinent, intervalle de confiance, etc.
- [Option C] Penser à accompager les termes vagues «coûteux», «difficile», «efficace», «rapide» d'un énoncé de complexité : en temps $O(n^2)$, en espace $O(n)$, en temps exponentiel, en temps polynomial, etc.

2.5. Les questions. En gros 25 minutes. Elles vont certainement partir de votre présentation et du texte, mais peuvent s'en écarter notablement. Le jury cherche à savoir ce que vous avez vraiment compris et creusera des points problématiques. Il peut tout à fait poser une question de cours sans rapport évident avec le texte. Le jury n'est pas un adversaire : il cherche le dialogue dans le but d'évaluer la solidité des connaissances et les capacités des candidats, en les mettant dans les meilleurs dispositions possibles, étant donné le contexte (stress du concours, etc.). Bref, le jury vous tendra des perches, pas des pièges.