Néphroïde de Huygens

Felix Ulmer
IRMAR, Université de Rennes 1
Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex

9 mai 2006

1 Enveloppes

Dans cet exposé, une famille F de courbes à un paramètre réel t est donnée par un polynôme $F(x, y, t) \in \mathbb{R}[x, y, t]$. Pour chaque valeur du paramètre t on obtient ainsi une courbe de la famille. Nous allons utiliser la définition naïve suivante

Définition 1 *Soit F une famille de courbes à un paramètre réel t, alors l'enveloppe de F est l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifient les deux équations*

1. $F(x, y, t) = 0$
2. $\frac{\partial}{\partial t} F(x, y, t) = 0$

pour au moins un $t \in \mathbb{R}$.

La notion intuitive de cette définition est que l'enveloppe d'une famille de courbes à un paramètre est une courbe qui est tangente à toutes les courbes de la famille (en un certain point de chaque courbe). En particulier toute courbe est l'enveloppe de ses tangentes. Pour motiver la définition on va considérer le cas très particulier où l'enveloppe $\mathcal{C}$ peut être paramétrée par t et dont les points sont donc $x = f(t), y = g(t)$. La première condition $F(f(t), g(t), t) = 0$ montre que pour un certain t les courbes F et $\mathcal{C}$ ont un point en commun. A présent on demande qu'en ce point la courbe $\mathcal{C}$ soit tangente à F. Pour cela il faut que $(f'(t), g'(t))$ soit perpendiculaire au gradient ∇F. On obtient

$$\frac{\partial}{\partial x} F\left(f(t), g(t), t\right) \cdot f'(t) + \frac{\partial}{\partial y} F\left(f(t), g(t), t\right) \cdot g'(t) \;=\; 0$$

La dérivée de $F(f(t), g(t), t)$ en t donne

$$\frac{\partial}{\partial x} F\left(f(t), g(t), t\right) \cdot f'(t) + \frac{\partial}{\partial y} F\left(f(t), g(t), t\right) \cdot g'(t) + \frac{\partial}{\partial t} F\left(f(t), g(t), t\right) \;=\; 0.$$

Ceci livre la deuxième condition de la définition.

On considère la famille de courbes à un paramètre donnée par

$$F \;=\; (x-t)^2 + \left(y - t^2\right)^2 - 4 \;=\; 0$$

C'est une famille de cercles de rayon 2 dont les centres se trouvent sur la parabole $y = x^2$. Un calcul immédiat donne l'équation de $\mathcal{C}$:

$$G \;=\; 16\,x^6 + 16\,x^4y^2 - 40\,x^4y - 32\,x^2y^3 - 191\,x^4 - 96\,x^2y^2$$
$$+16\,y^4 + 30\,x^2y - 136\,y^3 + 688\,x^2 + 225\,y^2 + 544\,y - 1156$$

Un graphe de la courbe montre un triangle surprenant autour de l'axe des y. En dessinant quelques cercles on constate que c'est bien une partie de l'enveloppe. Plus généralement on peut se poser la question de savoir quels points de la courbes sont sur l'enveloppe. La théorie des résultants permet d'étudier cette question avec cependant des précautions. On notera que les points singuliers de G, donnés par $G = \frac{\partial}{\partial x}G = \frac{\partial}{\partial y}G = 0$ ont également une signification particulière. Cette signification devient visible en représentant tous les cercles qui sont tangents à ces points.

D'autres exemples interessants sont

1. La famille obtenue en translatant la parabole standard $y = x^2$ le long de la droite $y = x$.
2. L'enveloppe obtenue par la glissade d'une échelle (i.e. une droite avec la bonne projection) le long d'un mur perpendiculaire au sol. En d'autres termes, l'enveloppe d'un segment $[A, B]$ de longueur constante dont les extrémités se déplacent sur les axes Ox et Oy. L'équation de l'enveloppe est une astroïde.
3. La podaire d'une courbe par rapport à un point P est l'enveloppe des cercles de diamètre $[PM]$ où M décrit la courbe.
4. La parabole de tir est l'enveloppe de toutes les trajectoires des tirs issus d'un point donné avec une vitesse de départ constante.

2 Lumière dans une tasse à café, caustiques

Lorsque le matin au lever du soleil la lumière arrive dans une tasse de café de bord circulaire, elle est réfléchie par le cercle. Dans la tasse apparaît alors une courbe qui correspond à l'enveloppe des rayons lumineux. Cette courbe s'appelle une néphroïde de Huygens. Afin de déterminer la courbe, on suppose que les rayons de soleil peuvent être considérés comme parallèles et on suppose que le cercle de la tasse est de rayon un. Pour un point (x, y) du cercle, un rayon horizontal (tôt le matin) réfléchi en (x, y) selon un vecteur directeur de coordonnées

$$\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \frac{2xy}{x^2 + y^2}\right)$$

ce qui livre la famille de droites

$$2xy(X - x) - (x^2 - y^2)(Y - y) = 0$$

Avec les techniques d'élimination on obtient alors l'enveloppe cherchée.

Le terme caustique (du latin causticus, calque du grec kaustikos : qui brûle) désigne d'une façon générale l'enveloppe des rayons lumineux issus d'un point à distance finie (caustique "au flambeau") ou infinie (caustique "au soleil ") après modification par un instrument optique. On considère le rayon modifié en entier, y compris la demi-droite virtuelle. Dans le plan, la caustique par réflexion (ou catacaustique) d'une courbe Γ pour une source lumineuse S est l'enveloppe des rayons issus de S après réflexion par Γ considérée comme le profil d'un miroir.

courbe réfléchissante	direction des rayons	caustique
cercle	quelconque	néphroïde
parabole	parallèle à l'axe	foyer
parabole	perpendiculaire à l'axe	cubique de Tschirnhausen

courbe réfléchissante	source lumineuse	caustique par réflexion
cercle	sur le cercle	cardioïde
cercle	quelconque	caustique de cercle
parabole	foyer de la parabole	point à l'infini

On observe par exemple ces courbes dans un récipient conique rempli de liquide et éclairé par un faisceau lumineux.

3 Lorsque l'enveloppe est une conique

Dans l'énoncé suivant on peut remplacer angle droit par angle fixe.

Proposition 2 *Soit Γ un cercle et F un point dans Γ qui n'est pas sur Γ. Par un point M du cercle on mène la droite d telle que l'angle (MF, d) soit un angle droit. Lorsque M décrit Γ, l'enveloppe de d est une conique de foyer F*

Application : si vous découpez un rond de papier, marquez un point F à l'intérieur, et formez un certain nombre de pliures en amenant un point du bord sur le point F, les pliures seront enveloppées par une ellipse.

4 Enveloppe d'une famille de surface

Par analogie nous allons utiliser la définition naïve suivante

Définition 3 *Soit $F \in \mathbb{R}[x, y, z, t]$ une famille de surfaces à un paramètre réel t, alors l'enveloppe de F est l'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qui vérifient les deux équations*

1. $F(x, y, z, t) = 0$
2. $\frac{\partial}{\partial t} F(x, y, z, t) = 0$

pour au moins un $t \in \mathbb{R}$.

Des exemples classiques sont les surfaces tubulaires. Ce sont les enveloppes d'une sphère de rayon constant centrée sur une courbe.

5 Suggestions pour le développement

1. Calculer et dessiner via l'ordinateur des enveloppes auxquelles le texte fait référence.
2. Justifier la mise en équation de la courbe de Huygens, quel peut être le paramètre ?

3. Tous les points de la courbe de Huygens (ou des courbes que vous obtenez dans les autres exemples) sont-ils des points de l'enveloppe ?
4. Calculer et discutter les différentes caustiques.
5. Justifier la proposition et trouver différents types de coniques de cette manière.
6. Quelles sont les singularités des enveloppes que vous obtenez et quelle est leur signification ?