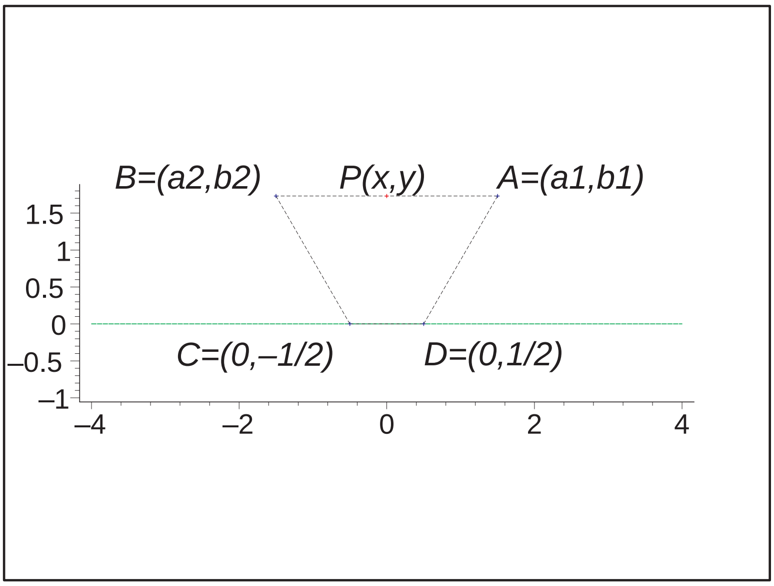
Le sytème de Watt

Felix Ulmer
IRMAR, Université de Rennes 1
Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex

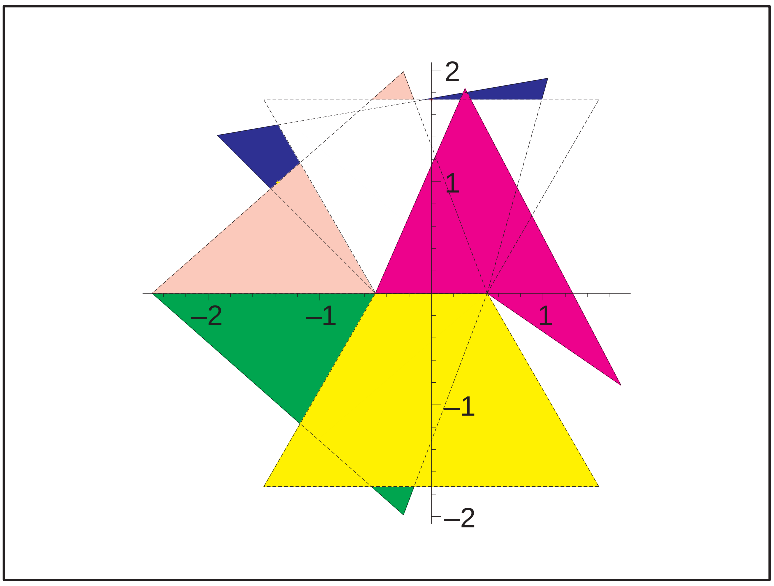
28 décembre 2005

1 Le sytème de Watt

On considère un quadrilatère articulé dont une des barres (celle du bas sur le dessin) est fixe. Les autres barres sont libres et peuvent bouger à leur guise même en se croisant, les seules contraintes étant les longueurs respectives des barres. On introduit un repère cartésien tel que la barre fixe de longueur un se trouve centrée sur l'axe Ox et on nomme les articulations A, B, C et D tels qu'indiqué sur le premier dessin. Les barres AD et BC sont de longueur deux et AB est de longueur trois.



Le deuxième dessin indique quelques positions possibles du système. On suppose qu'un piston soit fixé au point B afin de mettre le système en mouvement



de telle sorte que toutes les positions de B sur le cercle de centre C et de rayon 2 soient possibles. Le but de l'étude est la courbe $\mathcal{C}$ que parcourt le point P, milieu de la barre du haut, durant le mouvement. Les équations qui décrivent le système sont donc les cinq équations suivantes

$$eq_1 := \left(a_2 + \frac{1}{2}\right)^2 + {b_2}^2 - 4, \quad eq_2 := \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + {b_1}^2 - 4,$$

$$eq_3 := (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 - 9, \quad eq_4 := a_2 - a_1 - 2(x - a1)$$

$$eq_5 := b_2 - b_1 - 2(y - b_1)$$

2 Calcul de la courbe

Pour obtenir l'équation de la courbe $\mathcal{C}$ on élimine les variables autres que x et y dans ces équations :

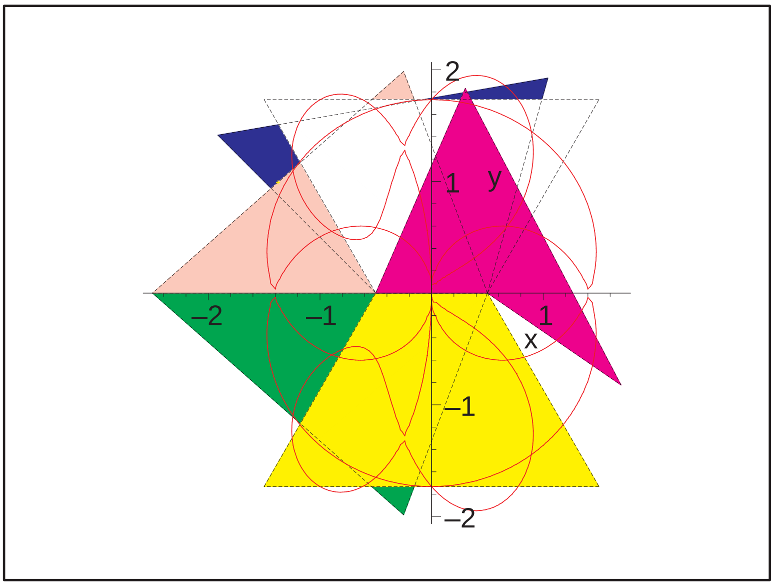
$$\begin{aligned}
res_1 &:= \text{resultant}(eq_2, eq_5, b_1) \\
res_2 &:= \text{resultant}(res_1, eq_4, a_1); \\
res_3 &:= \text{resultant}(res_2, eq_1, a_2); \\
res_4 &:= \text{resultant}(eq_5, eq_3, b_1); \\
&= {a_1}^2 - 2\,a_1 a_2 + {a_2}^2 + 4\,{b_2}^2 - 8\,b_2 y + 4\,y^2 - 9 \\
res_5 &:= \text{resultant}(res_4, eq_4, a_1); \\
&= 4\,{a_2}^2 - 8\,a_2 x + 4\,{b_2}^2 - 8\,b_2 y + 4\,y^2 + 4\,x^2 - 9
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
res_6 &:= \text{resultant}(res_5, eq_1, a_2) \\
&= \left(64\,y^2+64\,x^2+64\,x+16\right){b_2}^2+\left(-64\,yx^2-64\,y^3-64\,yx-128\,y\right)b_2 \\
&\quad +64\,y^2-176\,x^2-192\,x+16\,y^4+32\,y^2x^2+16\,x^4+32\,y^2x+32\,x^3 \\
res_7 &:= \text{resultant}(res_6, res_3, b_2);
\end{aligned}
$$

L'expression res_7 ne contient plus que les variables x, y et donne donc l'équation d'une courbe algébrique. Les propriétés du résultant montrent

Proposition 1 *La courbe $\mathcal{C}$ est une composante de la courbe donnée par l'équation res_7.*

On obtient ainsi le dessin ci dessous.



Afin de déterminer l'équation de la courbe $\mathcal{C}$ on peut factoriser l'expression $res_7 \in \mathbb{Q}[x,y]$, ce qui livre les deux facteurs irréductibles

$$y^6+\left(-3+3\,x^2\right)y^4+\left(-7\,x^2+3\,x^4\right)y^2-4\,x^4+x^6+4\,x^2$$

$$y^6+\left(4\,x+11\,x^2-3\right)y^4+\left(-51\,x^2+16\,x^3+19\,x^4-24\,x\right)y^2+4\,x^2+16\,x^4+12\,x^5+9\,x^6+8\,x^3$$

La deuxième courbe n'étant pas symétrique par rapport à l'axe des y, on en déduit que seule la première courbe décrit $\mathcal{C}$. Puisque la première courbe est irréductible dans $\mathbb{C}[x,y]$, On en déduit que l'équation de $\mathcal{C}$ est donnée par la première équation, ce qui livre la solution.

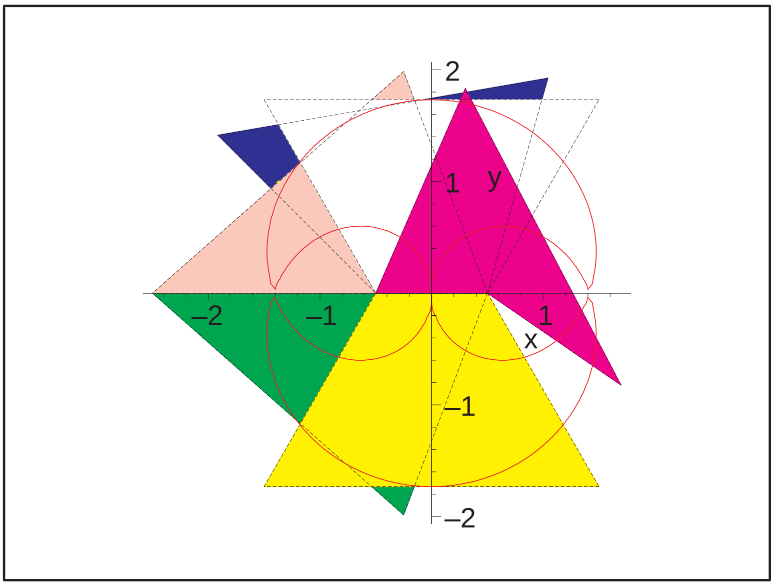
Une autre manière de retrouver l'équation de $\mathcal{C}$ sans terme parasite est de procéder aux éliminations suivantes :

$$res_{1a} := \text{resultant}(eq_2, eq_4, a_1);$$

$$
\begin{aligned}
res_{2a} &:= \text{resultant}(eq_3, eq_4, a_1);\\
res_{3a} &:= \text{resultant}(res_2a, eq_5, b_1);\\
res_{4a} &:= \text{resultant}(res_{1a}, eq_5, b_1);\\
res_{5a} &:= \text{resultant}(res_{3a}, eq_1, b_2);\\
&= \left(16 + 64\,y^2 + 64\,x^2 + 64\,x\right) {a_2}^2\\
&\quad + \left(-64\,x^3 - 48 - 96\,x - 32\,x^2 - 64\,y^2 x + 32\,y^2\right) a_2\\
&\quad + 48\,x^2 + 32\,y^2 x^2 + 36 + 16\,y^4 + 16\,x^4 - 192\,y^2\\
res_{6a} &:= \text{resultant}(res_{4a}, eq_1, b_2);\\
&= \left(16\,x^2 + 16\,y^2\right) {a_2}^2 + \left(-32\,x^3 + 16\,x^2 - 32\,y^2 x + 16\,y^2\right) a_2\\
&\quad + 16\,y^4 + 32\,y^2 x^2 + 16\,x^4 - 60\,y^2 + 4\,x^2 - 16\,y^2 x - 16\,x^3\\
res_{7a} &:= \text{resultant}(res_{5a}, res_{6a}, a_2);
\end{aligned}
$$

Ceci permet de retrouver l'équation de $\mathcal{C}$ par la commande

$$\text{primpart}(\text{gcd}(res_7, res_{7a}));$$



3 Les positions réelles

La théorie du résultant livre la proposition suivante

Proposition 2 *Pour tout point de res_7 il existe une position* complexe *du quadrilatère.*

Il est cependant important de savoir si tous les points réels de la courbe $\mathcal{C}$ correspondent effectivement à une position réelle du quadrilatère.

Proposition 3 *Tout point réel de $\mathcal{C}$ correspond à au moins une valeur réelle de a_2.*

On pourra par exemple utiliser :

$$\text{factor}(\text{discrim}(res_{6a}, a_2)) = -1024\left(y^2 + x^2\right) y^2 \left(-4 + x^2 + y^2\right)$$

De manière similaire, il est possible de montrer que tout point réel de $\mathcal{C}$ correspond à au moins une position réelle du quadrilatère. Les équations res_i ou res_{ia} permettent alors de reconstruire une position du quadrilatère pour un point (x, y) de $\mathcal{C}$. Par exemple pour $x = 1$ les intervalles d'isolation des racines réelles possibles pour y sont :

$$[\frac{4228571}{8388608}, \frac{8457143}{16777216}], [\frac{5721507}{4194304}, \frac{22886029}{16777216}], [-\frac{8457143}{16777216}, -\frac{4228571}{8388608}],$$
$$[-\frac{22886029}{16777216}, -\frac{5721507}{4194304}]$$

En particulier il y a quatre points réels de $\mathcal{C}$ avec $x = 1$.

Avec une arithmétique d'intervalles il est possible de calculer les positions des barres de manière précise. Ici on va juste se convaincre sans démonstration qu'il existe une unique position pour le point

$$\left(1, \frac{4228571}{8388608}\right) \in \mathcal{C}.$$

L'équation res_{6a} montre que les intervalles d'isolation des racines réelles a_2 sont

$$[\frac{1306419}{1048576}, \frac{20902705}{16777216}], [-\frac{4125489}{16777216}, -\frac{257843}{1048576}]$$

et l'équation res_{5a} montre que les intervalles d'isolation des racines réelles a_2 sont

$$[\frac{5073125}{16777216}, \frac{2536563}{8388608}], [\frac{1306419}{1048576}, \frac{20902705}{16777216}].$$

On va donc admettre qu'une bonne approximation de l'unique valeur de a_2 est $\frac{1306419}{1048576}$.

L'équation res_{3a} montre que les intervalles d'isolation des racines réelles b_2 sont

$$[\frac{33282513}{16777216}, \frac{16641257}{8388608}], [-\frac{8184115}{8388608}, -\frac{16368229}{16777216}]$$

et l'équation eq_1 montre que les intervalles d'isolation des racines réelles b_2 sont

$$[\frac{16368229}{16777216}, \frac{8184115}{8388608}], [-\frac{8184115}{8388608}, -\frac{16368229}{16777216}]$$

On va donc admettre qu'une bonne approximation de l'unique valeur de b_2 est $-\frac{8184115}{8388608}$. Les équations eq_4 et eq_5 donnent alors les valeurs de a_1 et de b_1. La solution ainsi construite correspond à une des solutions du dessin

4 Suggestions pour le développement

1. Justifiez les arguments concernant le résultant dans les deux approches pour le calcul de la courbe.
2. Justifier les arguments concernant le résultant dans la section 3.
3. La courbe solution coupe-t-elle l'axe des x ?
4. Au vu du résultat, les équations donnant les positions a_2, b_2, a_1, b_1 peuvent-elles être réduites en des équations de degré un en ces variables ?
5. D'autres longueurs du quadrilatères peuvent-elles poser d'autres problèmes ?