Université de Bordeaux
Mathématiques

Algèbre et calcul formel – Agrégation
2020–2021

FEUILLE D'EXERCICES n° 11

Résultant

Exercice 1 – Pour calculer le résultant de P et Q, on utilise la commande `P.resultant(Q)`, ou bien `P.resultant(Q,x)` s'il faut préciser la variable.

1) Après avoir défini `Qx`= $\mathbb{Q}[x]$, essayer les commandes suivantes.

```
P = x^3-1
Q = x^2-2*x
P.resultant(Q)
R = x^2-1
P.resultant(R)
```

2) Pour les polynômes à plusieurs variables, il y a plusieurs manières de faire. On peut construire $\mathbb{Q}[x, y]$:

```
Qxy.<x,y> = PolynomialRing(QQ)
P = x^3-y^2
Q = x^2+y^2-2
R = P.resultant(Q); R
```

Le résultant est calculé suivant la première variable `x`. Pour le calculer suivant `y`, il faut le préciser :

```
Ry = P.resultant(Q,y); Ry
```

Essayer les commandes

```
R(1)
R(1,1)
parent(R)
```

`R` est encore un polynôme de $\mathbb{Q}[x, y]$.

3) On peut aussi construire $\mathbb{Q}[x][y]$:

```
Qx2y.<y> = PolynomialRing(Qx)
P = Qx2y(P);
Q = Qx2y(Q)
R = P.resultant(Q)
parent(R)
R(1)
```

4) Dessiner sur un même graphe, les courbes d'équations $P = 0$ et $Q = 0$, ainsi que les points d'intersection des deux courbes.

Exercice 2 – Soient $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $3x + 4y = 0$. Utiliser un résultant pour calculer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. On calculera le résultant à la main, puis en utilisant sage. Afficher $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sur un même graphique, ainsi que leurs points d'intersection.

Exercice 3 – Dans $\mathbb{C}[x, y]$, on considère les polynômes

$$f = (y^2 + 6)(x - 1) - y(x^2 + 1), \quad g(x, y) = f(y, x).$$

Soient X et Y les courbes de $\mathbb{C}^2$ d'équations respectives $f(x, y) = 0$ et $g(x, y) = 0$. Afficher les parties réelles des deux courbes sur un même graphique (pour $(x, y) \in [0, 5]^2$ par exemple) et déterminer $X \cap Y$.

On fera d'abord le calcul en utilisant le résultant, puis en utilisant la commande `solve`.

Exercice 4 –

1) Soient K un corps et soient a et b deux éléments d'une extension algébrique L de K. Soient m_a et $m_b \in K[x]$ les polynômes minimaux respectifs de a et b sur K. Montrer que le polynôme minimal de $a + b$ est un facteur de $\mathrm{Res}_y(m_a(x - y), m_b(y))$.

2) Calculer de deux manières différentes le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ de $\sqrt{3} + i$.

3) Dans $\mathbb{C}$, soient α une racine de $x^3 + x + 1$ et μ une racine primitive 8-ème de l'unité. Calculer le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ de $\alpha + \mu$.

Exercice 5 –

1) Soient K un corps et soit a un élément d'une extension algébrique L de K. Soit $m \in K[x]$ le polynôme minimal de a sur K. Soit $f \in K[x]$ Montrer que le polynôme minimal de $f(a)$ est un facteur de $\mathrm{Res}_y(x - f(y), m(y))$.

2) Soit a une racine primitive huitième de l'unité dans $\mathbb{C}$. Calculer le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ de $a^3 - a + 1$, puis de $a^2 + a + 1$.

Exercice 6 – Soit $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z - 1$. Résoudre le système $f(x, y, z) = f(y, z, x) = f(z, x, y) = 0$ (on cherchera des solutions approchées). On fera le calcul en utilisant le résultant, puis en utilisant la commande `solve`.