

FEUILLE D'EXERCICES n° 12
Logarithme discret

Soit G un groupe cyclique et soit g un générateur de G . Soit $a \in G$. Le problème est de trouver un entier k tel que $a = g^k$. On va s'intéresser au cas où $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, où p désigne un nombre premier.

La commande existe dans **sage** : c'est **log**, appliqué à un élément de G .

À titre d'exercice, on va quand même programmer un algorithme pour ce problème, de complexité algébrique $O(\sqrt{p} \log p)$ (la complexité de l'algorithme naïf est en $O(p)$) : c'est l'objet de l'exercice 2. L'exercice 1 consiste à retrouver certaines commandes sage en rapport avec le problème.

Exercice 1 – [COMMANDES SAGE]

Cet exercice consiste à trouver une commande sage pour chacune des questions.

- 1) Définir $A = \mathbb{Z}/2017\mathbb{Z}$. Soit G son groupe multiplicatif. Comment trouver un générateur de G par une commande sage ? Soit g un tel générateur. En utilisant **log**, trouver k tel que $456 = g^k$.
- 2) Comment trouver l'ordre de 76 dans G ?
- 3) Soit L une liste d'éléments de G . Comment décider si un élément q est ou non dans L ? Si oui, comment déterminer l'indice correspondant ?

Exercice 2 – [ALGORITHME : PAS DE BÉBÉ, PAS DE GÉANT]

Soit G un groupe cyclique de générateur g , et soit a un élément de G . On décrit un algorithme pour trouver k tel que $ag^k = 1$.

Soit N l'ordre de G et $b = \lceil \sqrt{N-1} \rceil$. Alors $b^2 \geq k$. Soit $L = [a, ag, \dots, ag^{b-1}]$. On trie la liste L : cela va permettre des recherches dans L en $O(\log b)$ comparaisons. On calcule ensuite $c = g^{-b}$. Pour $q \in \{0, 1, \dots, b\}$, on calcule c^q et on cherche si cet élément se trouve dans la liste L . Si c'est le cas, on a trouvé $r \in [[0, b-1]]$ tel que $c^q = ag^r$, c'est-à-dire tel que $ag^{bq+r} = 1$.

Programmer cet algorithme dans le cas où $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.