(*public 2010*)

Résumé : Le texte introduit et étudie la moyenne arithmético-géométrique. On montre comment elle intervient dans le calcul des intégrales elliptiques. Ces dernières permettent, en particulier, d'exprimer la période d'oscillation d'un pendule.

Mots clefs : méthodes usuelles de calcul d'intégrales, polynômes

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

1. Introduction

1.1. *La moyenne arithmético-géométrique de deux nombres réels* > 0

Soient $a > b$ deux nombres réels > 0, et $(a_n), (b_n)$ les deux suites définies par $a_0 = a, b_0 = b$, et

$$a_{n+1} = \tfrac{a_n+b_n}{2}$$
$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

En remarquant que $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(a_n-b_n)^2}{2(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n})^2}$, on montre aisément que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite > 0, que l'on note ici $M(a,b)$, et qui s'appelle la *moyenne arithmético-géométrique* de a et b.

La convergence est quadratique, en ce sens qu'il existe une constante D, ne dépendant que de a et b, telle que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$a_{n+1} - b_{n+1} \leq D(a_n - b_n)^2.$$

Si par exemple $D = 1$, cela signifie grosso modo que le nombre de chiffres exacts après la virgule est au pire multiplié par deux à chaque pas : si on a 2 chiffres exacts pour $n = 1$, on en a au moins 4 au pas 2, 8 au pas 3, ..., 128 au pas 7, ..., et plus de mille chiffres exacts en 10 itérations !

On pourra, à l'aide de n'importe quel logiciel de calcul formel, se convaincre de la rapidité de cette convergence sur quelques exemples, par exemple en calculant $M(\sqrt{2},1)$. *Gauss, qui avait découvert cette moyenne à* 14 *ans, (indépendamment avec Lagrange) avait justement calculé* $M(\sqrt{2},1)$ *avec plusieurs dizaines de décimales.*

1.2. *Les intégrales elliptiques*

1) On sait calculer sans difficulté les intégrales de la forme

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}},$$

et plus généralement des intégrales de fractions rationnelles en x et $\sqrt{p(x)}$, où $p(x) = ax^2 + bx + c$ est un polynôme du second degré sans racine double, et positif sur l'intervalle $[x_0, x_1]$. Considérons en effet la conique C d'équation $y^2 = p(x)$: si P_0 est l'un des deux points de C d'abscisse x_0, les droites D_t passant par P_0 et de pente t coupent en général C en un autre point P_t de coordonnées $(x(t), y(t))$, où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fractions rationnelles de t, d'où une paramétrisation $(x(t), y(t))$ de C. On est alors ramené à intégrer une fraction rationnelle.

2) Par contre, lorsque p est un polynôme de degré 3 sans racine double, on ne peut pas paramétrer la courbe $y^2 = p(x)$ par des fractions rationnelles, et ramener ainsi $\int \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$ à une intégrale de fractions rationnelles. Ce résultat est démontré dans le dernier paragraphe, en utilisant les techniques du paragraphe 2.

Ce type d'intégrales, et plus généralement les intégrales des fractions rationnelles en x et $\sqrt{p}$, où p est de degré 3 sans racine multiple, par exemple $\int \sqrt{p(x)}dx$, s'appellent des intégrales *elliptiques*.

Nous supposons ici que les 3 racines de p sont réelles. On peut alors, par un changement de variables $x \mapsto ux + v$, se ramener au cas où $p(x) = x(x + a^2)(x + b^2)$.

Remarquons ensuite que, par le changement de variables $x = -a^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\theta$, les intégrales elliptiques s'écrivent comme intégrales de fractions rationnelles en $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$. En particulier,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+a^2)(x+b^2)}} = 2\int \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}.$$

C'est sous cette forme trigonométrique qu'apparaissent naturellement les intégrales elliptiques dans plusieurs problèmes, par exemple

1) **Périmètre d'une ellipse**
Soit l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Son périmètre vaut $P = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}d\theta$. (c'est peut-être de là que vient le nom d'intégrale elliptique.)

2) **Période d'oscillation d'un pendule** de masse m attaché au bout d'un fil inextensible de longueur l, en négligeant les frottements et la masse du fil.

Soit $\delta < \pi/2$ l'amplitude maximale et $\theta(t)$ l'angle du fil à l'instant t. La conservation de l'énergie donne la relation

$$\frac{1}{2}m(l\theta')^2 = mgl(\cos\theta - \cos\delta) = 2mgl(\sin^2\frac{\delta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}).$$

Donc le temps d'atteinte de l'angle φ est

$$t = \int_0^{\varphi} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\delta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}},$$

et donc la période T vaut

$$T = 4\int_0^{\delta} dt = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\delta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\delta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

On fait le changement de variables

$$\sin\phi = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}},$$

d'où

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\delta}{2}\sin^2\phi}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}I(1, \cos\frac{\delta}{2}),$$

où l'on a posé

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+a^2)(x+b^2)}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}.$$

Dans le paragraphe suivant, nous montrons comment la moyenne arithmético-géométrique permet de calculer $I(a,b)$ par un algorithme quadratiquement convergent.

2. Calcul de $I(a,b)$ à l'aide de la moyenne arithmético-géométrique

Soit $a > b > 0$, et $(a_n), (b_n)$ les suites définies dans le paragraphe 1.

Par le changement de variables $x_{n-1} = \frac{x_n(x_n+b_n^2)}{x_n+a_n^2}$, on obtient, comme on peut le vérifier par exemple à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

$$\begin{cases} x_{n-1} + a_{n-1}^2 = \frac{(x_n+a_n a_{n-1})^2}{x_n+a_n^2} \\ x_{n-1} + b_{n-1}^2 = \frac{(x_n+a_n b_{n-1})^2}{x_n+a_n^2} \end{cases},$$

et donc $I(a_{n-1}, b_{n-1}) = I(a_n, b_n)$.

Par suite, $I(a,b) = \ldots = I(a_n,b_n) = \ldots = I(M(a,b), M(a,b)) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+M(a,b)^2)}$. En posant $x = M^2(a,b)\mathrm{tg}^2 u$, on trouve finalement

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+a^2)(x+b^2)}} = \frac{\pi}{M(a,b)}.$$

(*On pourra comparer sur ordinateur la rapidité de calcul de $I(a,b)$ par cette formule et par les méthodes classiques d'intégration.*)

Dans le cas où l'on veut calculer

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{dx}{\sqrt{x(x+a^2)(x+b^2)}},$$

où α_0 est un nombre réel > 0, on peut employer le même changement de variables : Soit (α_n) la suite de nombres réels > 0 définie par $\alpha_{n-1} = \frac{\alpha_n(\alpha_n+b_n^2)}{\alpha_n+a_n^2}$. Le calcul des α_n revient à calculer des racines carrées, ce que l'on peut faire par la méthode de Newton, qui est un algorithme quadratiquement convergent.

Cette suite converge vers α_∞, et l'on a

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{dx}{\sqrt{x(x+a^2)(x+b^2)}} = \int_0^{\alpha_\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+M(a,b)^2)} = \frac{2}{M}\mathrm{Arctg}\sqrt{\frac{\alpha_\infty}{M^2}}.$$

Il s'agit d'un algorithme quadratiquement convergent, au calcul d'un Arctg près.

On pourra ici encore comparer la rapidité du calcul de l'intégrale lorsqu'elle est calculée par cette méthode ou par les méthodes usuelles d'intégration. On pourra également prouver les calculs précédents à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

3. Paramétrisation des courbes $y^2 = p(x)$

Dans ce paragraphe, nous montrons qu'il n'existe pas de polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$ de degré 3 sans racine multiple tel que la courbe C d'équation $y^2 = p(x)$ admette une paramétrisation rationnelle (c'est-à-dire un couple de fractions rationnelles non constantes U et V dans $\mathbb{C}(X)$ tel que $V^2 = p(U)$).

Supposons qu'il existe un tel polynôme p, et choisissons-le tel que le degré de la fraction rationnelle U comme ci-dessus soit minimal [1] (relativement à tous les polynômes p de degré 3 sans racine multiple pour lesquels il existe une paramétrisation rationnelle.)

On peut comme précédemment supposer que p est de la forme $p(X) = X(X+a^2)(X+b^2)$, avec $a,b \in \mathbb{C}^*$ et $a^2 \neq b^2$. Les fractions rationnelles U et V s'écrivent $U = P/R$ et $V = Q/S$, avec P et R (resp. Q et S) premiers entre eux, et où l'on peut supposer R et S unitaires. On a donc $Q^2R^3 = P(P+a^2R)(P+b^2R)S^2$. Comme P et R sont premiers entre eux, R^3 divise S^2, et comme Q et S le sont aussi, S^2 divise R^3. Donc $S^2 = R^3$, et il existe un polynôme unitaire T tel que $S = T^3$ et $R = T^2$. On a donc

$$Q^2 = P(P+a^2T^2)(P+b^2T^2)$$

et, comme les polynômes $P, P+a^2T^2$ et $P+b^2T^2$ sont premiers deux-à-deux, il existe trois polynômes R_1, R_2 et R_3 tels que

$$P = R_1^2, P+a^2T^2 = R_2^2, P+b^2T^2 = R_3^2.$$

[1] Le degré d'une fraction rationnelle est le maximum des degrés de son numérateur et de son dénominateur.

Soit $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et $b_1 = \sqrt{ab}$, où l'on prend l'une des deux racines carrées complexes de ab.

Soit C_1 la courbe d'équation $y_1^2 = x_1(x_1 + a_1^2)(x_1 + b_1^2)$. D'après le paragraphe précédent, le changement de variables

$$\begin{cases} x = \frac{x_1(x_1+b_1^2)}{x_1+a_1^2} \\ y = y_1 \frac{(x_1+aa_1)(x_1+ba_1)}{(x_1+a_1^2)^2} \end{cases}$$

associe à tout point (x_1, y_1) de C_1 un point (x,y) de C.

De plus, on a la formule

$$\frac{x+a^2}{x+b^2} = \left(\frac{x_1+aa_1}{x_1+ba_1}\right)^2 \qquad (1)$$

donc, si $x = U(X) = P(X)/T^2(X) = R_1^2(X)/T^2(X)$, on a

$$\frac{x_1+aa_1}{x_1+ba_1} = \frac{R_2}{R_3}.$$

Par suite, on obtient une paramétrisation rationnelle de C_1 par

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \frac{bR_2 - aR_3}{R_3 - R_2} \\ y_1 = \frac{R_1(R_2+R_3)^2}{4T^3} \end{cases}$$

Par ailleurs, il est clair d'après la formule 1) ci-dessus que le degré $\deg x_1$ de la fraction rationnelle x_1 ainsi définie est égal à $\frac{1}{2}\deg U(X)$, ce qui contredit l'hypothèse de minimalité de U, et termine la démonstration.

On pourra s'aider d'un logiciel de calcul formel pour mener à bien les calculs de cette section.

Suggestions pour le développement

► *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

– Plusieurs suggestions de développement sont données tout au long du texte, en italique.