(*C01-public*)

Résumé : On étudie, au moyen de techniques de calcul formel, des solutions particulières d'un modèle proie-prédateur décrit par un système d'équations différentielles.

Mots clefs : polynômes à plusieurs variables, algèbre linéaire

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury apprécie qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière les connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

1. Le problème

Vito Volterra (1860-1940) s'est intéressé à la modélisation mathématique de phénomènes biologiques après la première guerre mondiale. Celle-ci avait considérablement réduit la pêche en mer Adriatique et la proportion relative des prédateurs par rapport aux proies avait augmenté. Volterra proposa un modèle de prédation rendant compte de cette observation, menant au système dit de Lotka-Volterra (Lotka ayant mené indépendamment une étude similaire).

Si l'on considère un ensemble de n espèces, leur évolution peut être modélisée par le système différentiel

$$X' = \operatorname{diag}(X)\,(\mathscr{A}X + \mathscr{B}) \tag{1}$$

où ${}^tX = (x_1, \ldots, x_n)$, $\operatorname{diag}(X)$ est la matrice diagonale de diagonale X, x_i représente le nombre d'individus pour l'espèce i ; $\mathscr{B} = {}^t(b_1, \ldots b_n)$ représente la croissance individuelle (quand $b_i > 0$, l'espèce x_i augmente ; quand $b_i < 0$, elle diminue). Le terme $\operatorname{diag}(X)\mathscr{A}X$ représente l'interaction quadratique entre les espèces. Si l'espèce i est le prédateur de l'espèce j, alors l'influence de l'espèce i sur l'espèce j se lit dans le terme quadratique $a_{i,j}\,x_i\,x_j$ où $\mathscr{A} = (a_{i,j})$ est une matrice carrée $n \times n$.

Dans la suite on considère trois espèces en interaction. On suppose de plus

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & C & 1 \\ 1 & 0 & A \\ B & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathscr{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } A, B \text{ et } C \text{ sont dans } \mathbb{R}^*. \tag{2}$$

Le système (1) s'écrit alors

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \dot{x} = x\,(C\,y + z) =: V_x \\ \dot{y} = y\,(A\,z + x) =: V_y \\ \dot{z} = z\,(B\,x + y) =: V_z \end{cases}$$

Pour résoudre un tel système, une première approche consiste à étudier le comportement asymptotique des solutions mais c'est un problème difficile. On peut également explorer la solution générale par l'intermédiaire de schémas numériques mais ceci n'est possible que si l'on affecte des valeurs particulières aux paramètres A, B et C. Dans cette situation, il est plus intéressant de connaître les « constantes du mouvement » qui contiennent les trajectoires et permettent de localiser les solutions.

Une *intégrale première* pour ce système est une fonction f de x, y et z, non constante qui vérifie

$$\text{(4)} \qquad V_x\,\frac{\partial f}{\partial x} + V_y\,\frac{\partial f}{\partial y} + V_z\,\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Géométriquement parlant, les solutions du système sont enfermées sur des surfaces de niveau f = constante. On dira d'une intégrale première qu'elle est *polynomiale* si c'est une intégrale première qui est une fonction polynomiale des variables x, y et z.

Le but de ce texte est d'établir des conditions nécessaires sur A, B, C pour que le système possède une intégrale première polynomiale en x, y et z. Dans le cas particulier des intégrales premières polynomiales de degré 1 et 2, on établira des conditions nécessaires et suffisantes et on calculera exactement ces intégrales premières. Ce texte fait appel à des outils d'algèbre linéaire et à des manipulations sur les polynômes homogènes en plusieurs variables.

2. Intégrales premières polynomiales de degré 1

On étudie tout d'abord le cas particulier des intégrales premières polynomiales de degré 1, cas que l'on exclura par la suite. Soit donc

$$f = \lambda\,x + \mu\,y + \nu\,z$$

une intégrale première polynomiale de degré 1, où λ, μ et ν sont des coefficients dans $\mathbb{C}$ non tous nuls. On omet ici le terme constant de f car toute intégrale première est définie à une constante additive près.

La relation (4) fournit un système linéaire homogène de 3 équations à 3 inconnues dépendant des trois paramètres A, B et C. Une condition nécessaire et suffisante pour que ce système ait une solution non nulle est :

$$A\,B\,C + 1 = 0$$

et l'intégrale première recherchée est, à une constante multiplicative près,

$$I_1 = B\,x - B\,C\,y - z.$$

Remarque 1. *Si $ABC+1=0$, pour tout entier naturel n non nul, I_1^n est aussi une intégrale première polynomiale, de degré n.*

3. Intégrales premières polynomiales homogènes

Dans cette section, on remarque que l'on peut se restreindre à la recherche d'intégrales premières polynomiales *homogènes.*

Définition 2. *Un polynôme f de $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ est* homogène de degré k *si tout terme apparaissant dans f est de degré k.*

Tout polynôme f de $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ peut s'écrire de manière unique comme somme de polynômes homogènes. On notera f_k la k-ième composante homogène de f, c'est-à-dire la somme de tous ses termes de degré k. Voici quelques propriétés des polynômes homogènes :

Proposition 3. *Le produit de deux polynômes homogènes de degrés k_1 et k_2 est un polynôme homogène de degré k_1+k_2. La somme de deux polynômes homogènes de même degré k est un polynôme homogène de degré k, ou bien le polynôme nul. La dérivée partielle d'un polynôme homogène de degré k par rapport à l'une des variables est un polynôme homogène de degré $k-1$. Un polynôme est nul si et seulement si toutes ses composantes homogènes sont nulles.*

La proposition suivante nous permet de nous ramener à la recherche d'intégrales premières polynomiales homogènes.

Proposition 4. *Soit f dans $\mathbb{C}[x,y,z]$. Le polynôme f est une intégrale première polynomiale pour le système de Lotka-Volterra* (3) *si et seulement si toutes ses composantes homogènes sont des intégrales premières.*

Etudions le cas particulier des intégrales premières homogènes de degré 2. On suppose que $ABC+1$ est non nul de sorte à rechercher de « vraies » intégrales premières de degré 2 (qui ne soient pas le carré d'intégrales premières de degré 1). Soit

$$f = a_1\,x^2 + a_2\,y^2 + a_3\,z^2 + a_4\,x\,y + a_5\,x\,z + a_6\,y\,z$$

une intégrale première homogène de degré 2. La relation (4) fournit un système linéaire homogène de 7 équations à 6 inconnues. Une condition nécessaire et suffisante pour que ce système ait une solution non nulle est que la matrice qui lui est associée soit de rang $\leqslant 5$. On trouve ainsi la condition nécessaire et suffisante suivante :

$$A=-1-\frac{1}{B},\quad B=-1-\frac{1}{C},\quad C=-1-\frac{1}{A},\quad ABC=1.$$

L'intégrale première homogène de degré 2 correspondante est, à une constante multiplicative près,

$$f = I_2 = (C+1)^2\,x^2 + C^2\,(C+1)^2\,y^2 + C^2\,z^2 - 2\,C\,(C+1)^2\,x\,y + 2\,(C+1)\,C\,x\,z + 2\,(C+1)\,C^2\,y\,z.$$

Dans la suite, on établit des conditions *nécessaires* d'existence d'intégrales premières homogènes de degré m portant sur le déterminant d'une matrice carrée.

4. Quelques conditions nécessaires sur A, B et C pour l'existence d'une intégrale première polynomiale de degré > 1

On suppose que $A\,B\,C + 1 \neq 0$, donc il n'existe pas d'intégrales premières de degré 1.

4.1. *Construction d'un système linéaire carré*

Soit f une intégrale première polynomiale homogène de degré $m > 1$. On supposera qu'elle ne s'annule ni en $x = 0$, ni en $y = 0$, ni en $z = 0$. On pourrait montrer que cette condition supplémentaire est en fait toujours vérifiée mais nous laisserons de côté ce point.

L'intégrale première f peut encore s'écrire

$$f = P_0(y,z) + x\,P_1(y,z) + x^2\,p(x,y,z), \tag{5}$$

$$\text{où}\quad P_0(y,z) = \sum_{k=0}^{m} a_k\,y^{m-k}\,z^k \quad \text{est un polynôme homogène } \textit{non nul} \text{ de degré } m,$$

$$P_1(y,z) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k\,y^{m-1-k}\,z^k \quad \text{est un polynôme homogène de degré} \leq m-1,$$

et p est un polynôme homogène de degré $\leq m-2$ en x, y et z. D'après (4),

$$x\,(C\,y+z)\left(P_1 + 2\,x\,p + x^2\,\frac{\partial p}{\partial x}\right) + y\,(A\,z+x)\left(\frac{\partial P_0}{\partial y} + x\,\frac{\partial P_1}{\partial y} + x^2\,\frac{\partial p}{\partial y}\right) + z\,(B\,x+y)\left(\frac{\partial P_0}{\partial z} + x\,\frac{\partial P_1}{\partial z} + x^2\,\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 0.$$

On regroupe les termes suivant les puissances de x. Ils doivent tous s'annuler, en particulier le terme de degré 0 en x :

$$\sum_{k=0}^{m-1} \big((m-k)\,A\,a_k + (k+1)\,a_{k+1}\big)\,y^{m-k}\,z^{k+1} = 0, \tag{6}$$

et le terme de degré 1 en x :

$$\sum_{k=1}^{m-1} \Big\{\big((C+k)\,b_k + (1 + A\,(m-k))\,b_{k-1} + (B+m-k)\,a_k\big)\,y^{m-k}\,z^k\Big\} + (C\,b_0 + m\,a_0)\,y^m + (b_{m-1} + B\,a_m)\,z^m = 0. \tag{7}$$

Dans les égalités (6) et (7), les coefficients des puissances de y et z doivent aussi s'annuler. On obtient donc le système linéaire :

$$\mathscr{M}\,\mathscr{Y} = 0$$

où $\mathscr{Y}$ est le vecteur colonne $\mathscr{Y} = {}^t(b_{m-1},\dots,b_0,a_m,\dots,a_0)$, $\mathscr{M}$ est une matrice carrée par blocs

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix},$$

avec **A** matrice rectangulaire $m \times (m+1)$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m & A & 0 & & 0 \\ 0 & m-1 & 2A & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & mA \end{pmatrix},$$

B matrice diagonale $(m+1) \times (m+1)$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} Bm & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1+B(m-1) & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & m-1+B & 0 \\ 0 & & & 0 & m \end{pmatrix},$$

et **C** matrice rectangulaire $(m+1) \times m$:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ C+m-1 & 1+A & 0 & & 0 \\ 0 & C+m-2 & 1+2A & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & C+1 & 1+(m-1)A \\ 0 & & & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Une condition nécessaire pour l'existence d'une intégrale polynomiale de degré m est l'existence d'une solution non nulle au système linéaire $\mathscr{M}\mathscr{Y} = 0$, et donc une condition nécessaire est que le déterminant D_m de $\mathscr{M}$ s'annule.

4.2. *Déterminants*

Par un raisonnement combinatoire, on obtient le lemme suivant que l'on admettra

Lemme 5 (admis)**.** *Le déterminant de la matrice* $\mathscr{M}$ *est*

$$D_m = m!\, m\, A^{m-1}(ABC+1) \prod_{i=1}^{m-1} \left(\frac{1}{A} + C + i \right). \tag{8}$$

D'où on tire finalement :

Proposition 6. *Une condition nécessaire pour que le système (3) ait une intégrale première polynomiale homogène de degré m est qu'il existe des entiers* k_1, k_2 *et* k_3 *dans* $[1, m[$ *tels que :*

$$C = -k_1 - \frac{1}{A}, \quad A = -k_2 - \frac{1}{B}, \quad B = -k_3 - \frac{1}{C}.$$

Démonstration. La première condition suit directement du Lemme. En écrivant f sous la forme $f = Q_0(x,z) + yQ_1(x,z) + y^2 q(x,y,z)$, puis sous la forme $f = R_0(x,y) + zR_1(x,y) + z^2 r(x,y,z)$, on obtient les deux autres conditions. □

Pour $m = 2$, on retrouve donc les conditions nécessaires et suffisantes de la section 3, qui correspondent au cas $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. On peut vérifier que pour les autres valeurs possibles de k_1, k_2, k_3, il n'existe pas de valeurs réelles de A, B, C vérifiant les conditions de la proposition.

Suggestions et pistes de réflexion

► *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos illustrations informatiques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*

- Expliquez en quoi le système de Lotka-Volterra modélise l'évolution au cours du temps d'un système "proie-prédateur". Quel sens donner aux signes de A, B, C ? Que signifierait $A = 0$ par exemple ?
- Expliquez l'intérêt d'obtenir une intégrale première (par exemple pour des tracés). Pourquoi cherche-t-on des solutions polynomiales ?
- Vous pouvez développer l'un des points mathématiques donnés sans démonstration (remarque 1, propositions 3 et 4, formule (5)).
- Justifiez le système linéaire $\mathscr{M}\mathscr{Y} = 0$. Quel est l'intérêt de n'annuler que les termes de degré 0 et 1 en x ?
- A l'aide d'un logiciel de calcul formel de votre choix, vous pourrez calculer I_1 et I_2 et justifier les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'intégrales premières de degré 1 et 2 (section 2 et 3).
- Vérifier que $(k_1, k_2, k_3) = (1, 1, 1)$ est le seul triplet possible pour $m = 2$.