(*C01-public*)

Résumé : Ce texte étudie la détermination de cylindres passant par 4 et 5 points dans l'espace.

Mots clefs : géométrie, polynômes à plusieurs variables, résultant.

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury apprécie qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière les connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

1. Introduction

Les scanners permettent de générer un fichier de points 3D à partir d'un ou plusieurs objets. L'amélioration rapide de leur technologie, notamment en termes de précision, de rapidité, de portabilité et de coût, fait qu'ils sont de plus en plus utilisés pour des applications variées telles que l'acquisition ou la reconstruction de formes sur ordinateur, ou bien encore la métrologie. Dans ce texte, on s'intéresse à la détermination de cylindres qui passent par des points donnés, typiquement un sous-ensemble de points 3D obtenus à l'aide d'un scanner. Plus précisément, nous allons voir que par cinq points de l'espace en position suffisamment générale, il ne passe qu'un nombre fini de cylindres que l'on peut déterminer explicitement par un processus d'élimination. Une application simple de ce résultat est par exemple la détermination du rayon d'un objet cylindrique qui n'est que partiellement accessible, ou bien dont on voudrait vérifier le bon usinage avec une grande précision. Les parties 3 et 4 de ce texte sont indépendantes.

2. Cylindres passant par quatre points

Étant donnés 3 points p_1, p_2, p_3 dans l'espace affine réel de dimension 3 et un vecteur non nul $\mathbf{t}$, il existe presque toujours un cylindre de direction $\mathbf{t}$ passant par ces points. En effet, les projetés orthogonaux de ces 3 points sur le plan vectoriel orthogonal à $\mathbf{t}$ sont soit sur un même cercle, qui définit alors la base d'un tel cylindre, soit distincts et alignés. Mais cette dernière situation ne se produit que lorsque les trois points p_1, p_2, p_3 sont distincts et que le vecteur $\mathbf{t}$ est parallèle à un plan passant par p_1, p_2 et p_3. Dans la suite de cette partie, nous nous intéressons donc à la détermination des cylindres passant par quatre points.

Soient quatre points p_1, p_2, p_3, p_4 deux à deux distincts et $\mathbf{t} = (l, m, n)$ un vecteur non nul. On cherche à déterminer s'il existe un cylindre de direction $\mathbf{t}$ passant par p_1, p_2, p_3, p_4. Sans perdre en généralité, nous pouvons supposer que

$$p_1 = (0,0,0),\ p_2 = (x_2, 0, 0),\ p_3 = (x_3, y_3, 0),\ p_4 = (x_4, y_4, z_4) \tag{1}$$

où (x, y, z) sont les coordonnées d'un point de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique ; on note $(u \mid v)$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v, et $\|u\|$ la norme de u. En outre on identifie tout point p de l'espace affine $\mathbb{R}^3$ au vecteur $\overrightarrow{Op}$, où O désigne l'origine.

Soit Π le plan vectoriel orthogonal au vecteur $\mathbf{t}$ et soit (X, Y, Z) un nouveau système de coordonnées dont les deux premiers axes engendrent Π et le troisième axe est de direction $\mathbf{t}$. En supposant que $(m, n) \neq (0, 0)$, on peut faire en sorte que les nouvelles coordonnées (X, Y, Z) d'un point soient données en fonction de celles dans la base canonique par la matrice orthogonale

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{\|\mathbf{t}\|} & -\frac{lm}{\|\mathbf{t}\|\sqrt{m^2+n^2}} & -\frac{ln}{\|\mathbf{t}\|\sqrt{m^2+n^2}} \\ 0 & \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} & -\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} \\ \frac{l}{\|\mathbf{t}\|} & \frac{m}{\|\mathbf{t}\|} & \frac{n}{\|\mathbf{t}\|} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Notons (X_i, Y_i, Z_i) les coordonnées du point p_i dans le système (X, Y, Z). Le projeté orthogonal q_i de p_i sur Π, exprimé dans (X, Y, Z) en fonction des coordonnées (x_i, y_i, z_i) du point p_i dans le système (x, y, z), est donné par

$$\left(x_i \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{\|\mathbf{t}\|} - \frac{lm}{\|\mathbf{t}\|\sqrt{m^2+n^2}} y_i - \frac{ln}{\|\mathbf{t}\|\sqrt{m^2+n^2}} z_i, \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} y_i - \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} z_i, 0 \right). \tag{3}$$

Les points p_1, p_2, p_3, p_4 appartiennent à un même cylindre de direction $\mathbf{t}$ si et seulement si les points q_1, q_2, q_3, q_4 sont cocycliques (dans Π). En supposant que les points p_1, p_2, p_3, p_4 ne sont pas coplanaires, cette dernière condition se traduit par l'égalité

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ X_1^2 + Y_1^2 & X_2^2 + Y_2^2 & X_3^2 + Y_3^2 & X_4^2 + Y_4^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Les coordonnées de q_1 et q_2 sont $X_1 = Y_1 = 0$ et $X_2 = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{\|t\|} x_2,\ Y_2 = 0$. De plus, pour $i = 3, 4$

$$X_i^2 + Y_i^2 = \|q_i\|^2 = \|p_i\|^2 - \frac{(\mathbf{t} \mid p_i)^2}{\|\mathbf{t}\|^2}.$$

De tout cela, on déduit que les points p_1, p_2, p_3, p_4, supposés non coplanaires, appartiennent à un même cylindre de direction $\mathbf{t}$ si et seulement si $C_{p_1,p_2,p_3,p_4}(l,m,n) = 0$ où

(5) $C_{p_1,p_2,p_3,p_4}(l,m,n) :=$

$$x_2^2(m^2+n^2)\begin{vmatrix} l & x_3 & x_4 \\ m & y_3 & y_4 \\ n & 0 & z_4 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} m & y_3 & y_4 \\ n & 0 & z_4 \\ 0 & \|\mathbf{t}\|^2\|p_3\|^2-(t.p_3)^2 & \|\mathbf{t}\|^2\|p_4\|^2-(t.p_4)^2 \end{vmatrix}.$$

Cette condition (qui reste valable dans le cas où $(m,n) = (0,0)$) s'exprime donc comme un polynôme de degré 3 en les variables l, m, n. Comme l'on pouvait s'y attendre, c'est un polynôme homogène, c'est-à-dire

$$C_{p_1,p_2,p_3,p_4}(\lambda l, \lambda m, \lambda n) = \lambda^3 C_{p_1,p_2,p_3,p_4}(l,m,n) \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Enfin, remarquons que cette condition est vérifiée pour les six directions particulières qui correspondent aux droites $(p_i p_j)$, $1 \leq i < j \leq 4$.

Exemple 1. *Considérons l'exemple suivant*

$$p_1 = (0,0,0),\ p_2 = (1,0,0),\ p_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),\ p_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

où les quatre points forment un tétraèdre régulier. Alors, il existe un cylindre de direction $\mathbf{t}$ *passant par ces points si et seulement si*

$$\left(3\,l+\sqrt{3}m-\sqrt{6}n\right)\left(3\,l-\sqrt{3}m+\sqrt{6}n\right)\left(2\,m+\sqrt{2}n\right) = 0.$$

Les directions des cylindres qui passent par ces quatre points s'organisent donc selon les trois plans vectoriels qui contiennent une arête du tétraèdre et qui sont parallèles à l'arête opposée.

Puisque le polynôme $C_{p_1,p_2,p_3,p_4}(l,m,n)$ est homogène, on peut déterminer les directions $\mathbf{t} = (l,m,n)$ vérifiant $C_{p_1,p_2,p_3,p_4}(l,m,n) = 0$ et telles que $l \neq 0$, en les cherchant à l'intersection du plan d'équation $l = 1$. En faisant cela, les directions de cylindres qui passent par nos quatre points et telles que $l \neq 0$ correspondent à une cubique plane d'équation $C_{p_1,p_2,p_3,p_4}(1,m,n) = 0$.

3. Cylindres passant par cinq points

On cherche à présent à déterminer les cylindres passant par cinq points donnés $p_1, \ldots, p_5$ qui sont deux à deux distincts. On conserve les hypothèses (1) sur les coordonnées des points p_1, p_2 et p_3 et on pose $p_4 = (x_4, y_4, z_4)$, $p_5 = (x_5, y_5, z_5)$. D'après l'analyse précédente, il est naturel de considérer le système

(6)
$$\left\{\begin{array}{lcl} C_{p_1,p_2,p_3,p_4}(l,m,n) & = & 0 \\ C_{p_1,p_2,p_3,p_5}(l,m,n) & = & 0. \end{array}\right.$$

Théorème 2. *Par presque tous les choix de cinq points distincts de l'espace affine réel de dimension 3, il passe au plus six cylindres.*

Démonstration. On peut montrer ce résultat à l'aide d'un ordinateur. En effet, pour presque tous les choix de cinq points $p_1,\dots,p_5$, le calcul du résultant des polynômes $C_{p_1,p_2,p_3,p_4}(1,m,n)$ et $C_{p_1,p_2,p_3,p_5}(1,m,n)$ par rapport à la variable m fournit un polynôme de degré 9 en la variable n. Par un calcul semblable, on voit que l'on peut également supposer qu'il n'y a pas de solution à notre système pour $l=0$. Par suite, pour presque tous les choix de cinq points il passe au plus neuf cylindres. On conclut en remarquant que nos deux équations s'annulent toujours pour les trois directions (p_1p_2), (p_1p_3) et (p_2p_3) qu'il convient donc de soustraire à notre compte. □

La borne donnée dans ce théorème n'est pas atteinte pour un choix général des cinq points distincts de l'espace, ce dont on peut se convaincre en considérant par exemple les points de l'exemple 1 et en leur ajoutant un cinquième point à l'intérieur du tétraèdre. Cependant, dans certains cas particuliers on trouve bien six cylindres distincts, comme le montre l'exemple qui suit.

Exemple 3. *Revenons sur l'exemple 1 en y ajoutant le point* $p_5=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, *de sorte que les cinq points* $p_1,\dots,p_5$ *forment deux tétraèdres réguliers qui partagent une même face. Alors, en procédant comme dans la preuve du théorème 2, on trouve 6 cylindres passant par ces 5 points dont les directions* $\mathbf{t}=(l,m,n)$ *sont* $\left(1,0,\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ *et* $(1,\pm\sqrt{3},\pm\sqrt{6})$.

Afin d'éviter d'avoir à calculer, trier puis exclure les trois solutions "parasites" (p_1p_2), (p_1p_3) et (p_2p_3) du système précédent, ce qui peut d'ailleurs s'avérer délicat dans le cadre d'une résolution approchée, on peut procéder comme suit. Il est immédiat de constater que ces trois directions s'obtiennent comme les solutions communes des deux équations

$$F:=nx_2=0,\quad G:=(mx_3-mx_2-ly_3)(mx_3-ly_3)mx_2=0.$$

Aussi, en calculant (à l'aide de l'ordinateur) les divisions euclidiennes des équations C_{p_1,p_2,p_3,p_4} et C_{p_1,p_2,p_3,p_5} par n, on s'aperçoit qu'il existe deux polynômes $D_4(l,m,n)$ et $D_5(l,m,n)$ qui sont homogènes de degré 2 et vérifient l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} D_4 & z_4 \\ D_5 & z_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_{p_1,p_2,p_3,p_4} \\ C_{p_1,p_2,p_3,p_5} \end{pmatrix}.$$

A partir de là, en supposant $z_4\neq 0$ on voit que l'on peut se ramener à la résolution du système de deux équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_{p_1,p_2,p_3,p_4}(l,m,n) &=& 0 \\ z_5D_4(l,m,n)-z_4D_5(l,m,n) &=& 0 \end{array}\right. \tag{7}$$

pour déterminer les cylindres passant par les points p_1,p_2,p_3,p_4,p_5. Un calcul de résultant similaire à celui fait dans la preuve du théorème 2 fournit maintenant un polynôme de degré 6.

4. Cylindre de rayon extremum passant par quatre points

Revenons maintenant à la situation présentée dans le paragraphe 2 et intéressons-nous aux cylindres qui passent par quatre points p_1,p_2,p_3 et p_4 et dont le rayon est extremum.

Rappelons tout d'abord que le rayon du cercle circonscrit à un triangle est égal au produit des longueurs de ses côtés divisé par quatre fois l'aire de ce triangle. Le carré du rayon du cylindre de direction $\mathbf{t}$ qui passe par les points p_1, p_2 et p_3 s'obtient donc par la formule

$$(8)\quad \Gamma_{p_1,p_2,p_3}(l,m,n) := \frac{N(l,m,n)}{D(l,m,n)} := \frac{(\|\mathbf{t}\|^2\|p_2\|^2-(\mathbf{t}\mid p_2)^2)(\|\mathbf{t}\|^2\|p_3\|^2-(\mathbf{t}\mid p_3)^2)(\|\mathbf{t}\|^2\|p_3-p_2\|^2-(\mathbf{t}\mid p_3-p_2)^2)}{4x_2^2y_3^2n^2\|\mathbf{t}\|^4}$$

en supposant que les projections orthogonales q_1, q_2, q_3 des trois points p_1, p_2, p_3 sur le plan vectoriel Π orthogonal à $\mathbf{t}$ sont situées sur un unique cercle (de rayon le rayon du cylindre). On notera que les polynômes N et D, respectivement numérateur et dénominateur de Γ_{p_1,p_2,p_3}, sont des polynômes homogènes de degré 6 en les variables l, m, n.

La détermination des cylindres qui passent par les quatre points p_1, p_2, p_3, p_4, supposés non coplanaires, et dont le rayon est extremum peut donc se faire en calculant les extrema de $\Gamma_{p_1,p_2,p_3}(l,m,n)$ sous la contrainte polynomiale $C_{p_1,p_2,p_3,p_4}(l,m,n)=0$. Par homogénéité, on se restreint aux solutions telles que, par exemple, $l \neq 0$ en procédant à la substitution $l=1$. Puis, par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, et après simplification, on est finalement ramené au calcul des solutions communes aux deux polynômes $C_{p_1,p_2,p_3,p_4}(1,m,n)=0$ et

$$(9)\qquad \Delta(1,m,n) := \begin{vmatrix} N\partial_m D - D\partial_m N & N\partial_n D - D\partial_n N \\ \partial_m C_{p_1,p_2,p_3,p_4} & \partial_n C_{p_1,p_2,p_3,p_4} \end{vmatrix} = 0,$$

ce dernier étant un polynôme de degré 13 en les variables m, n (mais dont le facteur essentiel est en fait un polynôme de degré 10).

Exemple 4. *Reprenant l'exemple 1, la substitution $l=1$ et l'élimination de n entre les deux équations précédentes permet de trouver cinq valeurs possibles pour m, à savoir $0, \pm\sqrt{3}$ et $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Puis, en remontant les calculs on découvre que les cylindres qui passent par ces 4 points ont un rayon qui varie entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{8}\sqrt{2}$.*

Suggestions et pistes de réflexion

► *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos illustrations informatiques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*

— Détailler les preuves de certains faits énoncés dans le texte.
— Expliquer géométriquement pourquoi on s'attend à trouver effectivement la réunion de trois plans dans l'exemple 1.

- Préciser et détailler ce que signifie “presque tous les choix” dans l’énoncé du théorème 2.
- Dans la preuve du théorème 2, que se passe-t-il lorsqu’une direction $(p_1 p_2)$, $(p_1 p_3)$ ou $(p_2 p_3)$ est quand même une direction pour laquelle les cinq points se trouvent sur un même cylindre ?
- Détailler le contenu du paragraphe 4.
- Le système (7) fournit-il une condition nécessaire et suffisante pour l’existence d’un cylindre qui passe par les cinq points $p_1, \ldots, p_5$?