

**FEUILLE D'EXERCICES n° 5**

Inverse modulo  $n$  – Fonction indicatrice d'Euler

**Exercice 1** – Déterminer les éléments inversibles dans  $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$ , et calculer les inverses.

**Exercice 2** –

- 1) Calculer l'inverse de 111 modulo 200.
- 2) Calculer l'inverse de 24 modulo 55.
- 3) Calculer l'inverse de  $5^{16}$  modulo 19.

**Exercice 3** – Trouver les diviseurs de 0 dans  $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ .

**Exercice 4** – Résoudre les équations suivantes :

- 1)  $10x \equiv 14 \pmod{15}$  ;
- 2)  $10x \equiv 14 \pmod{18}$  ;
- 3)  $10x \equiv 14 \pmod{21}$ .

**Exercice 5** – Résoudre dans  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases} , \quad \begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$$

**Exercice 6** – Soit  $\varphi$  la fonction indicatrice d'Euler.

- 1) Déterminer  $\varphi(n)$  pour  $n$  compris entre 1 et 10.
- 2) Déterminer  $\varphi(5^2)$ , en déduire  $\varphi(100)$ .
- 3) Déterminer tous les entiers  $b$  tels que  $1 < b < \varphi(100)$  et  $\text{pgcd}(b, \varphi(100)) = 1$ .

**Exercice 7** – Montrer que le carré d'un nombre entier est de l'une des formes :  $5k$ ,  $5k + 1$  ou  $5k - 1$ .